

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 31.
- A2.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14.
- A3.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 72:
Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.
- A4.** α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για τη μέση τιμή \bar{x} είναι:

α.
$$\bar{x} = \frac{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 + v_4 \cdot x_4}{10} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 9}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

β. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9.

Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 10$ που είναι άρτιος αριθμός. Έτσι

$$d = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

γ.

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{v_1(x_1 - \bar{x})^2 + v_2(x_2 - \bar{x})^2 + v_3(x_3 - \bar{x})^2 + v_4(x_4 - \bar{x})^2}{10} = \\ &= \frac{2(1-4)^2 + 3(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 1(9-4)^2}{10} = \\ &= \frac{2 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 25}{10} = \frac{50}{10} = 5. \end{aligned}$$

B2. Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές υπολογίζουμε το συντελεστή

μεταβολής $cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > \frac{10}{100}.$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2x - 1$.
Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της f .

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
f'	-		+
f	↘		↗

$$\text{Είναι } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Άρα η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1/2$, ελάχιστο $f(1/2) = 3/4$.

Γ2. Είναι $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$, οπότε $A(2, 3)$.

Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(2, 3)$. Τότε θα έχουμε:

$$3 = 2\alpha + \beta \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \alpha = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $\beta = -3$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ϵ) στο σημείο $A(2, 3)$ είναι

$$y = 3x - 3 \quad (\epsilon)$$

Γ3.

- Για $y = 0$ η (ϵ) γράφεται $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Επομένως η (ϵ) τέμνει τον x στο σημείο $B(1, 0)$.
- Για $x = 0$ η (ϵ) γράφεται $y = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow y = -3$
Επομένως η (ϵ) τέμνει τον y στο σημείο $\Gamma(0, -3)$.

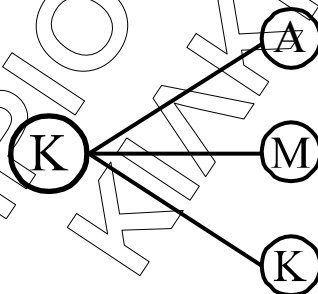
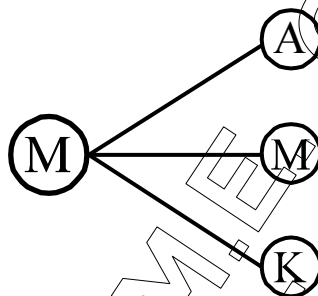
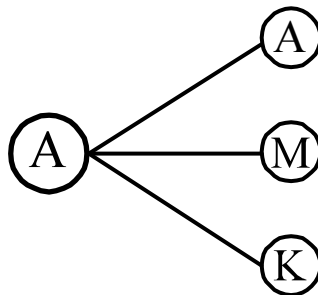
Γ4. Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} &= \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \frac{x^2 - x}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το πείραμα προκύπτει το εξής δενδροδιάγραμμα:



Έτσι ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{ AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK \}$$

Δ2. $A = \{ AM, MM, KM \}$

$B = \{ AM, AK, MA, MK, KA, KM \}$

Δ3. α. Από το Δ2 προκύπτει ότι:

$$N(A) = 3, N(B) = 6, \text{ ενώ } N(\Omega) = 9.$$

Έτσι είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{ άρα } P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{3}.$$

$A \cap B = \{ AM, KM \}$, με $N(A \cap B) = 2$, άρα:

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}.$$

- $A - B = \{ MM \}$, $N(A - B) = 1$, άρα:

$$P(A - B) = \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}.$$

- $B - A = \{ AK, MA, MK, KA \}$, $N(B - A) = 4$, άρα:

$$P(B - A) = \frac{N(B - A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{9}.$$

β) Για να είναι το ενδεχόμενο Γ ασυμβίβαστο τόσο με το A , όσο και με το B , δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο $A \cup B$.

Άρα το Γ είναι υποσύνολο του $(A \cup B)' = \{ AA, KK \}$.

$$\text{Άρα } \Gamma \subseteq (A \cup B)' \Rightarrow P(\Gamma) \leq P[(A \cup B)'] \Rightarrow P(\Gamma) \leq \frac{2}{9}.$$

Προκύπτει ότι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η $P(\Gamma)$ είναι $\frac{2}{9}$.

β' τρόπος

Για να είναι το ενδεχόμενο Γ ασυμβίβαστο τόσο με το A , όσο και με το B , δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο $A \cup B$.

Άρα θα είναι:

$$\Gamma = \{ AA \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{1}{9} \text{ ή}$$

$$\Gamma = \{ KK \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{1}{9} \text{ ή}$$

$$\Gamma = \{ AA, KK \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{2}{9}.$$

Προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή για το $P(\Gamma)$ είναι $\frac{2}{9}$.