

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, απόδειξη παρ. 1.8 σχολικό βιβλίο.

A2. Ορισμός, παράγρ. 2.2 σχολικό βιβλίο.

A3. (Λ)

Αντιπαράδειγμα : Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} αλλά $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ στο \mathbb{R} .

A4. α) $\rightarrow \Lambda$, β) $\rightarrow \Sigma$, γ) $\rightarrow \Sigma$, δ) $\rightarrow \Sigma$, ε) $\rightarrow \Sigma$.

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_f = (1, +\infty)$, $A_g = \mathbb{R}$

Η $f \circ g$ ορίζεται στο σύνολο

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ ώστε } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ ώστε } e^x > 1\} = (0, +\infty).$$

Ο τύπος της είναι: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$.

B2. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$: $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 2)(e^{x_1} - 1) \Rightarrow e^{x_1 x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1 x_2} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Όπότε η $f \circ g$ είναι 1-1 άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση:

$$(f \circ g)^{-1} : (f \circ g)((0, +\infty)) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \quad (1)$$

$$\text{Αν } y=1 \quad \eta(1) \Leftrightarrow 0e^x = 3 \text{ αδύνατη, άρα } 1 \notin (f \circ g)((0, +\infty))$$

$$\text{Αν } y \neq 1 \quad \eta(1) \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1}.$$

$$\text{Πρέπει } \frac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y < -2 \quad \eta \quad y > 1 \quad (2)$$

και

$$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \text{ αλλά } x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1 \quad (3)$$

Από (2), (3) τελικά $y > 1$

$$\text{Έτσι: } \varphi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \quad x > 1$$

(Δεύτερος τρόπος) : Μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης $f \circ g$ με τη βοήθεια της παραγώγου (προκύπτει γνησίως φθίνουσα) και βρίσκουμε ως σύνολο τιμών της το διάστημα $((\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x))) = (1, +\infty)$.

$$\mathbf{B3.} \quad \text{Για } x > 1: \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)^2} < 0$$

Άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

$$\mathbf{B4.} \quad \lim_{x \rightarrow +1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών.

Η f συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ομοίως ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών.

Αφού είναι συνεχής η f πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Άρα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 1 - \ln \lambda \Leftrightarrow 1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$ με

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty). \text{ Από (1) είναι}$$

$$\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \stackrel{\varphi \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \lambda = 1.$$

Γ2 Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$\text{Για } x < 0: \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)} = \frac{x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$\text{Για } x > 0: \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Άρα η εφαπτόμενη στο $A(0,1)$ έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα xx' είναι:

$$\varepsilon \varphi \omega \in f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \quad (\omega \in [0, \pi))..$$

Γ3. Για $x < 0$: $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x > 0$: $f'(x) = (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)' = \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x, & x > 0 \end{cases}$$

Για $x \leq 0$ είναι $f'(x) > 0$.

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = \sin x$

$$\stackrel{\sin x \neq 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon \varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4} \text{ αφού } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Επειδή λοιπόν η f' ορίζεται στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ και $f'(x) = 0$ στα $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$, αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(a, f(a))$ είναι $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

$$\text{Για } y = 0 \Rightarrow -f(a) = f'(a)x - af'(a) \Leftrightarrow x = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ είναι

$$B\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$$

$$\text{Επομένως } x_B = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{1-a}{(1-a)^2} = a - \frac{1}{1-a} = 2a - 1.$$

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι:

$$x_B(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow x'_B(t) = 2a'(t) \Rightarrow x'_B(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow x'_B(t) = -\frac{2}{3}a(t) \quad (1)$$

Όμως ισχύει $a(t_0) = -1$

Από (1) για $t = t_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3} \quad \begin{array}{l} \text{μονάδα μήκους} \\ \text{μονάδα χρόνου} \end{array}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$f'(x) = e^x + 2x - e \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = e^x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$f''(x) > 0$ στο \mathbb{R} άρα f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Η f' στο $[0, 1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αφού

$$f'(0) = 1 - e < 0$$

$$f'(1) = 2 > 0$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$: $f'(x_0) = 0$

Το παραπάνω είναι μοναδικό στο \mathbb{R} αφού f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Έτσι

$$x < x_0 \stackrel{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$$

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$		↙ ↘		↗ ↘	
		$\min: f(x_0)$			

Έχουμε:

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 \quad (1)$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad (2)$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Δ2. Από (Δ1) για $x \neq x_0$ είναι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ λόγω συνέχειας της f στο x_0 .

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty \quad (3)$$

Ακόμη για $x \neq x_0$ είναι:

$$\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 \quad (4)$$

$$\text{Από (3)} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right] = +\infty$$

Δ3 Έστω $\varphi(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$

Η φ είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών.

- $\varphi(x_0) = f(x_0)$

$$\text{Όμως } x_0 < 1 \stackrel{(\Delta_1)}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) < 0$$

- $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_0 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$

Ωστε: $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho - x_0 = 0$

Η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική στο $[x_0, 1]$

Αφού $\varphi'(x) = f'(x) + 1 > 0$ στο $[x_0, 1]$

$\Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$.

Δ4. Είναι $f(\rho) + \rho = x_0$ με $\rho \in (x_0, 1)$ και $x_0 \in (0, 1)$

Έχουμε για $\kappa \in (\rho, 1)$:

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) \quad (5)$$

Η f στο $[x_0, \rho]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει

$$\xi \in (x_0, \rho): f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \quad (6)$$

$$(5) \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa)$$

Ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και $\xi < \rho, \kappa \in (\rho, 1)$.

Δ4. (2ος τρόπος)

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho)f'(\kappa) + f(\rho) \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) - f(\rho)f'(\kappa) - f(\rho) > 0$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(\rho)f'(x) - f(\rho) \quad \text{με } x \in [\rho, 1]$$

είναι $\varphi(x) > 0$.

Στο $[x_0, \rho]$ από ΘΜΤ υπάρχει
ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (x_0, \rho): f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) = f'(\xi)(x_0 - \rho).$$

Από το Δ3, είναι

$$f(\rho) + \rho \in x_0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho < 0.$$

$$\text{Άρα } \varphi(x) = f'(\xi)(x_0 - \rho) - (x_0 - \rho)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(x))$$

Είναι

$$\varphi(x) = (x_0 - \rho)(-f''(x)) > 0, \quad \text{αφού } x_0 - \rho < 0$$

και $f''(x) > 0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $[\rho, 1]$.

$$\text{Άρα } \rho < x < 1 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(\rho) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(\rho)) \quad (1)$$

$$\text{Αφού } \xi < \rho \stackrel{f'' > 0}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(\rho) \Rightarrow f'(\xi) - f'(\rho) < 0$$

$$\text{και } x_0 - \rho < 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \varphi(x) > \varphi(\rho) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0.$$