# ΘΕΜΑΤΑ Α

## ΚΡΟΥΣΕΙΣ

*Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής*

**1.1.** Σημειακή σφαίρα μάζας $m$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ$ και συγκρούεται ελαστικά με λείο κατακόρυφο τοίχο , μετά την κρούση κινείται σε διεύθυνση κάθετη της αρχικής. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας έχει μέτρο:

$α.\ mυ$ $β. 2mυ$ $γ.\ mυ\sqrt{2}$ $δ.\ 0$

**1.2** Κατά την διάρκεια μιας κεντρικής ελαστικής κρούσης διατηρείται:
**α.** Η κινητική ενέργεια του συστήματος.
**β.** Η ορμή κάθε σώματος.
**γ.** Η κινητική ενέργεια κάθε σώματος.
**δ.** Η μηχανική ενέργεια του συστήματος.

**1.3** Σφαίρα $Σ_1$ κινείται με ταχύτητα $υ_1$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη αρχικά ακίνητη σφαίρα $Σ_2$, ίσης μάζας. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_1$ που μεταφέρεται στη σφαίρα $Σ_2$ κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι:

$α.\ 0\%$ $β.\ 50\%$ $γ.\ 75\%$ $δ.\ 100\%$

**1.4** Στην ελαστική κρούση δύο σφαιρών οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα λόγω της κρούσης βρίσκονται στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους.
**α.** Όταν η κρούση είναι κεντρική.
**β.** Όταν η κρούση είναι έκκεντρη.
**γ.** Όταν η κρούση είναι πλάγια.
**δ.** Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις.

**1.5** Δύο σώματα κινούνται με ταχύτητες $\vec{υ}_1$ και $\vec{υ}_2$. Μετά την κρούση αποκτούν ταχύτητες $-\vec{υ}_1$ και $-\vec{υ}_2$.
**α.** Η κρούση είναι κεντρική ελαστική.
**β.** Τα σώματα έχουν ίσες μάζες
**γ.** Η κρούση είναι έκκεντρη ελαστική.
**δ.** Η κρούση είναι ανελαστική.

**1.6** Δύο σφαίρες Α και Β κινούμενες σε αντίθετες κατευθύνσεις πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται παραμένει ακίνητο. Αν η σφαίρα Α έχει μάζα διπλάσια από τη σφαίρα Β, τότε τα μέτρα των αρχικών ταχυτήτων τους έχουν λόγο $υ_B/υ_A$ ίσο με:

**α.** 1. **β.** 2. **γ.** 3. **δ.** 4.

**1.7** Δύο σφαίρες με διαφορετικές μάζες έχουν αντίθετες ορμές και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Όσο διαρκεί η κρούση οι ταχύτητες των σφαιρών:
**α.** Είναι κάθε στιγμή αντίθετες.
**β.** Έχουν σταθερή διαφορά.
**γ.** Έχουν σταθερό άθροισμα.
**δ.** Έχουν σταθερό λόγο.

**1.8** Δύο σώματα με διαφορετικές μάζες συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Αν το συσσωμάτωμα μετά την κρούση παραμένει ακίνητο, αυτό σημαίνει ότι:
**α.** Τα σώματα, πριν την κρούση, έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.
**β.** Η ορμή του συστήματος μειώθηκε εξ αιτίας της κρούσης.
**γ.** Τα σώματα, πριν την κρούση, έχουν αντίθετες ταχύτητες.
**δ.** Το ποσοστό μείωσης της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος είναι 100 %.

**1.9** Αν ένα ακίνητο σώμα διασπαστεί σε δύο σώματα τότε τα δύο αυτά σώματα αμέσως μετά την διάσπαση:
**α.** Κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις.
**β.** Αποκτούν ίσες ορμές.
**γ.** Αποκτούν κινητικές ενέργειες αντιστρόφως ανάλογες των μαζών τους.
**δ.** Αποκτούν κινητικές ενέργειες ανάλογες των μαζών τους.

**1.10** Ένα σώμα Α μάζας $2m$, το οποίο έχει κινητική ενέργεια $K$, συγκρούεται πλαστικά με σώμα Β μάζας $m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Η μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι ίση με

$\alpha.\ 3K$ $\beta.\ \frac{3}{2}K$ $\gamma.\ \frac{4K}{3}$ $\delta. 6K$

**1.11** Σφαίρα μάζας $m_1$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2$. Μετά την κρούση αποκλείεται οι δύο σφαίρες να έχουν :
**α.** Ίσες κινητικές ενέργειες.
**β.** Ίσες ορμές.
**γ.** Αντίθετες ταχύτητες.
**δ.** Αντίθετες ορμές.

**1.12** Στην πλάγια ελαστική κρούση μιας σφαίρας με τοίχο παραμένει σταθερή:
**α.** Η ταχύτητα της σφαίρας.
**β.** Η ορμή της σφαίρας.
**γ.** Η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας.
**δ.** Η κινητική ενέργεια της σφαίρας.

**1.13** Μια σφαίρα μάζας $m$ προσκρούει κάθετα και ελαστικά σε ένα ακλόνητο οριζόντιο και λείο πάτωμα. Η ταχύτητα της σφαίρας λίγο πριν τη στιγμή της κρούσης έχει μέτρο $\upsilon$.

**α.** Η κινητική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της κρούσης.

**β.** Το μέτρο μεταβολής της ορμής της σφαίρας είναι $2m\upsilon$.

**γ.** Η μεταβολή του μέτρου της ορμής της σφαίρας είναι $2m\upsilon$.

**δ.** Η ορμή της σφαίρας διατηρείται σταθερή.

**1.14** Σε μία έκκεντρη ελαστική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες οι ορμές πριν την κρούση είναι αντίθετες. Οι σφαίρες μετά την κρούση θα κινούνται:

**α.** Στην ίδια ευθεία. **β.** Σε κάθετες ευθείες.

**γ.** Σε παράλληλες ευθείες. **δ.** Σε ευθείες που σχηματίζουν γωνία $45^o$.

*Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους*

**1.15** Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

**α.** Η κινητική ενέργεια ενός σώματος είναι $K = P^2/2m$.

**β.** Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα.

**γ.** Ένα σύστημα δύο σωμάτων με μηδενική ορμή δεν έχει κινητική ενέργεια.

**δ.** Δύο σώματα με αντίθετες ορμές ,έχουν κινητικές ενέργειες αντιστρόφως ανάλογες των μαζών τους.

**ε.** Σε μία οριζόντια βολή η μεταβολή ορμής σε χρόνο $\Delta t$ έχει μέτρο ίσο με μηδέν.

**1.16** Κατά την κρούση δύο σφαιρών που αποτελούν μονωμένο σύστημα:

**α.** Ισχύει η Αρχή Διατήρησης Ενέργειας.

**β.** Δεν μεταβάλλεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια των σωμάτων.

**γ.** Διατηρείται η ορμή κάθε σώματος.

**δ.** Μειώνεται πάντα η κινητική ενέργεια του συστήματος.

**ε.** Οι δυνάμεις κρούσης είναι στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα των σωμάτων.

**1.17** Σε μία κεντρική κρούση.

**α.** Οι μεταβολές ορμής των δύο σωμάτων είναι αντίθετες $\Delta p_1 = -\Delta p_2$.

**β.** Οι ταχύτητες των σωμάτων πριν την κρούση είναι παράλληλες.

**γ.** Η ορμή του συστήματος μπορεί να είναι μηδέν.

**δ.** Τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες αν έχουν ίδιες μάζες.

**ε.** Τα σώματα αποκτούν αντίθετες ορμές.

**1.18** Σε μία κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών:

**α.** Αν οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες συμβαίνει ανταλλαγή ταχυτήτων.
**β.** Η κινητική ενέργεια του συστήματος μένει σταθερή στην διάρκεια της κρούσης.
**γ.** Οι μεταβολές των κινητικών ενεργειών των σωμάτων είναι $\Delta K_1 = -\Delta K_2$.
**δ.** Τα ποσοστά μεταβολής της κινητικής ενέργειας των σωμάτων είναι αντίθετα.
**ε.** Η μηχανική ενέργεια του συστήματος μένει σταθερή στη διάρκεια της κρούσης.

**1.19** Σώμα $\Sigma_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα $\Sigma_2$ ( $\upsilon_2 = 0$)
**α.** Η μεταβολή του μέτρου της ορμής μπορεί να είναι μηδέν αν το $\Sigma_2$ είναι τοίχος.
**β.** Αν το $\Sigma_1$ είναι νετρόνιο και το $\Sigma_2$ είναι πρωτόνιο τότε το νετρόνιο θα χάσει όλη την κινητική του ενέργεια.
**γ.** Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ1 είναι διάφορη του μηδενός.
**δ.** Τα σώματα μετά την κρούση μπορούν να έχουν αντίθετες ορμές.
**ε.** Η ταχύτητα του Σ1 μετά την κρούση αποκλείεται να είναι μηδέν.

**1.20** Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές:
**α.** Σε μία ανελαστική κρούση σφαίρας με λείο τοίχο η γωνία πρόσπτωσης είναι μικρότερη από τη γωνία ανάκλασης.
**β.** Αν δύο σώματα έχουν αντίθετες ορμές πριν την κρούση τότε μετά την κρούση τα σώματα θα κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.
**γ.** Στην πλαστική κρούση σφαίρας Σ με άλλη ακίνητη σφαίρα το ποσοστό κινητικής ενέργειας που γίνεται θερμότητα δεν εξαρτάται από την ταχύτητα της σφαίρας Σ.
**δ.** Αν σε μία κρούση χάνεται το 100% της κινητικής ενέργειας τότε το μέτρο της ολικής ορμής του συστήματος μειώνεται κατά 100%.
**ε.** Στις ανελαστικές κρούσεις δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης Ενέργειας.

**1.21** Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές:
**α.** Στην έκκεντρη κρούση οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση είναι παράλληλες.
**β.** Στην ελαστική κρούση σφαίρας με λείο τοίχο το μέτρο της ορμής της σφαίρας δεν μεταβάλλεται.
**γ.** Στην ανελαστική κρούση σφαίρας με λείο τοίχο η γωνία ανάκλασης είναι μεγαλύτερη από τη γωνία πρόσπτωσης.
**δ.** Μια πλάγια κρούση είναι πάντα ανελαστική.
**ε.** Αν δύο σφαίρες Α και Β με αντίθετες ορμές συγκρούονται έκκεντρα, μετά την κρούση οι δύο σφαίρες θα έχουν παράλληλες ταχύτητες.

## ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

*Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής*

**1.22** Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T$:
**α.** η φάση είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.
**β.** η ταχύτητα και η απομάκρυνση έχουν ίδια φάση.
**γ.** η επιτάχυνση και η απομάκρυνση έχουν ίδια φάση.
**δ.** η ταχύτητα προηγείται χρονικά της απομάκρυνσης κατά $T/4$.

**1.23** Σώμα κάνει ΑΑΤ χωρίς αρχική φάση. Τη χρονική στιγμή $t_1 = T/4$ το σώμα έχει μέγιστη:
**α.** φάση.
**β.** ταχύτητα.
**γ.** επιτάχυνση.
**δ.** απομάκρυνση.

**1.24** Σε μία ΑΑΤ όταν η φάση αυξηθεί κατά $20\pi$ το σώμα έχει περάσει από τη θέση ισορροπίας:
**α.** 10 φορές
**β.** 20 φορές
**γ.** 40 φορές
**δ.** 5 φορές

**1.25** Σε μία ΑΑΤ η δύναμη επαναφοράς γίνεται μέγιστη:
**α.** Όταν η απομάκρυνση είναι μέγιστη.
**β.** Όταν η ταχύτητα είναι μέγιστη.
**γ.** Όταν ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι μηδέν.
**δ.** Όταν η απομάκρυνση γίνει ίση με $-A$.

**1.26** Στην ΑΑΤ τα μεγέθη που έχουν αλγεβρικές τιμές πάντα με ίδιο πρόσημο είναι:
**α.** Ταχύτητα και απομάκρυνση.
**β.** Επιτάχυνση και απομάκρυνση.
**γ.** Συνισταμένη δύναμη και ταχύτητα.
**δ.** Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας και δύναμη επαναφοράς.

**1.27** Η επιτάχυνση ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση:
**α.** έχει διαφορά φάσης $\pi/2$ με τη δύναμη επαναφοράς.
**β.** έχει την ίδια φάση με την απομάκρυνση.
**γ.** γίνεται μέγιστη όταν ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι μέγιστος.
**δ.** παρουσιάζει διαφορά φάσης $\pi$ με την ταχύτητα.

**1.28** Η ενέργεια μιας ταλάντωσης περιόδου $T$:
**α.** είναι ίση με το άθροισμα της μέγιστης δυναμικής ενέργειας και της μέγιστης κινητικής ενέργειας.
**β.** καθορίζει το πλάτος της ταλάντωσης.
**γ.** έχει αρνητικό ρυθμό μεταβολής.
**δ.** είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο $T' = T/2$.

**1.29** Σε μια ΑΑΤ χωρίς αρχική φάση στο χρονικό διάστημα $T/4$ έως $T/2$
**α.** Η ταχύτητα είναι συνέχεια θετική.
**β.** Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι θετικός.
**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι θετικός.
**δ.** Το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται.

**1.30** Σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας:
**α.** ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας γίνεται μέγιστος.
**β.** το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι μέγιστο.
**γ.** ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας μηδενίζεται.
**δ.** ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι μέγιστος.

**1.31** Εκτρέπουμε σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά $d$ και κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν εκτρέψουμε το σώμα κατά $2d$, θα κάνει ταλάντωση με:
**α.** διπλάσια ενέργεια.
**β.** διπλάσια περίοδο.
**γ.** διπλάσια αρχική φάση.
**δ.** διπλάσια μέγιστη ταχύτητα.

**1.32** Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A$. Όταν $U = K$ τότε η απομάκρυνση είναι:
**α.** $x = A/2$
**β.** $x = -A/2$
**γ.** $x = \pm A$
**δ.** $x = \pm A/\sqrt{2}$

**1.33** Σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ολική ενέργεια $E$. Η επιπλέον ενέργεια που πρέπει να προσφέρουμε στο σύστημα, ώστε να διπλασιαστεί το πλάτος της ταλάντωσής του, είναι:
**α.** $E$ **β.** $2E$ **γ.** $4E$ **δ.** $3E$

**1.34** Σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A$ και με ενέργεια $E$. Στη θέση με απομάκρυνση $x = A/2$:
**α.** έχει δυναμική ενέργεια $E/2$.

**β.** έχει κινητική ενέργεια $E/4$.
**γ.** έχει δυναμική ενέργεια ίση με την κινητική.
**δ.** έχει κινητική ενέργεια $3E/4$.

**1.35** Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση ενέργειας $E$. Τη στιγμή που η επιτάχυνση έχει μέτρο ίσο με το μισό της μέγιστης επιτάχυνσης, η κινητική ενέργεια $K$ είναι:
**α.** $K = U_{max}/2$ **β.** $K = U$ **γ.** $K = 3U$ **δ.** $K = E/2$

**1.36** Σε μια ΑΑΤ όταν το σώμα κινείται προς την θέση ισορροπίας είναι θετικός:
**α.** Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.
**β.** Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής.
**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας.
**δ.** Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

**1.37** Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $f$. Η συχνότητα $f'$ με την οποία μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του σώματος είναι:
**α.** $f/2$ **β.** $f$ **γ.** $2f$ **δ.** $4f$

**1.38** Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση.
**α.** Ο ρυθμός μεταβολής της φάσης είναι ίσος με τη συχνότητα.
**β.** Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι πάντα θετικός.
**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής έχει ίδια φάση με το ρυθμό μεταβολής της απομάκρυνσης.
**δ.** Ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας είναι μηδέν.



**1.39** Για να διεγείρουμε ένα σύστημα ελατηρίου - μάζας ($k$-$m$) σε ταλάντωση πλάτους $A$, πρέπει να προσφέρουμε ενέργεια $E$. Για να διεγείρουμε σε ταλάντωση πλάτους $A$ ένα σύστημα ($k$-$2m$) πρέπει να προσφέρουμε ενέργεια:
**α.** $4E$ **β.** $2E$ **γ.** $E/2$ **δ.** $E$

**1.40** Σύστημα ελατήριο - μάζα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση σε οριζόντιο λείο επίπεδο. Όταν η μάζα βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, ένα κομμάτι πλαστελίνης που πέφτει κατακόρυφα, προσκολλάται στη μάζα. Από τα μεγέθη της ταλάντωσης, αυτό που δε θα μεταβληθεί είναι:
**α.** Η μέγιστη επιτάχυνση. **β.** Η περίοδος.
**γ.** Η μέγιστη ταχύτητα. **δ.** Η μέγιστη κινητική ενέργεια $K_{max}$.

**1.41** Σε μια φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η δύναμη της απόσβεσης είναι της μορφής $F_{αν} = -b \cdot υ$ όπου b μια μικρή σταθερά απόσβεσης:
**α.** το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται γραμμικά με το χρόνο.
**β.** η μηχανική ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται σταθερή.
**γ.** η περίοδος της ταλάντωσης είναι σταθερή.
**δ.** η δύναμη επαναφοράς ισούται κατά μέτρο με τη δύναμη απόσβεσης.

**1.42** Η δύναμη απόσβεσης σε μια φθίνουσα ταλάντωση:
**α.** έχει φορά πάντοτε προς τη θέση ισορροπίας.
**β.** έχει φορά αντίθετη της δύναμης επαναφοράς.
**γ.** έχει πάντοτε αρνητικό έργο.
**δ.** έχει φορά ίδια με αυτή της ταχύτητας του σώματος.

**1.43** Σε φθίνουσα μηχανική ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής $F = -bυ$:
**α.** Το πλάτος μειώνεται γραμμικά σε συνάρτηση με τον χρόνο.
**β.** Το ποσό ενέργειας που χάνεται ανά περίοδο είναι σταθερό.
**γ.** Η απώλεια ενέργειας είναι ανάλογη του χρόνου,
**δ.** η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης διατηρείται σταθερή.

**1.44** Ένα σώμα κάνει φθίνουσα ταλάντωση. Η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση έχει τη μορφή $F = -bυ$. Ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση:
**α.** μειώνεται συνεχώς.
**β.** παραμένει σταθερός.
**γ.** αυξάνεται συνεχώς.
**δ.** Μειώνεται εκθετικά

**1.45** Σε μια φθίνουσα ταλάντωση η δύναμη που προκαλεί την απόσβεση είναι της μορφής $F = -bυ$, όπου $b$ θετική σταθερά και $υ$ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται. Το έργο της δύναμης αυτής είναι:
**α.** θετικό όταν $υ < 0$
**β.** πάντα αρνητικό.
**γ.** πάντα θετικό.
**δ.** μηδέν για μια πλήρη ταλάντωση.

**1.46** Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση η συχνότητα του διεγέρτη είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή. Αυξάνουμε συνεχώς τη συχνότητα του διεγέρτη. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης:
**α.** αυξάνει συνεχώς.
**β.** μειώνεται συνεχώς.
**γ.** μένει σταθερό.
**δ.** αυξάνεται αρχικά και μετά μειώνεται.

**1.47** Κατά το συντονισμό:

**α.** η συχνότητα του διεγέρτη γίνεται μέγιστη.
**β.** ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας ανά περίοδο είναι μέγιστος.
**γ.** ο ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας είναι ελάχιστος.
**δ.** η ενέργεια ταλάντωσης είναι ελάχιστη.

*Ερωτήσεις τύπου Σωστού- Λάθους*

**1.48** Σε μία απλή αρμονική ταλάντωση:
**α.** Η αρχική φάση παίρνει τιμές 0 ή $\pi/2$.
**β.** Σε χρόνο $\Delta t = T/6$ η φάση της ταλάντωσης αυξάνει κατά $\pi/6$.
**γ.** Όταν η μετατόπιση είναι μηδέν η μεταβολή της ταχύτητας είναι πάντα μηδέν.
**δ.** Ο ρυθμός μεταβολής της φάσης ονομάζεται και γωνιακή συχνότητα.
**ε.** Στην θέση ισορροπίας ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι μηδέν.

**1.49** Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση:
**α.** όταν το σώμα πάει από τη μία ακραία θέση στην άλλη, η φάση της ταλάντωσης αυξάνεται κατά $2\pi$.
**β.** όταν το σώμα κινείται προς τη θέση ισορροπίας το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.
**γ.** η περίοδος είναι ανάλογη του πλάτους της ταλάντωσης.
**δ.** η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι αρνητική όταν $x < 0$.
**ε.** σε κάθε τιμή της απομάκρυνσης αντιστοιχούν δύο τιμές ταχύτητας.

**1.50** Σε μία απλή αρμονική ταλάντωση:
**α.** Η επιτάχυνση και η ταχύτητα του σώματος έχουν συνέχεια αντίθετη κατεύθυνση.
**β.** Η σταθερά επαναφοράς είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής συχνότητας.
**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος μηδενίζεται δύο φορές σε κάθε περίοδο.
**δ.** Η περίοδος δεν εξαρτάται από το πλάτος.
ε. Για αρχική ταχύτητας $\upsilon_o$ και αρχική απομάκρυνση $x_o$ ισχύει: $\upsilon_o = \omega x_o$

**1.51** Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση:
**α.** Η δύναμη επαναφοράς και η απομάκρυνση έχουν ίδια φάση.
**β.** Η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης
**γ.** Η δυναμική και η κινητική ενέργεια μεταβάλλονται περιοδικά με συχνότητα διπλάσια από τη συχνότητα ταλάντωσης.
**δ.** Η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι ίσες στις θέσεις $x = \pm A/2$.
**ε.** Η περίοδος της ταλάντωσης δεν εξαρτάται από την αρχική φάση της ταλάντωσης.

**1.52** Σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $f$.
**α.** Σε κάθε δευτερόλεπτο το σώμα διέρχεται $2f$ φορές από τη θέση ισορροπίας του.
**β.** Η κινητική ενέργεια μεταβάλλεται με συχνότητα $2f$.
**γ.** Η μηχανική ενέργεια μεταβάλλεται με συχνότητα $f$.
**δ.** Η ορμή μεταβάλλεται με συχνότητα $2f$.
**ε.** Η $f$ εξαρτάται από την μάζα και τη σταθερά επαναφοράς του ταλαντωτή.

**1.53** Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση:
**α.** Το πλάτος μειώνεται με το χρόνο.
**β.** Η συχνότητα είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.
**γ.** Η ενέργεια που χάνεται λόγω αποσβέσεων αναπληρώνεται από τον διεγέρτη.
**δ.** Η μέγιστη τιμή του πλάτους εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης.
**ε.** Κατά το συντονισμό, στο σύστημα δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας.

**1.54** Σε ένα σώμα που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση:
**α.** Η αρχική φάση μιας ταλάντωσης παίρνει τιμές $0 \leq \varphi_o < 2\pi$
**β.** Η συνισταμένη δύναμη ονομάζεται δύναμη επαναφοράς.
**γ.** Το σώμα διανύει διάστημα $2A$ σε μία πλήρη ταλάντωση.
**δ.** Σε κάθε τιμή της απομάκρυνσης αντιστοιχούν δύο τιμές της επιτάχυνσης
**ε.** Η ταχύτητα και η απομάκρυνση παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\pi/2$

**1.55** Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:
**α.** Η κινητική και η δυναμική ενέργεια μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο με συχνότητα ίση με την συχνότητα της ταλάντωσης.
**β.** Αν αυξήσουμε την ενέργεια του σώματος κατά 300% το πλάτος του θα αυξηθεί κατά 100%.
**γ.** Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης.
**δ.** Η φάση είναι ανάλογη του χρόνου.
**ε.** Ο ρυθμός μεταβολής της φάσης είναι σταθερός.

**1.56** Σε μία φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας:
**α.** Η συχνότητα μειώνεται εκθετικά με την πάροδο του χρόνου.
**β.** Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σε κάθε ταλάντωση είναι αντίθετος του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας.
**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας είναι αρνητικός.
**δ.** Η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι ίδια σε κάθε περίοδο.
**ε.** Η σταθερά απόσβεσης έχει μονάδες $kg/s$.

**1.57** Σε μία φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας:

**α.** Το ποσοστό απώλειας είναι ίδιο σε κάθε περίοδο.
**β.** Το έργο της δύναμης απόσβεσης είναι αρνητικό για κάθε μετατόπιση.
**γ.** Η σταθερά απόσβεσης $b$ εξαρτάται από το σχήμα και το μέγεθος του σώματος.
**δ.** Αν η σταθερά απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη έχουμε μη περιοδική κίνηση.
**ε.** Σε συστήματα ανάρτησης επιδιώκουμε μικρή τιμή της σταθεράς απόσβεσης.

**1.58** Σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση:
**α.** Η συχνότητα της είναι ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη.
**β.** Μπορούμε να παρατηρήσουμε ίδιο πλάτος για 2 διαφορετικές συχνότητες.
**γ.** Η ταχύτητα και η απομάκρυνση έχουν ίδια φάση.
**δ.** Το έργο της διεγείρουσας δύναμης σε μία περίοδο είναι ίσο με την θερμότητα που αναπτύσσεται στον ίδιο χρόνο.
**ε.** Το πλάτος της είναι ανεξάρτητο από τη συχνότητα του διεγέρτη.

**1.59** Αν σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση έχουμε συντονισμό τότε:
**α.** Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.
**β.** Ο ταλαντωτής απορροφά με το βέλτιστο τρόπο την προσφερόμενη ενέργεια.
**γ.** Η μηχανική ενέργεια που γίνεται θερμότητα είναι ελάχιστη.
**δ.** Το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο.
**ε.** Αν αυξήσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη το πλάτος θα αυξηθεί.

# ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ

**Στερεό Σώμα**

*Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής*

**1.60** Αν κατά την κίνηση ενός στερεού δύο σημεία Α και Β έχουν κάποια στιγμή ίδια ταχύτητα τότε το στερεό.
**α.** Κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση. **β.** Κάνει σύνθετη κίνηση.
**γ.** Κάνει μεταφορική κίνηση. **δ.** Κάνει περιστροφική κίνηση.

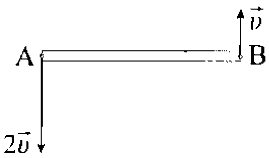
**1.61** Στην περιστροφική κίνηση στερεού όλα τα σημεία που κινούνται έχουν
**α.** Ίδια γραμμική ταχύτητα. **β.** Ίδια γωνιακή μετατόπιση.
**γ.** Ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση. **δ.** Ίδια ακτίνα.

**1.62** Σε σύστημα οδοντωτών τροχών με διαφορετικές ακτίνες:
**α.** Τα σημεία των δύο τροχών που συμπλέκονται έχουν ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση.
**β.** Οι δύο τροχοί κάνουν ίδιο πλήθος περιστροφών στον ίδιο χρόνο.
**γ.** Οι γωνιακές ταχύτητες των δύο τροχών είναι κάθετες κάθε στιγμή.
**δ.** Τα σημεία των δύο τροχών που συμπλέκονται έχουν ίδια ταχύτητα.

**1.63** Δύο οδοντωτοί τροχοί βρίσκονται σε επαφή και έχουν ακτίνες $R_1$ και $R_2$ με $R_1 = 3R_2$ . Οι τροχοί περιστρέφονται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες $\omega_1$ και $\omega_1$ αντίστοιχα. Ο λόγος του αριθμού των περιστροφών που διαγράφουν σε κάποιο χρονικό διάστημα $N_1/N_2$ είναι: 
**α.** 3 **β.** 1/3 **γ.** 6 **δ.** 3/2

**1.64** Δύο τροχοί συνδέονται με ιμάντα και περιστρέφονται χωρίς να γλιστρά ο ιμάντας. Ο ένας τροχός έχει ακτίνα $R_1 = 10$ cm και γωνιακή ταχύτητα $\omega_1$ και ο άλλος τροχός έχει ακτίνα $R_2 = 20$ cm και γωνιακή ταχύτητα $\omega_2$.
**Α.** Ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων $\omega_1/\omega_2$ των δύο τροχών ισούται με:
**α.** 1 **β.** 2 **γ.** 1/2 **δ.** 1/4

**1.65** Η ράβδος του σχήματος έχει μήκος L και περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στη ράβδο. Ο άξονας περιστροφής τέμνει τη ράβδο σε σημείο Ο που απέχει από το Α απόσταση.




$\alpha.\ \frac{L}{4}$ $\beta.\ \frac{L}{2}$ $\gamma.\frac{3L}{4}$ $\delta.\frac{2L}{3}$

**1.66** Σε ένα τροχό που κυλάει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ένα σημείο Α βρίσκεται σε απόσταση $R/2$ από το κέντρο μάζας του τροχού. Η μέγιστη τιμή προς την ελάχιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σημείου Α είναι :
$\alpha. 3/2$ $\beta. 2/1$ $\gamma. 3/1$ $\delta. 4/3$

**1.67** Τροχός που κάνει κύλιση σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας έχει μέτρο που μπορεί να πάρει τιμές .
**α.** Από $\upsilon_{cm}$ $\mu\acute{\varepsilon}\chi\rho\iota$ $2\upsilon_{cm}$ **β.** Από 0 $\mu\acute{\varepsilon}\chi\rho\iota$ $2\upsilon_{cm}$
γ. Από 0 $\mu\acute{\varepsilon}\chi\rho\iota$ $\upsilon_{cm}$ **δ.** Από 0 $\mu\acute{\varepsilon}\chi\rho\iota$ $4\upsilon_{cm}$

**1.68** Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού:
**α.** Έχει πάντα την ίδια κατεύθυνση με την γωνιακή ταχύτητα.
**β.** Έχει μονάδα μέτρησης το 1rad/s.
γ. Έχει την διεύθυνση του άξονα περιστροφής.
**δ.** Είναι κάθετη στη γωνιακή ταχύτητα.

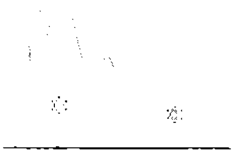
**1.69** Τροχός κάνει κύλιση σε κάποιο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και κάποια στιγμή το σημείο Γ που είναι σε επαφή με το έδαφος έχει ταχύτητα $\upsilon_\Gamma$ και την ίδια στιγμή το ψηλότερο σημείο Α έχει ταχύτητα $\upsilon_A$. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας την ίδια χρονική στιγμή είναι:

**α.** $\upsilon_\Gamma/2$ **β.** $2\upsilon_A$ **γ.** $2\upsilon_\Gamma$ **δ.** $(\upsilon_A+\upsilon_\Gamma)/2$

**1.70** Κατά την κύλιση ενός τροχού ακτίνας $R$ σε οριζόντιο επίπεδο, το κέντρο μάζας του έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{cm}$. Τα σημεία της περιφέρειας του τροχού που απέχουν από το οριζόντιο επίπεδο απόσταση $R$ έχουν ταχύτητα μέτρου:
**α.** $\upsilon_{cm}$ **β.** $2\upsilon_{cm}$ **γ.** $\upsilon_{cm}\sqrt{2}$ **δ.** $\upsilon_{cm}/2$

**1.71** Ποδήλατο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα και οι τροχοί κάνουν κύλιση. Η ακτίνα του μπροστινού τροχού είναι $R_1$ και του πίσω $R_2$ Αν $R_1=4R_2$.
**α.** Ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων των 2 τροχών είναι $\omega_2/\omega_1=2$.
**β.** Τα κέντρα μάζας των 2 τροχών έχουν διαφορετικές ταχύτητες.
**γ.** Τα ψηλότερα σημεία των 2 τροχών έχουν ίσες ταχύτητες
**δ.** Όταν ο μπροστινός τροχός έχει κάνει $N1=N$ περιστροφές τότε ο πίσω τροχός θα έχει κάνει $N2=16N$ περιστροφές

**1.72** Ένα τρακτέρ κινείται σε οριζόντιο δρόμο. Οι μπροστινοί τροχοί έχουν ακτίνα $R_1$, ενώ οι πίσω τροχοί έχουν ακτίνα $R_2=2R_1$. Όταν οι μπροστινοί τροχοί κάνουν $N_1=N$ στροφές τότε οι πίσω τροχοί θα έχουν κάνει.



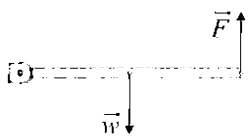
**α.** $N_2=4N$ **β.** $N_2=N$
**γ.** $N_2=N/4$ **δ.** $N_2=N/2$

**1.73** Ένας δίσκος ακτίνας R εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κύλιση σε οριζόντιο επίπεδο με επιτάχυνση κέντρου μάζας $\alpha_{cm}$. Κάποια χρονική στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι ίση με ω.
**α.** η επιτάχυνση του ανώτερου σημείου είναι $2\alpha_{cm}$.
**β.** η ταχύτητα του σημείου που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος είναι $\omega R$
**γ.** η επιτάχυνση του σημείου που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος είναι $\omega^2 R$
**δ.** η επιτάχυνση του σημείου που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος είναι μηδέν

**1.74** Ομογενής τροχός ακτίνας R κυλάει χωρίς να ολισθαίνει . Στο χρονικό διάστημα που ένα σημείο του τροχού κάνει μια πλήρη περιστροφή, το κέντρο μάζας του θα έχει μετατοπιστεί κατά:
$\alpha. \pi R$ $\beta. 2\pi R$ $\gamma. 4\pi R$ $\delta. ½\pi R$

**1.75** Ένα αρχικά ακίνητο στερεό θα κάνει μεταφορική κίνηση αν ισχύει:
**α.** $\Sigma\vec{F} = 0, \Sigma\tau = 0$ **β.** $\Sigma\vec{F} \neq 0, \Sigma\tau \neq 0$
**γ.** $\Sigma\vec{F} \neq 0, \Sigma\tau = 0$ **δ.** $\Sigma\vec{F} = 0, \Sigma\tau \neq 0$

**1.76** Η ομογενής και ισοπαχής ράβδος του σχήματος έχει βάρος $w$ και ισορροπεί οριζόντια με την επίδραση κατακόρυφης δύναμης $F$. Η ράβδος στο αριστερό άκρο της στηρίζεται στον τοίχο με άρθρωση. Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση




**α.** Είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.
**β.** Έχει την διεύθυνση της ράβδου
**γ.** Έχει μέτρο ίσο με το βάρος του σώματος
**δ.** Είναι ίση με τη δύναμη $\vec{F}$

**1.77** Η αλγεβρική τιμή της ροπής μιας δύναμης ως προς άξονα:
**α.** Είναι ίδια για κάθε άξονα περιστροφής.
**β.** Ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της δύναμης.
**γ.** Είναι μηδέν μόνο όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται από τον άξονα.
**δ.** Είναι θετική όταν η δύναμη είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής.

**1.78** Μία ράβδος ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση τριών παραλλήλων και οριζοντίων δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ οι οποίες είναι κάθετες στη ράβδο. Η $\vec{F}_1$ διέρχεται από το Κ.Μ . Αν καταργηθεί η $\vec{F}_1$ τότε η ράβδος
**α.** Θα παραμείνει ακίνητη. **β.** Θα κάνει περιστροφική κίνηση.
**γ.** Θα κάνει μεταφορική κίνηση. **δ.** Θα κάνει σύνθετη κίνηση.

**1.79** Η ροπή ζεύγους δυνάμεων:
**α.** έχει διεύθυνση παράλληλη προς τις δυνάμεις
**β.** έχει την ίδια τιμή ως προς οποιοδήποτε σημείο.
**γ.** τετραπλασιάζεται αν διπλασιάσουμε το μέτρο και των δύο δυνάμεων.
**δ.** έχει φορά που εξαρτάται από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται.

**1.80** Μια λεπτή ομογενής ράβδος ισορροπεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η ράβδος **δεν** θα κάνει μεταφορική κίνηση αν της ασκήσουμε.
**α.** Δύο αντίθετες δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα της.
**β.** Δύο ίσες δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα της.
**γ.** Μία δύναμη που έχει ως φορέα την ράβδο.
**δ.** Τρεις δυνάμεις που διέρχονται από το κέντρο μάζας.

**1.81** Αν σε αρχικά ακίνητο και ελεύθερο στερεό ασκηθεί μια δύναμη της οποίας ο φορέας δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος τότε αυτό θα κάνει:
**α.** μόνο μεταφορική κίνηση.

**β.** μόνο περιστροφική κίνηση.
**γ.** μεταφορική και περιστροφική κίνηση.
**δ.** ομαλή μεταφορική και ομαλή περιστροφική κίνηση.



**1.82** Υλικό σημείο κάνει κυκλική κίνηση σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $R$ και έχει ορμή σταθερού μέτρου $p$. Η στροφορμή του υλικού σημείου ως προς το Ο:
**α.** Είναι μονόμετρο μέγεθος.
**β.** Έχει μονάδες $kgm^2$.
**γ.** Είναι διάνυσμα ομόρροπο του διανύσματος της ορμής.
**δ.** Είναι σταθερό διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με $pR$.

**1.83** Σημειακή μάζα βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένη στο ένα άκρο οριζόντιου νήματος και κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο το άλλο άκρο του νήματος που είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο καρφί. Κάποια στιγμή κόβεται το νήμα. Μετά το κόψιμο του νήματος.
**α.** Η ορμή του σώματος μεταβάλλεται.
**β.** Η στροφορμή του σώματος ως προς άξονα το καρφί δεν μεταβάλλεται.
**γ.** Δεν έχει νόημα να μιλάμε για στροφορμή.
**ε.** Η στροφορμή μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό.

**1.84** Υλικό σημείο μάζας m είναι δεμένο στο άκρο νήματος και ισορροπεί ώστε το νήμα να είναι κατακόρυφο. Το άλλο άκρο Ο του νήματος είναι στερεωμένο στην οροφή. Με το νήμα τεντωμένο πάμε το σώμα σε σώμα σε κάποια θέση Α στην οποία το νήμα είναι οριζόντιο και το αφήνουμε ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κίνησης.

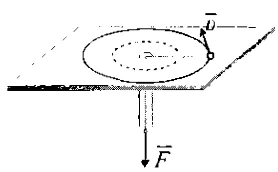
**α.** Είναι σταθερό διάνυσμα.

**β.** Έχει μέγιστο μέτρο όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο.

**γ.** Έχει μέγιστο μέτρο όταν το νήμα είναι οριζόντιο.

**δ.** Έχει μέτρο ανάλογο της ταχύτητας του σώματος.

**1.85** Μια μικρή σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $R$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν, τραβώντας το σχοινί, μειώσουμε την ακτίνα περιστροφής στο μισό, τότε η συχνότητα περιστροφής της σφαίρας:




**α.** παραμένει ίδια. **β.** διπλασιάζεται.

**γ.** υποδιπλασιάζεται. **δ.** τετραπλασιάζεται.

*Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους*

**1.86** Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.
**α**. Το μηχανικό στερεό δεν παραμορφώνεται όταν δέχεται δυνάμεις
**β.** Ζεύγος ονομάζεται ένα σύστημα δύο ίσων δυνάμεων.
**γ.** Κατά την κύλιση ενός τροχού σε οριζόντιο δάπεδο το ψηλότερο σημείο έχει ταχύτητα διπλάσια της ταχύτητας του κέντρου μάζας.
**δ**. Στην κύλιση τροχού υπάρχουν σημεία της περιφέρειας που το μέτρο της ταχύτητας των είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας
**ε.** Όταν ένας τροχός κάνει σύνθετη κίνηση σε κάποιο δάπεδο τότε τα σημεία επαφής με το δάπεδο έχουν πάντα μηδενική ταχύτητα

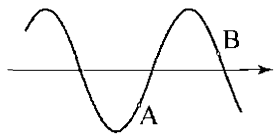
**1.87** Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.
**α**. Στην περιστροφική κίνηση ο άξονας περιστροφής διέρχεται πάντοτε από το κέντρο μάζας.
**β**. Κατά την σύνθετη κίνηση ενός τροχού κάθε σημείο της περιφέρεια του τροχού έχει ταχύτητα που το μέτρο της είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας.
**γ**. Αν ένα στερεό ισορροπεί με την επίδραση τριών μη παραλλήλων δυνάμεων τότε οι φορείς των τριών δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο.
**δ**. Η ροπή μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς άξονα περιστροφής είναι μηδέν, όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής.
**ε.** Το κέντρο μάζας ενός δίσκου είναι πάντα το κέντρο του δίσκου

**1.88** Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.
**α**. Αν μια δοκός στηρίζεται σε οριζόντιο δάπεδο και κατακόρυφο τοίχο τότε δεν θα ισορροπεί αν το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο.
**β.** Η μονάδα μέτρησης της ροπής δύναμης ως προς σημείο ή άξονα είναι το 1 $Nm$
**γ.** Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι ίση με μηδέν τότε και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων αυτών ως προς οποιοδήποτε σημείο θα είναι ίση με μηδέν.
**δ.** Εάν διπλασιάσουμε το μέτρο και των δύο δυνάμεων ενός ζεύγους δυνάμεων η ροπή του θα τετραπλασιαστεί.
**ε.** Κατά την κύλιση δίσκου σε κεκλιμένο επίπεδο το μέτρο της ταχύτητας του ψηλότερου σημείου του δίσκου είναι μικρότερο του $2\upsilon_{cm}$

## ΚΥΜΑΤΑ

*Ερωτήσεις Πολλαπλής – Επιλογής*

**1.89** Στο εγκάρσιο κύμα του σχήματος που διαδίδεται στον άξονα $x'x$ δίδεται ότι $\varphi_A < \varphi_B$.




**α.** Το κύμα διαδίδεται από το Α προς το Β.
**β.** Η ταχύτητα του Α έχει φορά προς τα πάνω.
**γ.** Η ταχύτητα του Β έχει φορά προς τα πάνω.
**δ.** Τα σημεία Α και Β έχουν ίδια ταχύτητα.

**1.90** Η ταχύτητα διάδοσης ενός μηχανικού κύματος εξαρτάται από:
**α.** το μήκος κύματος.
**β.** τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης.
**γ.** τη συχνότητα του κύματος.
**δ.** το πλάτος του κύματος.

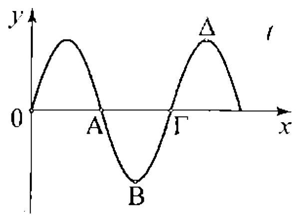
**1.91** Όταν ένα κύμα αλλάζει μέσο διάδοσης τότε:
**α.** η ταχύτητα διάδοσης παραμένει η ίδια.
**β.** το μήκος κύματος μένει σταθερό ενώ η συχνότητα μεταβάλλεται.
**γ.** Η ταχύτητα διάδοσης και το μήκος κύματος μεταβάλλονται
**δ.** μεταβάλλεται μόνο η ταχύτητα διάδοσης.

**1.92** Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται στο θετικό ημιάξονα Ox. Η φάση του κύματος σ' ένα σημείο του ελαστικού μέσου:
**α.** Αυξάνεται με το χρόνο.
**β.** Ελαττώνεται με το χρόνο.
**γ.** Παραμένει σταθερή.
**δ.** Παίρνει τιμές από 0 έως $2\pi$

**1.93** Μήκος κύματος ονομάζεται:
**α.** Η απόσταση μεταξύ δύο κοιλάδων σε ένα εγκάρσιο κύμα.
**β.** Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά όρη σε ένα διάμηκες κύμα.
**γ.** Η απόσταση δύο σημείων που έχουν διαφορά φάσης $2\pi$
**δ.** Η απόσταση δύο σημείων που ταλαντώνονται με συμφωνία φάσης.

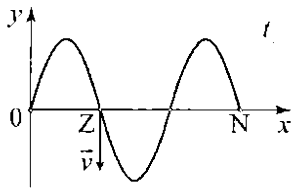
**1.94** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα $x'x$. Η πηγή $O(x=0)$ ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Τη χρονική στιγμή $t = 2{,}5T$ το κύμα φτάνει σε ένα σημείο Μ. Εκείνη τη στιγμή ο αριθμός των σημείων του ελαστικού μέσου που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας και έχουν αρνητική ταχύτητα είναι:
**α.** 5
**β.** 3
**γ.** 2
**δ.** 4

**1.95** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t$ ενός εγκάρσιου κύματος που διαδίδεται στο θετικό ημιάξονα Οx. Το σημείο του ελαστικού μέσου που κινείται με ταχύτητα μέγιστου και φορά προς τα πάνω είναι το:




**α.** Α **β.** Β **γ.** Γ **δ.** Δ

**1.96** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t$ ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος



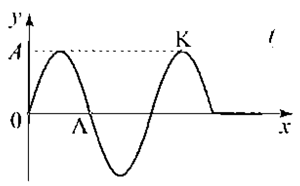

**α.** Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά.

**β.** Το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική φορά.

**γ.** Η απόσταση των σημείων Ο και Ζ είναι σταθερή.

**δ.** Τα σημεία Ζ και Ν έχουν ίδια φάση.

**1.97** Στο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο τη στιγμή $t$. ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος που διαδίδεται στο θετικό ημιάξονα Οx. Το Ο κάνει απλή αρμονική ταλάντωση στον άξονα $y'y$ χωρίς αρχική φάση.



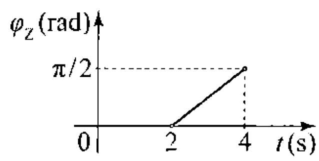

**α.** Το στιγμιότυπο αναφέρεται στη στιγμή $t = T$.

**β.** Ισχύει $\varphi_{\Lambda} - \varphi_{K} = 3\pi/2$.

**γ.** Το σημείο Ο έχει θετική ταχύτητα.

**δ.** Η φάση του Κ είναι μεγαλύτερη από την φάση του Λ

**1.98** Αρμονικό κύμα διαδίδεται στον άξονα $x'x$. Στο σχήμα φαίνεται η φάση ενός σημείου Ζ.



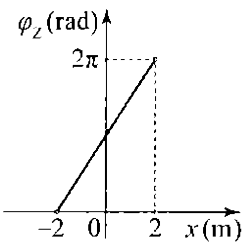

**α.** Το κύμα κατευθύνεται προς τη θετική φορά

**β.** Η περίοδος του κύματος είναι $T = 4s$

**γ.** Το κύμα είναι εγκάρσιο.

**δ.** Τη στιγμή $t = 3s$ σημείο Ζ έχει θετική ταχύτητα.

**1.99** Αρμονικό κύμα διαδίδεται στον άξονα $xx$. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης των σημείων ενός κύματος κάποια χρονική στιγμή $t_1$.




**α.** Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά.

**β.** Το μήκος κύματος είναι $\lambda = 4$ m.

**γ.** Το κύμα είναι εγκάρσιο.

**δ.** Μετά χρόνο $T/2$ το σημείο Ο θα έχει μέγιστη επιτάχυνση.

**1.100** Σ' ένα ελαστικό μέσον διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα μήκους κύματος $\lambda$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων του μέσου που οι θέσεις ισορροπίας τους απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\lambda/4$ είναι:

**α.** $\pi/8$ **β.** $\pi/4$ **γ.** $\pi/2$ **δ.** $\pi$

**1.101** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται στον άξονα $x'x$. Δύο σημεία Κ και Λ απέχουν μεταξύ τους $\lambda/2$ πριν αρχίσουν να ταλαντώνονται. Κάποια στιγμή $t$ που ταλαντώνονται και τα δύο, ισχύει $y_K = +A$. Τη στιγμή $t$.

**α.** Η φάση του Κ είναι μεγαλύτερη από την φάση του Λ
**β.** Η απόσταση των δύο σημείων είναι $\lambda/2$.
**γ.** Η επιτάχυνση του Λ είναι μηδέν.
**δ.** Η απομάκρυνση του Λ είναι $y_\Lambda = -A$.

**1.102** Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται σε ελαστικό μέσον $x'x$. Κάποια στιγμή $t$ η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σημείων ς είναι $\Delta\varphi = \pi$.

**α.** Τη χρονική στιγμή $t + T/2$ η διαφορά φάσης είναι $\Delta\varphi' = 2\pi$.
**β.** Η απόσταση των δύο σημείων κάθε στιγμή είναι ίση με $\lambda/2$.
**γ.** Τα δύο σημεία έχουν κάθε στιγμή ίδια ταχύτητα.
**δ.** Η ελάχιστη απόσταση των δύο σημείων είναι $\lambda/2$.

**1.103** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται στον άξονα $x'x$. Δύο σημεία Κ και Λ έχουν κάποια στιγμή $t$ φάσεις $\varphi_K = 3\pi/2$ και $\varphi_\Lambda = \pi/2$, αντίστοιχα και η απόσταση τους είναι $d$. Τη στιγμή $t + T/2$.

**α.** Τα σημεία Κ και Λ έχουν διαφορά φάσης $2\pi$
**β.** Η απόσταση των σημείων Κ και Λ θα είναι ίση με $\lambda/2$
**γ.** Η απόσταση των σημείων Κ και Λ θα είναι ίση με $d$
**δ.** Τα σημείο Κ διέρχεται από την θέση ισορροπίας του.

**1.104** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με περίοδο $T$ διαδίδεται στον θετικό ημιάξονα $Ox$. Ένα σημείο $\Gamma$ βρίσκεται στη θέση $\Gamma(x_\lambda = \lambda)$. Τη στιγμή $5T/4$

**α.** Η φάση της ταλάντωσης του Γ είναι μηδέν.
**β.** Η απομάκρυνση του Γ είναι μέγιστη.
**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της φάσης του Γ είναι μηδέν.
**δ.** Τα σημεία Ο και Γ έχουν αντίθετη απομάκρυνση.

**1.105** Η αρχή της επαλληλίας:

**α.** Ισχύει μόνο για εγκάρσια κύματα. **β.** Δεν ισχύει για ηχητικά κύματα.
**γ.** Δεν ισχύει για διανυσματικά μεγέθη **δ.** Δεν ισχύει για πολύ ισχυρά κύματα

**1.106** Δύο πηγές λέγονται σύγχρονες

**α.** Αν έχουν ίδια συχνότητα. **β.** Αν έχουν σταθερή διαφορά φάσης.
**γ.** Αν κάθε στιγμή έχουν ίδια φάση. **δ.** Αν έχουν διαφορά φάσης ίση με $2\kappa\pi$

**1.107** Στην επιφάνεια υγρού έχουμε 2 σύγχρονες πηγές που ταλαντώνονται με πλάτος $A$. Το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου Σ από τη στιγμή που φτάνουν και τα δυο κύματα:

**α.** είναι $2A$
**β.** ποικίλει από μηδέν έως $2A$
**γ.** ποικίλει από 0 έως $A$
**δ.** ποικίλει από $A$ έως $2A$

**1.108** Στην επιφάνεια υγρού δύο σύγχρονες πηγές παράγουν αρμονικά κύματα με μήκος κύματος $\lambda$. Η απόσταση των δύο πηγών είναι $d$. Ο αριθμός των σημείων ενισχυτικής συμβολής αποκλείεται να είναι:

**α.** 3 **β.** 4 **γ.** 5 **δ.** 7

**1.109** Δύο όμοιες πηγές κυμάτων $\Pi_1$ και $\Pi_2$, που βρίσκονται στην επιφάνεια νερού, ταλαντώνονται έχοντας κάθε στιγμή την ίδια φάση, παράγοντας εγκάρσια αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους $A$ που διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού. Τα σημεία της μεσοκάθετης του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$.

**α.** Αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα
**β.** Κάνουν ταλάντωση πλάτους $2A$
**γ.** Παραμένουν συνεχώς ακίνητα.
**δ.** Για κάποιο χρονικό διάστημα ταλαντώνονται με πλάτος $A$

**1.110** Στην επιφάνεια υγρού διαδίδονται αρμονικά κύματα που δημιουργούνται από δύο σύγχρονες πηγές $\Pi_1$ και $\Pi_2$, που ταλαντώνονται με πλάτος $A$ και περίοδο $T$. Σημείο Κ της επιφάνειας απέχει $r_1 = 4\lambda$ από την $\Pi_1$ και $r_2 = 2{,}5\lambda$ από την $\Pi_2$.

**α.** Το Κ ταλαντώνεται για χρόνο $\Delta t = 2{,}5T$.
**β.** Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων του Κ είναι $\Delta\varphi = 1{,}5\pi$.
**γ.** Η συμβολή στο Κ αρχίζει τη στιγμή $t = 2{,}5T$.
**δ.** Στο Κ έχουμε ακυρωτική συμβολή.

**1.111** Σε στάσιμο κύμα τα σημεία του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται έχουν:

**α.** ίδιο πλάτος ταλάντωσης.
**β.** ίδια συχνότητα ταλάντωσης.
**γ.** ίδια φάση ταλάντωσης.
**δ.** ίδια ενέργεια ταλάντωσης.

**1.112** Δύο όμοια κύματα, το καθένα με πλάτος $A$, διαδίδονται στον άξονα $x'x$ με αντίθετη κατεύθυνση. Τη στιγμή $t = 0$ συναντώνται στη θέση Ο $(x = 0)$.

**α.** Στη θέση Ο σχηματίζεται δεσμός.
**β.** Το σημείο Γ $(x = \lambda/4)$ κάνει ταλάντωση με πλάτος $A$.
**γ.** Το σημείο Δ $(x = \lambda/2)$ κάνει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος.
**δ.** Τα σημεία Ο και Δ κάνουν ταλάντωση με ίδια φάση

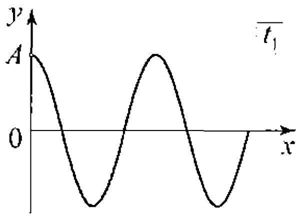
**1.113** Κατά μήκος χορδής σχηματίζεται στάσιμο κύμα. Δύο διαδοχικά σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος:

**α.** Έχουν διαφορά φάσης $2\pi$
**β.** Η απόσταση τους είναι σταθερή
**γ.** Έχουν διαφορά φάσης $\pi$
**δ.** Κάνουν ταλάντωση με ίδια φάση.

**1.114** Η ελάχιστη απόσταση δύο σημείων που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και έχουν ίδια φάση είναι:

**α.** $\lambda/2$ **β.** $\lambda/4$ **γ.** $\lambda$ **δ.** $2\lambda$

**1.115** Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον θετικό ημιάξονα $Ox$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, στο οποίο οι κοιλίες έχουν πλάτος $2A$, όπου $A$ το πλάτος των εγκαρσίων αρμονικών κυμάτων που συμβάλλοντας δημιουργούν το στάσιμο κύμα. Στο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια χρονική στιγμή $t_1$. Η ενέργεια της χορδής τη στιγμή $t_1$ είναι:




**α.** ίση με το μηδέν.
**β.** μόνο κινητική.
**γ.** μόνο δυναμική.
**δ.** κινητική και δυναμική.

**1.116** Σε στάσιμο κύμα που δημιουργήθηκε στον άξονα $x'x$ το σημείο $O(x=0)$ κάνει ταλάντωση με απομάκρυνση $y = A'\eta\mu\omega t$. Δύο σημεία $K$ και $\Lambda$ βρίσκονται στις θέσεις $K(3\lambda/8)$ και $\Lambda(5\lambda/8)$ και κάνουν αρμονική ταλάντωση.

**α.** Τα σημεία Ο και Κ έχουν ίδια φάση.
**β.** Τα σημεία Κ και Λ έχουν διαφορά φάσης $\pi/2$.
**γ.** Τα σημεία Κ και Λ έχουν κάθε στιγμή ίδια απομάκρυνση.
**δ.** Τα σημεία Κ και Λ κάνουν ταλάντωση με διαφορά φάσης $\pi$

**1.117** Σε ένα γραμμικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος $A$ και το ίδιο μήκος κύματος $\lambda$, με αποτέλεσμα στη χορδή να σχηματιστεί στάσιμο κύμα. Η απόσταση δύο σημείων Γ και Δ είναι σταθερή και ίση με $\lambda$. Μεταξύ των Γ και Δ εμφανίζονται:

**α.** 2 κοιλίες και δύο δεσμοί
**β.** 2 δεσμοί και μία κοιλία
**γ.** 1 δεσμός και δύο κοιλίες.
**δ.** 1 κοιλία και ένας δεσμός

**1.118** Σε μια χορδή ΟΑ σχηματίζεται στάσιμο κύμα με τρεις συνολικά δεσμούς. Αν το άκρο Α είναι στερεωμένο και στο ελεύθερο άκρο Ο σχηματίζεται κοιλία τότε το μήκος $L$ της χορδής θα είναι:

**α.** $\lambda$ **β.** $7\lambda/4$ **γ.** $\lambda/2$ **δ.** $5\lambda/4$

*Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους*

**1.119** Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

**α.** Κάθε κυματική διαταραχή μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από το άθροισμα ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων.
**β.** Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται μόνο στα στερεά και τα υγρά.
**γ.** Ο ήχος στο κενό διαδίδεται με διαμήκη κύματα.
**δ.** Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα αέρια και στην επιφάνεια των υγρών.
**ε.** Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται σε στερεά, υγρά και αέρια.

**1.120** Αρμονικό εγκάρσιο κύμα διαδίδεται στον άξονα $x'x$. Η διαφορά φάσης δύο σημείων Κ, Λ είναι $\Delta\varphi$. Αν η συχνότητα του κύματος διπλασιαστεί, $f' = 2f$, τότε:
**α.** η διαφορά φάσης δεν επηρεάζεται.
**β.** η διαφορά φάσης διπλασιάζεται.
**γ.** το μήκος κύματος διπλασιάζεται.
**δ.** η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υποδιπλασιάζεται.
**ε.** η ταχύτητα διάδοσης δε θα μεταβληθεί.

**1.121** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.
**α.** Η μεταβολή της φάσης ενός σημείου σε χρονικό διάστημα $\Delta t$ είναι $\Delta\varphi = \omega\Delta t$.
**β.** Η διαφορά φάσης δύο σημείων του ελαστικού μέσου είναι $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ όπου $\Delta t$ το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να πάει το κύμα από το ένα σημείο στο άλλο.
**γ.** Η διαφορά φάσης δύο σημείων που ταλαντώνονται είναι $\Delta\varphi = 2\pi d/\lambda$ όπου $d$ η απόσταση των θέσεων ισορροπίας των δύο σημείων.
**δ.** Τα ηχητικά κύματα στον αέρα και στο κενό είναι διαμήκη.
**ε.** Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται από την συχνότητα του.

**1.122** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.
**α.** Κατά τη διάδοση μηχανικού κύματος έχουμε μεταφορά ύλης και ενέργειας.
**β.** Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται σε στερεά, υγρά και αέρια.
**γ.** Η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων που έχουν κάθε στιγμή ίδια απομάκρυνση και ίδια ταχύτητα ισούται με το μήκος κύματος.
**δ.** Η φάση ενός σημείου τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται είναι $\varphi = 0$.
**ε.** Αν για δύο σημεία ισχύει $\varphi_K > \varphi_\Lambda$ το κύμα διαδίδεται από το Κ προς το Λ.

**1.123** Δύο σύγχρονες πηγές $\Pi_1, \Pi_2$ είναι στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας νερού.
**α.** Στα σημεία της μεσοκαθέτου του τμήματος $K\Lambda$ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.
**β.** Το σημείο το οποίο αρχίζει πρώτο να ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος.
**γ.** Κάθε σημείο της επιφάνειας ταλαντώνεται με πλάτος $A$ για κάποιο χρονικό διάστημα.
**δ.** Δεν υπάρχουν σημεία που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος πριν και μετά τη συμβολή.

**ε.** Η ελάχιστη απόσταση δύο σημείων του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος είναι $\lambda/2$.

**1.124** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες. Από τη συμβολή δύο κυμάτων προκύπτει στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t$$

**α.** Το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου είναι $2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\, x/\lambda$.
**β.** Η φάση ταλάντωσης ενός σημείου είναι $\omega t$ ή $\omega t + \pi$.
**γ.** Τη στιγμή $t = T/2$ όλα τα σημεία έχουν $y = 0$.
**δ.** Τη στιγμή $t = 0$ όλα τα σημεία έχουν θετική ταχύτητα.
**ε.** Τη στιγμή $t = T/4$ όλα τα σημεία έχουν μηδενική ταχύτητα.

**1.125** Από τη συμβολή δύο κυμάτων προκύπτει στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\omega t$$

**α.** Τα σημεία Ο $(x = 0)$ και Κ $(x = \lambda/2)$ έχουν ίδιο πλάτος και ίδια φάση.
**β.** Τα σημεία Ο $(x = 0)$ και Ζ $(x = \lambda)$ έχουν ίδιο πλάτος και ίδια φάση.
**γ.** Η διαφορά φάσης δύο τυχαίων σημείων είναι $\pi$.
**δ.** Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\lambda/2$.
**ε.** Τα σημεία που απέχουν $\lambda/4$ έχουν διαφορά φάσης $\pi/2$.



**1.126** *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.* Έστω στάσιμο κύμα που δημιουργείται από τη συμβολή δύο κυμάτων που διαδίδονται στον άξονα $x'x$.
**α.** Τα δύο κύματα που συμβάλλουν έχουν ίδια συχνότητα, ίδιο πλάτος και διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.
**β.** Έχει πάντα εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\eta\mu\omega t$.
**γ.** Στη θέση $x = 0$ σχηματίζεται πάντα κοιλία
**δ.** Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο δεσμών είναι ίση με $\lambda/2$.
**ε.** Τα σημεία που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο δεσμούς ταλαντώνονται με ίδια φάση.

**1.127** *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.* Κατά μήκος ελαστικής χορδής έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα.
**α.** Όλα τα σημεία της χορδής κάνουν απλή αρμονική ταλάντωση.
**β.** Τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν ίδια φάση.
**γ.** Δύο κοιλίες έχουν ίδια φάση ταλάντωσης
**δ.** Οι κοιλίες έχουν τη μέγιστη συχνότητα ταλάντωσης.
**ε.** Δεν συμβαίνει μεταφορά ενέργειας ένα σημείο στο άλλο.

# ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

**1.128** Σύμφωνα με το νόμο Biot-Savart η ένταση του μαγνητικού πεδίου $d\vec{B}$ σε κάποιο σημείο Α που βρίσκεται σε απόσταση $r$ από κάποιο στοιχειώδες τμήμα μήκους $dl$ ενός ρευματοφόρου αγωγού έχει μέτρο το οποίο:

**α.** Είναι ίδιο σε όλα τα σημεία που βρίσκονται στην ίδια απόσταση r

**β.** Είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης $r$

**γ.** Είναι αντιστρόφως ανάλογο του $r^2$

**δ.** Εξαρτάται από το σχήμα του αγωγού.

**1.129** Στο νόμο Biot-Savart το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου $d\vec{B}$ σε κάποιο σημείο Α που βρίσκεται σε απόσταση $r$ από κάποιο στοιχειώδες τμήμα μήκους $dl$ ενός ρευματοφόρου αγωγού:

**α.** Είναι παράλληλο στο τμήμα μήκους $dl$.

**β.** Βρίσκεται στην ευθεία που συνδέει το τμήμα $dl$ και το σημείο Α.

**γ.** Είναι κάθετο στο επίπεδο που βρίσκονται το τμήμα $dl$ και το σημείο Α.

**δ.** Έχει φορά η οποία δεν επηρεάζεται από την φορά του ρεύματος.

**1.130** Κυκλικός αγωγός έχει μικρό κενό κοντά σε δύο σημεία Κ,Λ. Συνδέουμε τα σημεία Κ,Λ στους πόλους ιδανικής πηγής και έτσι στο κέντρο του κυκλικού αγωγού δημιουργείται μαγνητικό πεδίο έντασης $B$. Σε έναν όμοιο κυκλικό αγωγό χωρίς το μικρό διάκενο συνδέουμε δύο αντιδιαμετρικά του σημεία Α, Γ στους πόλους ίδιας ηλεκτρικής πηγής και τώρα η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού έχει μέτρο $B'$

$\alpha.\ B' = B$ $\quad\quad$ $\beta.\ B' = \frac{B}{2}$ $\quad\quad$ $\gamma.B' = 2B$ $\quad\quad$ $\delta.\ B' = 0$

**1.131** Στο νόμο του Ampere $\sum \vec{B}d\vec{l} = \mu_o \sum I$

**α.** Το άθροισμα $\sum \vec{B}d\vec{l}$ εξαρτάται από το σχήμα της καμπύλης.

**β.** Το $\vec{B}$ είναι το μαγνητικό πεδίο των ρευμάτων που περικλείει η καμπύλη.

**γ.** Το $\vec{B}$ είναι το μαγνητικό πεδίο ανεξάρτητα της αιτίας που το δημιουργεί.

**δ.** Το $\sum \vec{B}d\vec{l}$ είναι διάφορο του μηδενός όταν στην περιοχή υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο ακόμη και όταν η καμπύλη δεν περικλείει ρευματοφόρους αγωγούς.

**1.132** Κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι: $\sum Bdl$=0 . Αυτό συμβαίνει όταν:

**α.** Η διαδρομή βρίσκεται μέσα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

**β.** Η διαδρομή περικλείει δύο αγωγούς που διαρρέονται από αντίθετα ρεύματα

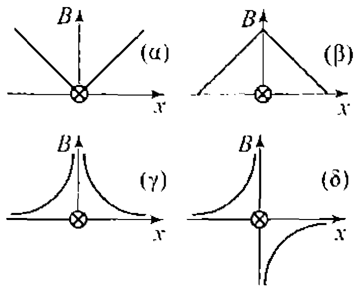
**γ.** Η διαδρομή περικλείει και αγωγό που διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα

**δ.** Η καμπύλη της διαδρομής έχει το κατάλληλο σχήμα

**1.133** Δύο ευθύγραμμοι αγωγοί είναι κατακόρυφοι και διαρρέονται από ρεύματα εντάσεων $I_1 I_2$, όπου $I_1 > I_2$. Μία καμπύλη με το επίπεδο της οριζόντιο περικλείει τους δύο αγωγούς. Η ποσότητα $\sum Bdl$ παίρνει τιμή $\beta$ όταν τα ρεύματα είναι αντίρροπα και τιμή $3\beta$ όταν τα ρεύματα είναι ομόρροπα. Για τις εντάσεις των ρευμάτων ισχύει:

$\alpha.\ I_1 = 2I_2$ $\beta.\ I_1 = I_2$ $\gamma.\ I_1 = 3I_2$ $\delta.\ I_2 = 2I_1$

**1.134** Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός είναι κάθετος στο επίπεδο του σχεδίου $x0y$ και τέμνει το επίπεδο αυτό στο σημείο Ο. Το σωστό διάγραμμα που δείχνει πώς μεταβάλλεται το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος του άξονα $x'x$ είναι στο σχήμα:




**α.** (α) **β.** (β)

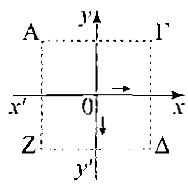
**γ.** (γ) **δ.** (δ)

**1.135** Δύο σημεία Α και Γ βρίσκονται σε απόσταση $d$ από έναν ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό . Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Α είναι αντίθετη της έντασης στο Γ. Η απόσταση των δύο σημείων Α και Γ είναι:

**α.** $d\sqrt{2}$ **β.** $2d$

γ. $d\sqrt{3}$ **δ.** $d$

**1.136** Δύο ευθύγραμμοι αγωγοί συμπίπτουν με τους άξονες $x'x$ , $y'y$ και διαρρέονται από ρεύματα ίδιας έντασης που η φορά φαίνεται στο σχήμα. Το σημείο Ο είναι το κέντρο τετραγώνου ΑΓΔΖ. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν.




**α.** Στα σημεία Γ και Δ **β.** Στα σημεία Γ και Ζ

**γ.** Στα σημεία Α και Δ **δ.** Στα σημεία Α και Ζ

**1.137** Ένας κυκλικός αγωγός ακτίνας $r$ διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I$. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του είναι $B_1$. Ένας άλλος κυκλικός αγωγός ακτίνας $r/2$ διαρρέεται από ρεύμα έντασης $2I$. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του είναι $B_2$. Η σχέση που συνδέει τα μέτρα των εντάσεων είναι:

**α.** $B_2 = 4B_1$ **β.** $B_2 = 2B_1$

γ. $B_2 = B_1$ **δ.** $B_2 = B_1/4$

**1.138** Συρμάτινος κυκλικός αγωγός συνδέεται στους πόλους ηλεκτρικής πηγής και στο κέντρο του η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει μέτρο $B$. Αποσυνδέουμε την πηγή και μετασχηματίζουμε τον κυκλικό αγωγό σε κυκλικό πλαίσιο 2 σπειρών το οποίο ξανασυνδέουμε στους πόλους της ίδιας πηγής. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο έχει μέτρο $B'$ για το οποίο ισχύει:

**α.** $B' = B$ **β.** $B' = 2B$ **γ.** $B' = 4B$ **δ.** $B' = B/2$

**1.139** Δίδεται ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων $x'x\,, y'y$. Στην περιοχή του επιπέδου με $x > 0$ υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο. Φορτισμένο σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα στο επίπεδο $xy$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που φτάνει στο Ο η ταχύτητα του σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα $y'y$. Η γωνία φ επηρεάζει:

**α.** Το μέτρο της δύναμης Lorentz που δέχεται το σωματίδιο.

**β.** Την ακτίνα της κυκλικής κίνησης του σωματιδίου.

**γ.** Το διάστημα που διανύει το σωματίδιο μέσα στο μαγνητικό πεδίο

**δ.** Την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου

**1.140** Φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό. Αν η μόνη δύναμη που δέχεται το σωματίδιο είναι η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο τότε οι ποσότητες που μένουν αναλλοίωτες κατά την κίνηση του σωματιδίου είναι:

**α.** Η ορμή του σωματιδίου.

**β.** Η επιτάχυνση του σωματιδίου.

**γ.** Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου

**δ.** Η απόσταση του σωματιδίου από το σημείο εισόδου.

**1.141** Φορτισμένο σωματίδιο Σ1 με κινητική ενέργεια $K$ , εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας $R$. Ένα όμοιο σωματίδιο που εισέρχεται στο ίδιο μαγνητικό πεδίο με κινητική ενέργεια $4K$ θα διαγράψει κυκλική τροχιά ακτίνας:

**α.** $R/4$ **β.** $4R$ **γ.** $2R$ **δ.** $R/4$

**1.142** Ένα σωληνοειδές πηνίο διαρρέεται από συνεχές σταθερό ρεύμα. Φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στο εσωτερικό του παράλληλα προς τον άξονα του σωληνοειδούς. Η κίνηση που θα εκτελέσει το σωματίδιο αν δεν δέχεται άλλες δυνάμεις είναι:

**α.** Ευθύγραμμη ομαλή **β.** Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη

**γ.** Ομαλή κυκλική **δ.** Ελικοειδής κίνηση.

**1.143** Ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο $q, m$ κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Ο χρόνος στον οποίο το σωματίδιο εκτελεί μία πλήρη περιστροφή είναι ανάλογο:

**α.** της ταχύτητας του.
**β.** της έντασης του μαγνητικού πεδίου
**γ.** του λόγου $m/q$
**δ.** του λόγου $q/m$

**1.144** Η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι ελικοειδής. Αν διπλασιάσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου

**α.** Το βήμα της έλικας θα διπλασιαστεί.
**β.** Η περίοδος θα διπλασιαστεί.
**γ.** Το διάστημα σε χρόνο μιας περιόδου θα υποδιπλασιαστεί.
**δ.** Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου θα τετραπλασιαστεί

**1.145** Φορτισμένο σωματίδιο μάζας $m$ και φορτίου $q$ εισέρχεται με ταχύτητα υ σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β. Το είδος της τροχιάς που θα διαγράψει το σωματίδιο εξαρτάται από:

**α.** Το μέτρο της ταχύτητας.
**β.** Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου.
**γ.** Την γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.
**δ.** Το πρόσημο του φορτίου q.



**1.146** Ένα πρωτόνιο p$(q, m)$ και ένα σωματίδιο άλφα α$(2q, 4m)$ εισέρχονται στο ίδιο σημείο ομογενούς μαγνητικού πεδίου με την ίδια ταχύτητα και διαγράφουν ημικυκλικές τροχιές με ακτίνες $R_p = R$ και $R_a$. Η απόσταση $d$ των σημείων εξόδου είναι:

**α.** $d = 0$ **β.** $d = R$ **γ.** $d = 2R$ **δ.** $d = 4R$

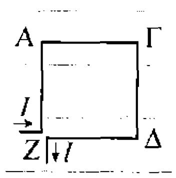
**1.147** Σε μία περιοχή συνυπάρχουν ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$ και ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στην περιοχή με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κάθετη στις δυναμικές γραμμές των δύο πεδίων. Για να κινηθεί ευθύγραμμα το σωματίδιο πρέπει να έχει ταχύτητα:

$\alpha.\ \upsilon = 0$ $\beta.\ \upsilon = \frac{B}{E}$ $\gamma.\ \upsilon = \frac{E}{B}$ $\delta.\ \upsilon = \sqrt{2}\frac{E}{B}$

**1.148** Ευθύγραμμος αγωγός μήκους $l$ που διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I$ βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β και δέχεται δύναμη Laplace. Σε ποια περίπτωση δεν θα μεταβληθεί η δύναμη Laplace που δέχεται ο αγωγός.

**α.** Αν αλλάξουμε τη φορά των δυναμικών γραμμών.
**β.** Αν αλλάξουμε τη φορά του ρεύματος.
**γ.** Αν στρέψουμε τον αγωγό κατά $90^o$ ώστε να γίνει παράλληλος στις Δ.Γ.
**δ.** Αν αντιστρέψουμε τη φορά και του ρεύματος και των δυναμικών γραμμών.

**1.149** Σε ένα ομογενές οριζόντιο μαγνητικό πεδίο έντασης Β, βρίσκεται ένα οριζόντιο τετράγωνο μεταλλικό πλαίσιο, πλευράς $\ell$, το οποίο διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης $I$, όπως στο σχήμα, Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλες στην πλευρά ΑΓ. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται από το μαγνητικό πεδίο στο πλαίσιο έχει μέτρο:



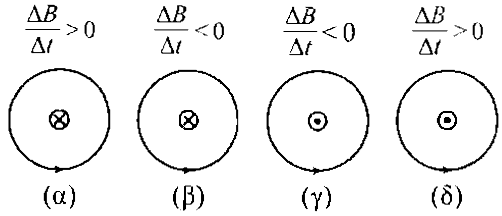

$\alpha.\ F = 0$ $\beta.\ F = BI\ell,$
$\gamma.\ F = 2BI\ell,$ $\delta. F = 4BI\ell.$

**1.150** Ένα τετράγωνο σύρμα ΑΓΔΖ πλευράς α διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα $i$ και βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες σε δύο πλευρές του τετραγώνου.
**α.** Η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο $4Bi\alpha$.
**β.** Η συνισταμένη ροπή είναι μηδέν.
**γ.** Η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο $2Bil$.
**δ.** Η συνισταμένη ροπή έχει μέτριο $Bi\alpha^2$.

**1.151** Τετράγωνο σύρμα πλευράς α είναι τοποθετημένο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έτσι ώστε η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του σύρματος να είναι μέγιστη. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι αντίθετη της αρχική ροής:
**α.** Αν στρέψουμε το επίπεδο του πλαισίου κατά γωνία $90^o$
**β.** Αν απομακρύνουμε το πλαίσιο από το μαγνητικό πεδίο
**γ.** Αν διπλασιάσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου
**δ.** Αν αντιστρέψουμε τη φορά των δυναμικών γραμμών

**1.152** Για να δημιουργηθεί επαγωγικό ρεύμα σ' ένα πηνίο, πρέπει:
**α.** από τις σπείρες του πηνίου να διέρχεται μαγνητική ροή.
**β.** να μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πηνίο.
**γ.** το πηνίο να αποτελεί τμήμα κλειστού κυκλώματος.
**δ.** το κύκλωμα του πηνίου να είναι κλειστό και να μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από τις σπείρες του.

**1.153** Οι τέσσερις δακτύλιοι από αγώγιμο υλικό βρίσκονται σε μαγνητικά πεδία.
Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει κάθε δακτύλιο έχει σχεδιαστεί σωστά




**α.** Στα σχήματα (α) και (δ)    **β.** Στα σχήματα (β) και (γ)

**γ.** Στα σχήματα (α) και (γ)    **δ.** Στα σχήματα (β) και (δ)

**1.154** Ομογενής αγωγός ΑΓ είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου και περιστρέφεται γύρω από άξονα που συμπίπτει με μία δυναμική γραμμή και διέρχεται από το κέντρο μάζας Ο του αγωγού. Η τάση στα άκρα του αγωγού κάποια τυχαία στιγμή είναι:

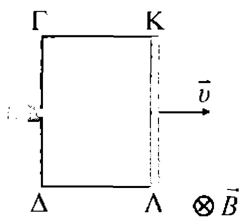
$\alpha.\ V_{A\Gamma} = B\omega\frac{l}{2}$    $\beta.\ V_{A\Gamma} = 0$    $\gamma.\ V_{A\Gamma} = B\upsilon_A l$    $\delta.\ V_{A\Gamma} = 2V_{AO}$

**1.155** Μαγνήτης εισέρχεται μέσα σε σωληνοειδές, κινούμενος παράλληλα στον άξονα του σωληνοειδούς σε χρόνο $\Delta t_1$, οπότε επάγεται στο σωληνοειδές ΗΕ Δ $\mathcal{E}_1$ και φορτίο $q_1$. Αν ο μαγνήτης εισέλθει στο σωληνοειδές σε χρόνο $\Delta t_2 = \Delta t_1/2$, τότε για την ΗΕΔ $\mathcal{E}_2$ και το φορτίο $q_2$ θα είναι:

**α.** $\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}_2$ και $q_1 = q_2$    **β.** $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_1$ και $q_1 = q_2$

**γ.** $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_1$ και $q_2 = 2q_1$    **δ.** $\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}_2$ και $q_1 = 2q_2$

**1.156** Η μεταλλική ράβδος του σχήματος κάνει επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με σταθερή ταχύτητα, $\upsilon$. Στα άκρα Κ και Λ της ράβδου είναι συνδεδεμένος λαμπτήρας μέσω αγώγιμων συρμάτων που κινείται μαζί με τη ράβδο. Καθώς η ράβδος κινείται, ο λαμπτήρας:

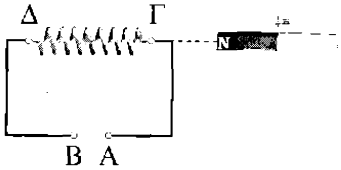



**α.** Διαρρέεται από συνεχές σταθερό ρεύμα και φωτοβολεί.
**β.** Διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.
**γ.** Δεν φωτοβολεί διότι δεν αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ στον αγωγό ΚΛ
**δ.** Δεν φωτοβολεί διότι δεν διαρρέεται από ρεύμα αφού δεν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή στο κύκλωμα

**1.157** Σε κύκλωμα με κινούμενο αγωγό ΚΛ μήκους $l$ που η ταχύτητα είναι κάθετη στον αγωγό και κάθετη στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου.
**α.** Δεν μπορεί να διατηρείται η μηχανική ενέργεια του αγωγού

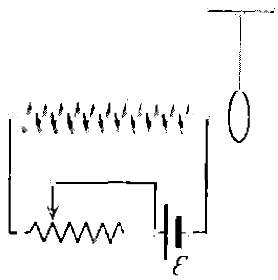
**β**. Η τάση στα άκρα του αγωγού είναι πάντα ίση με $Bvl$
**γ.** Ο αγωγός δέχεται πάντα δύναμη Laplace αντίρροπη της ταχύτητας
**δ.** Η τάση στα άκρα του αγωγού μπορεί να είναι εναλλασσόμενη.

**1.158** Όταν ο μαγνήτης κινείται προς το ακίνητο πηνίο:




**α.** Στο Γ του εμφανίζεται βόρειος μαγνητικός πόλος.
**β.** Στο Γ εμφανίζεται νότιος μαγνητικός πόλος.
**γ.** Στα άκρα Α, Β εμφανίζεται τάση από επαγωγή με το (+) στο Α.
**δ.** Στα άκρα Α, Β εμφανίζεται τάση από επαγωγή με το (+) στο Β.

**1.159** Ο δακτύλιος του σχήματος είναι κρεμασμένος με μονωτικό νήμα. Με τη βοήθεια της μεταβλητής αντίστασης μπορούμε να αυξομειώνουμε την ένταση του ρεύματος στο σωληνοειδές πηνίο. Ο δακτύλιος:




**α**. Θα παραμείνει ακίνητος αν διακόψουμε το ρεύμα
**β.** Θα απομακρυνθεί από το πηνίο αν αυξήσουμε την ένταση του ρεύματος
**γ**. Θα απομακρυνθεί από το πηνίο αν μειώσουμε την ένταση του ρεύματος
**δ**. Θα πλησιάσει προς το πηνίο αν αυξήσουμε την ένταση του ρεύματος

**1.160** Η τάση που δημιουργείται στα άκρα ενός πλαισίου αντίστασης $R$ είναι της μορφής $v = V\eta\mu\omega t$ . Αν στα άκρα του πλαισίου συνδέσουμε συσκευή αντίστασης $R$ η μέγιστη τιμή $V$ της τάσης στα άκρα του πλαισίου είναι:

**α.** $V' = N\omega BA$ **β.** $V' = N\omega BA/2$
**γ.** $V' = 0$ **δ**. $V' = N\omega BA/\sqrt{2}$

**1.161** Αγωγός διαρρέεται από Ε.Ρ $= I\eta\mu\omega t.$ Σε σειρά με τον αγωγό συνδέεται θερμικό αμπερόμετρο. Σε χρόνο μιας περιόδου η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι μεγαλύτερη από την ενεργό ένταση για χρονικό διάστημα $\Delta t$

$\alpha.\ \Delta t = \frac{T}{4}$ $\beta.\ \Delta t = \frac{T}{2}$ $\gamma.\ \Delta t = \frac{2T}{3}$ $\delta. \Delta t = 0$

**1.162** Ο τύπος $p = vi$ για τη στιγμιαία ισχύ ισχύει:
**α.** Μόνο αν η συσκευή είναι θερμική.
**β.** Μόνο αν η συσκευή διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.
**γ.** Μόνο αν η συσκευή διαρρέεται από συνεχές ρεύμα.
**δ.** Για κάθε συσκευή που διαρρέεται από ρεύμα.

**1.163** Ένας λαμπτήρας διαρρέεται από Ε.Ρ. της μορφής $i = 5\sqrt{2}\eta\mu 100\pi t$. Σε σειρά με τον λαμπτήρα συνδέεται ένα θερμικό αμπερόμετρο. Σε $1s$

**α.** Η ένδειξη του αμπερομέτρου γίνεται μέγιστη 100 φορές.
**β.** Η φωτοβολία του λαμπτήρα γίνεται μέγιστη 50 φορές.
**γ.** Η μέγιστη ένδειξη του αμπερομέτρου είναι $5\sqrt{2}\,A$.
**δ.** Η ισχύς του λαμπτήρα μεταβάλλεται περιοδικά με περίοδο $10ms$.

**1.164** Σε ένα περιστρεφόμενο πλαίσιο αντίστασης $R$ αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ της μορφής $\varepsilon = 200\sqrt{2}\eta\mu\omega t$. Αν στα άκρα του πλαισίου συνδέσουμε αντίσταση $3R$ τότε η ενεργός τάση στα άκρα του πλαισίου είναι :

α. $200V$ β. $50\sqrt{2}V$ γ. $150V$ δ. $50V$

**1.165** Βολτόμετρα και αμπερόμετρα εναλλασσόμενου ρεύματος μετρούν
**α.** μέσες τιμές τάσης - ρεύματος.
**β.** μέγιστες τιμές τάσης - ρεύματος.
**γ.** στιγμιαίες τιμές τάσης - ρεύματος.
**δ.** ενεργές τιμές τάσης - ρεύματος.

**1.166** Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται σε ένα πηνίο είναι:
**α.** Ανάλογη του αριθμού των σπειρών του πηνίου.
**β.** Ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.
γ. Ανάλογη της αντίστασης του πηνίου.
**δ.** Ανάλογη της ειδικής αντίστασης του σύρματος του πηνίου.

**1.167** Ηλεκτρική πηγή $(\mathcal{E}, r)$, αντίσταση R, ιδανικό πηνίο και διακόπτης συνδέονται σε σειρά και αρχικά ο διακόπτης είναι ανοικτός. Όταν κλείσουμε το διακόπτη
**α.** Η ένταση του ρεύματος αυξάνει με σταθερό ρυθμό.
**β.** Στο πηνίο αναπτύσσεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που έχει σταθερή τιμή.
**γ.** Η τάση στα άκρα του πηνίου αυξάνει αρχίζοντας από την τιμή μηδέν.
**δ.** Η τάση στα άκρα της αντίστασης αυξάνει αρχίζοντας από την τιμή μηδέν και τελικά αποκτά σταθερή τιμή ίση με $\mathcal{E}$.

**1.168** Ηλεκτρική πηγή $(\mathcal{E}, r)$, αντίσταση R, ιδανικό πηνίο και διακόπτης συνδέονται σε σειρά και αρχικά ο διακόπτης είναι ανοικτός. Όταν κλείσουμε το διακόπτη.
**α.** Ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο πηνίο είναι σταθερός.
**β.** Ο ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα της R αυξάνει και τελικά αποκτά σταθερή τιμή.
**γ.** Ο ρυθμός διέλευσης φορτίου από μία διατομή αυξάνει και αποκτά σταθερή τιμή.

**δ**. Ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας στην $R$ μειώνεται και τελικά μηδενίζεται.

*Ερωτήσεις Σωστού- Λάθους*

**1.169** Το μαγνητικό πεδίο:
**α.** Περιγράφεται με δυναμικές γραμμές που δεν έχουν αρχή και τέλος.
**β.** Ασκεί δύναμη σε κάθε φορτισμένο σωματίδιο.
**γ.** Ασκεί δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό που τέμνει τις δυναμικές γραμμές.
**δ.** Είναι ομογενές στην κεντρική περιοχή ενός ρευματοφόρου σωληνοειδούς πηνίου.
**ε.** Δεν μπορεί να επιταχύνει ένα φορτισμένο σωματίδιο

**1.170** Η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν:
**α.** Στο κέντρο ενός κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού.
**β.** Στα σημεία κάποιας ευθείας που βρίσκεται στο επίπεδο δύο παράλληλων αγωγών που διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα ίδιας έντασης.
**γ.** Στα σημεία ευθείας που βρίσκεται στο επίπεδο των δύο αγωγών και ισαπέχει από δύο παράλληλους αγωγούς που διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα ίδιας έντασης.
**δ.** Στα άκρα ενός σωληνοειδούς πηνίου.
**ε.** Στο κέντρο ομογενούς κυκλικού αγωγού του οποίου δύο τυχαία σημεία συνδέονται στους πόλους ηλεκτρικής πηγής.

**1.171** Με σύρμα μήκους $d$ κατασκευάζουμε πηνίο Π με $N$ σπείρες που έχουν διάμετρο Δ και συνδέουμε τα άκρα του στους πόλους ιδανικής πηγής η οποία διαρρέεται από ρεύμα $I$. Κόβουμε στη μέση το πηνίο και συνδέουμε τα δύο πηνία Π1 , Π2 στους πόλους της ίδιας ιδανικής πηγής η πηγή διαρρέεται από ρεύμα $I'$.
**α.** Ο αριθμός των σπειρών είναι $N = d/\Delta$
**β.** Όλα τα πηνία έχουν ίδιο αριθμό σπειρών ανά μονάδα μήκους.
**γ.** Για τις εντάσεις $I$ και $I'$ ισχύει: $I' = I$
**δ.** Για τα μέτρα των εντάσεων $B$ , $B_1$ και $B_2$ στο εσωτερικό των πηνίων είναι: $B = B_1 = B_2$
**ε.** Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στα άκρα των πηνίων Π1 , Π2 έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της έντασης στο κέντρο του πηνίου Π

**1.172** Στο νόμο του Ampere $\sum \vec{B} d\vec{l} = \mu_o \sum I$ :
**α.** Το άθροισμα $\sum \vec{B} d\vec{l}$ εξαρτάται από το μήκος της καμπύλης.
**β.** Πρέπει τα ρεύματα να είναι σταθερά ρεύματα.
**γ.** Η καμπύλη στην οποία κινούμαστε να είναι επίπεδη.
**δ.** Το $\vec{B}$ είναι το μαγνητικό πεδίο ανεξάρτητα της αιτίας που το δημιουργεί.
**ε.** Το $\vec{B}$ οφείλεται στα ρεύματα που περικλείει η καμπύλη.

**1.173** Σε μία περιοχή συνυπάρχουν ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν ένα πρωτόνιο που εισέρχεται στην περιοχή με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κάθετη στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και κινείται ευθύγραμμα τότε μπορεί να κινείται ευθύγραμμα:
**α.** Κάθε φορτισμένο σωματίδιο που εισέρχεται στην περιοχή.
**β.** Κάθε φορτισμένο σωματίδιο που έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon = E/B$
**γ.** Ένα ηλεκτρόνιο που εισέρχεται στην περιοχή με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$
**δ.** Ένα σωματίδιο που εισέρχεται στην περιοχή με ταχύτητα $-\vec{\upsilon}$
**ε.** Κάθε σωματίδιο που έχει ειδικό φορτίο $(q/m)$ ίσο με αυτό του πρωτονίου

**1.174** Σωματίδιο που εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο:
**α.** Δεν αποκτά επιτάχυνση.
**β.** Δεν μεταβάλλεται η ορμή του.
**γ.** Δεν μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια.
**δ.** Κάνει πάντα κυκλική τροχιά.
**ε.** Δεν επιστρέφει πάντα στο σημείο εισόδου.

**1.175** Ένας αγωγός ΚΛ βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Επαγωγική τάση στα άκρα του Κ και Λ εμφανίζεται:
**α.** Όταν περιστρέφεται γύρω από άξονα παράλληλο στις δυναμικές γραμμές που διέρχεται από το ένα άκρο του και είναι κάθετος στον αγωγό.
**β.** Όταν ο αγωγός ΚΛ κινείται μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο.
**γ.** Όταν ο αγωγός κινείται έτσι ώστε να τέμνει τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.
**δ.** Όταν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του δέχονται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο.
**ε.** Όταν συνδέεται με αντιστάτη ώστε να σχηματίζεται κλειστό κύκλωμα.

**1.176** Η δύναμη Laplace που δέχεται ένας ρευματοφόρος αγωγός από ομογενές μαγνητικό πεδίο:
**α.** Έχει σημείο εφαρμογής το μέσον του αγωγού αν ο αγωγός βρίσκεται ολόκληρος μέσα στο μαγνητικό πεδίο.
**β.** Γίνεται μέγιστη όταν ο αγωγός είναι παράλληλος στις δυναμικές γραμμές.
**γ.** δεν αλλάζει κατεύθυνση αν αντιστρέψουμε τη φορά της έντασης του ρεύματος και τη φορά των Δ.Γ.
**δ.** Είναι διάνυσμα κάθετο στον αγωγό και στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.
**ε.** Είναι μηδέν όταν ο αγωγός διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα

**1.177** Δύο παράλληλοι ρευματοφόροι μεγάλου μήκους:
**α.** Έλκονται αν διαρρέονται από ρεύματα ίδιας φοράς.
**β.** Απωθούνται όταν διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα.

**γ.** Απωθούνται αν συνδέονται παράλληλα και στα άκρα τους εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση.
**δ.** Αν διαρρέονται από ίδια ρεύματα, βρίσκονται σε απόσταση $1m$ και η δύναμη που δέχεται ο ένας από τον άλλο ανά μέτρο μήκους έχει τιμή ίση με 1N τότε είναι ο κάθε αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης $1A$.
**ε.** Αν δύο αγωγοί διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα έντασης $I$ και ένας τρίτος αγωγός παράλληλος στους δύο αγωγούς που βρίσκεται στο επίπεδο τους ,ισαπέχει από τους δύο άλλους και διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I/2$ αντίρροπο του $I$ τότε και οι τρείς αγωγοί ισορροπούν

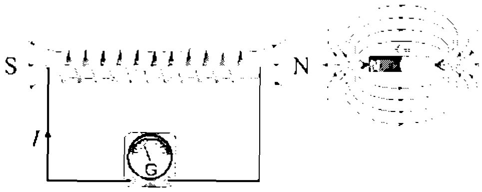
**1.178** Ποιες από τις προτάσεις είναι Σωστές και ποιες είναι Λάθος.
**α.** Στο μέσον της απόστασης δύο ευθύγραμμων αγωγών που διαρρέονται από ίσα ρεύματα ίδιας φοράς η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν
**β.** Αν κόψουμε ένα πηνίο ώστε να σχηματιστούν δύο πηνία τότε ο αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους είναι ίδιος και για τα δύο πηνία
**γ.** Σε ένα σωληνοειδές πηνίο με N σπείρες για να έχει η ένταση του μαγνητικού πεδίου μέγιστη τιμή πρέπει να συμπυκνώσουμε τις σπείρες του έτσι ώστε το μήκος του πηνίου να γίνει $l = N\delta$ όπου δ είναι η διάμετρος του σύρματος.
**δ.** Το μήκος $d$ του σύρματος ενός πηνίου , η διάμετρος των σπειρών του $\Delta$ και ο αριθμός των σπειρών του συνδέονται με τη σχέση: $d = N\pi\Delta$
**ε.** Η αντίσταση ενός πηνίου μήκους $l$ που είναι κατασκευασμένο από σύρμα ακτίνας $\alpha$ είναι ίση με: $R = \rho\, l/\pi\alpha^2$

**1.179** Η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάποια επίπεδη επιφάνεια που βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο
**α.** Είναι μέγεθος μονόμετρο και έχει μονάδα μέτρησης το $1V \cdot s$
**β.** Δεν μεταβάλλεται αν αντιστρέψουμε τη φορά των δυναμικών γραμμών
**γ.** Δείχνει πόσο πυκνές είναι οι δυναμικές γραμμές που διαπερνούν την επιφάνεια
**δ.** Δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας.
**ε.** Δείχνει το πλήθος των δυναμικών γραμμών που διασχίζουν μια επιφάνεια.

**1.180** Ποιες από τις προτάσεις είναι Σωστές και ποιες είναι Λάθος.
**α.** Σε ένα ακίνητο πλαίσιο δεν μπορεί να εκδηλωθεί φαινόμενο επαγωγής
**β.** Η μαγνητική ροή είναι μέγεθος διανυσματικό.
**γ.** Αν αφήσουμε ελεύθερο ένα μικρό μαγνήτη να κινηθεί χωρίς τριβές στο εσωτερικό ενός κοίλου κατακόρυφου χαλκοσωλήνα τότε ο σωλήνας θερμαίνεται.
**δ.** Όταν από ένα κύκλωμα διέρχεται μαγνητική ροή έχουμε φαινόμενο επαγωγής.

**ε.** Όταν το επίπεδο ενός πλαισίου που βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο στραφεί κατά $180^o$ και η μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι μηδέν σημαίνει ότι το πλαίσιο ήταν αρχικά παράλληλο στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου.

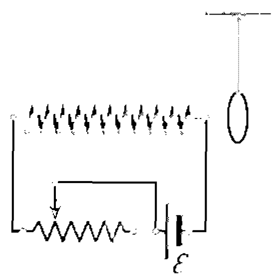
**1.181** Ραβδόμορφος μαγνήτης κινείται για χρόνο $\Delta t$ έτσι ώστε ο βόρειος πόλος του να εισέρχεται στο σωληνοειδές που αποτελεί τμήμα κλειστού κυκλώματος τότε:




**α.** Πρέπει να δαπανάμε ενέργεια για την κίνηση του μαγνήτη.
**β.** Δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ αν ο μαγνήτης κινείται με σταθερή ταχύτητα.
**γ.** Το επαγωγικό φορτίο είναι ανάλογο του χρόνου $\Delta t$
**δ.** Το πηνίο συμπεριφέρεται ως μαγνήτης με βόρειο πόλο το άκρο στο οποίο εισέρχεται ο μαγνήτης.
**ε.** Το πηνίο συμπεριφέρεται ως ηλεκτρική πηγή.

**1.182** Αγωγός μήκους $l$ κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα $\upsilon$ που είναι κάθετη στον αγωγό και το επίπεδο κίνησης είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B$ . Ποιες από τις επόμενες ερωτήσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.
**α.** Η τάση στα άκρα του αγωγού είναι πάντα ίση με $B\upsilon l$.
**β.** Η επαγωγική ΗΕΔ είναι ίση με $B\upsilon l$.
**γ.** Ο αγωγός δέχεται δύναμη Laplace αν το κύκλωμα είναι κλειστό.
**δ.** Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού δέχονται δύναμη Lorentz
**ε.** Η δύναμη Laplace που δέχεται ο αγωγός ΚΛ είναι ομόρροπη της ταχύτητας όταν ο αγωγός επιβραδύνεται.

**1.183** Μεταλλικός δακτύλιος βρίσκεται κρεμασμένος έτσι ώστε να είναι κοντά στο ένα άκρο σωληνοειδούς με το επίπεδο του παράλληλο στις σπείρες του. Αν κλείσουμε το διακόπτη στο κύκλωμα του σωληνοειδούς.




**α.** Ο δακτύλιος θα απομακρυνθεί από το πηνίο.
**β.** Ο δακτύλιος θα πλησιάσει προς το πηνίο
**γ.** Ο δακτύλιος θα παραμείνει ακίνητος αν έχει μικρό διάκενο διότι τότε δεν θα εμφανιστεί επαγωγική ΗΕΔ
**δ.** Ο δακτύλιος θα ισορροπήσει ξανά στην αρχική του θέση μετά από λίγο.
**ε.** Αν το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι εναλλασσόμενο τότε ο δακτύλιος θα κάνει περιοδική κίνηση.

37

**1.184** Σε ένα κύκλωμα Ε.Ρ. με αντιστάτη $R$ είναι $v, i$ η τάση στα άκρα του αντιστάτη και η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει. Αν $v = V\eta\mu\omega t$

**α.** Τα μεγέθη $v, i$ έχουν ίδια φάση.

**β.** Δεν ισχύει ο νόμος του Ohm για το εναλλασσόμενο ρεύμα.

**γ.** Η φάση της έντασης παίρνει τιμές από 0 έως $2\pi$

**δ.** Η θερμότητα joule σε χρόνο μιας περιόδου είναι μηδέν.

**ε.** Ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με συχνότητα διπλάσια από την συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.

**1.185** Σε ένα κύκλωμα Ε.Ρ. με αντιστάτη $R$ είναι $v, i$ η τάση στα άκρα του αντιστάτη και η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει. Αν $v = V\eta\mu\omega t$:

**α.** Η θερμότητα που αναπτύσσεται σε χρόνο $2T$ είναι ίση με $I^2RT$

**β.** Ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας στον αντιστάτη είναι σταθερός.

**γ.** Για τη μέση ισχύ P και τη μέγιστη στιγμιαία ισχύς $p_{max}$ ισχύει: $P = p_{max}/2$

**δ.** Η μέτρηση της έντασης του ρεύματος με θερμικό αμπερόμετρο είναι $I/2$

**ε.** Τα μεγέθη $v, i$ παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\pi/2$

**1.186** Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.

**α.** Μια συσκευή με στοιχεία "$P_\kappa, V_\kappa$" λειτουργεί κανονικά σε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος όταν $I_{\varepsilon\nu} = P_\kappa/V_\kappa$. 

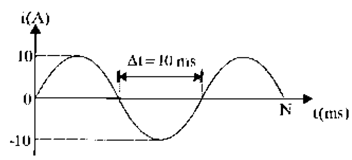
**β.** Αν περιστρέφουμε ένα πλαίσιο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα παράλληλο στις Δ.Γ ομογενούς μαγνητικού πεδίου ο οποίος διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του τότε στα άκρα αναπτύσσεται ημιτονοειδής εναλλασσόμενη τάση.

**γ.** Αν το μέσον ενός αγωγού είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου και κάνει ΑΑΤ χωρίς αρχική φάση σε κατακόρυφο επίπεδο που είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου, στα άκρα του αναπτύσσεται εναλλασσόμενη τάση της μορφής $v = V\eta\mu\omega t$

**δ.** Η τάση στα άκρα περιστρεφόμενου πλαισίου είναι $v \leq N\omega BA$

**ε.** Αν ένα αμπερόμετρο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα $i = I\eta\mu\omega t$ τότε σε χρόνο $T/4$ το φορτίο που περνά από το αμπερόμετρο είναι $q = I_{\varepsilon\nu}\, T/4$ .

**1.187** Για το εναλλασσόμενο ρεύμα του σχήματος που διαρρέει ένα αντιστάτη $20\Omega$ :




**α.** Η ενεργός ένταση είναι $10A$.

**β.** Η συχνότητα είναι $50Hz$

**γ.** Η μέση ισχύς είναι $1000W$

**δ.** Η μέγιστη ισχύς είναι $1000W$

**ε.** Τη χρονική στιγμή $t = 2{,}5ms$ η στιγμιαία ισχύς είναι ίση με την μέση ισχύ.

**1.188** Το φαινόμενο αυτεπαγωγής το παρατηρούμε σε ένα πηνίο :
**α.** Όταν το πηνίο διαρρέεται από συνεχές σταθερό ρεύμα.
**β.** Όταν το πηνίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.
**γ.** Όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πηνίο.
**δ.** Όταν μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα του πηνίου
**ε.** Όταν στο πηνίο εκδηλώνεται το φαινόμενο joule

**1.189** Ο συντελεστής αυτεπαγωγής ενός πηνίου εξαρτάται:
**α.** Από το υλικό του σύρματος κατασκευής του πηνίου.
**β.** Από τον αριθμό σπειρών του πηνίου.
**γ.** Από τα γεωμετρικά στοιχεία του πηνίου.
**δ.** Από το υλικό που υπάρχει στο εσωτερικό του πηνίου.
**ε.** Από την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

**1.190** Ηλεκτρική πηγή $(\mathcal{E}, r)$, αντίσταση R, ιδανικό πηνίο και διακόπτης συνδέονται σε σειρά και αρχικά ο διακόπτης είναι ανοικτός. Όταν κλείσουμε το διακόπτη.
**α.** Η ένταση $i$ του ρεύματος αποκτά ακαριαία μια τελική τιμή ίση με $\mathcal{E}/(R + r)$.
**β.** Η ένταση $i$ του ρεύματος στο κύκλωμα αυξάνει αρχίζοντας από την τιμή μηδέν.
**γ.** Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι ίση με την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή $\mathcal{E}_{αυτ}$.
**δ.** Η $\mathcal{E}_{αυτ}$ στο πηνίο έχει πολικότητα αντίθετη από την πολικότητα της πηγής $\mathcal{E}$ έτσι ώστε να αντιστέκεται στην αύξηση του ρεύματος.
**ε.** Ο ρυθμός αύξησης της έντασης του ρεύματος είναι σταθερός.

**1.191** Ηλεκτρική πηγή $(\mathcal{E}, r)$, αντίσταση R, ιδανικό πηνίο και διακόπτης συνδέονται σε σειρά και αρχικά ο διακόπτης είναι ανοικτός. Όταν κλείσουμε το διακόπτη.
**α.** Η ενέργεια του πηνίου αυξάνει και μετά από λίγο χρόνο σταθεροποιείται.
**β.** Η τάση στα άκρα του πηνίου μειώνεται αρχίζοντας από την τιμή $\mathcal{E}$.
**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος μειώνεται και μετά από μικρό χρονικό διάστημα μηδενίζεται.
**δ.** Η ενέργεια που προσφέρει η πηγή γίνεται θερμότητα στις αντιστάσεις.
**ε.** Ο δεύτερος κανόνας Kirchhoff γράφεται: $\mathcal{E} = iR + L|di|/dt$

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

*Ερωτήσεις Πολλαπλής επιλογής (Μία σωστή απάντηση)*

**1.192** Κοντά σε ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο δημιουργείται ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο για τα οποία ισχύει:
**α.** Είναι χρονικά σταθερά.
**β.** Δημιουργούνται από το ρεύμα που διαρρέει το δίπολο
**γ.** Παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\pi/2$
**δ.** Συνδέονται με τη σχέση $E = Bc^2$.

**1.193** Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό και ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Τα δύο πεδία έχουν:
**α.** Διαφορετική συχνότητα
**β.** Ίδια φάση σε μεγάλες αποστάσεις
**γ.** Διαφορετική ταχύτητα διάδοσης
**γ.** Διαφορετικό μήκος κύματος

**1.194** Σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.
**α.** Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό κύμα έχουν διαφορετική συχνότητα.
**β.** Τα διανύσματα των εντάσεων $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι στο ίδιο επίπεδο.
**γ.** Η ταχύτητα διάδοσης είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός.
**δ.** Τα μέτρα $E, B$ είναι αντιστρόφως ανάλογα.



**1.195** Το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος περιγράφεται από την εξίσωση.

$$E = 60 \cdot \eta\mu 2\pi(12 \cdot 10^{10}t - 4 \cdot 10^2 x) \quad (SI)$$

Η σχέση που περιγράφει το μαγνητικό πεδίο είναι:
**α.** $B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \eta\mu 2\pi\,(12 \cdot 10^{10}t - 4 \cdot 10^2 x) \quad (SI)$
β. $B = 4 \cdot 10^{-7} \cdot \eta\mu 2\pi\,(12 \cdot 10^{10}t - 4 \cdot 10^2 x) \quad (SI)$
γ. $B = 3 \cdot 10^{-8} \cdot \eta\mu 2\pi\,(12 \cdot 10^{10}t - 4 \cdot 10^2 x) \quad (SI)$
**δ.** $B = 4 \cdot 10^{-8} \cdot \eta\mu 2\pi\,(12 \cdot 10^{10}t - 4 \cdot 10^2 x) \quad (SI)$

**1.196** Ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται:
**α.** Μόνο από παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο
**β**. Μόνο κατά την αποδιέγερση ατόμων-πυρήνων
**γ.** Μόνο από επιταχυνόμενα φορτία.
**ε.** Με όλους τους τρόπους που αναφέρονται στις προηγούμενες προτάσεις.

**1.197** Οι ακτίνες $X$
**α.** Διαδίδονται πιο αργά στο κενό από τις ακτίνες $\gamma$.
**β.** Παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα.

**γ.** Χρησιμοποιούνται στις ακτινογραφίες και στην μελέτη των κρυσταλλικών δομών.
**δ.** Έχουν μεγαλύτερο μήκος κύματος από τις υπεριώδεις ακτίνες.

**1.198** Τα άκρα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος είναι:
**α.** Η ιώδης και η ερυθρή ακτινοβολία.
**β.** Η υπεριώδης και η υπέρυθρη ακτινοβολία.
**γ.** Οι ακτίνες $X$ και οι ακτίνες $\gamma$.
**δ.** Οι ακτίνες $\gamma$ και τα ραδιοφωνικά κύματα.

**1.199** Ποια από τις παρακάτω ακτινοβολίες δεν βλάπτει τον ανθρώπινο οργανισμό.
**α.** Υπεριώδης ακτινοβολία
**β.** Ραδιοκύματα
**γ.** Ακτίνες $X$
**δ.** Ακτίνες $\gamma$

*Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους*

**1.200** Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι Λάθος.
**α.** Η διάδοση των μεταβολών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ονομάζεται ηλεκτρομαγνητικό κύμα.
**β.** Μακριά από μία κεραία το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν ίδια φάση.
**γ.** Η σχέση $\upsilon = \lambda f$ δεν ισχύει και για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.
**δ.** Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται από κινούμενα φορτία.
**ε.** Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια.



**1.201** Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα:
**α.** Είναι διαμήκη κύματα.
**β.** Δεν εκδηλώνουν το φαινόμενο της συμβολής.
**γ.** Διαδίδονται παντού με την ίδια ταχύτητα.
**δ.** Μεταφέρουν ενέργεια ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.
**ε.** Για τις εντάσεις ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ισχύει $E/B = c$.

**1.202** Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι Λάθος.
**α.** Τα λέιζερ παράγουν σχεδόν μονοχρωματικό φως.
**β.** Το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας αποτελείται μόνο από ορατές ακτινοβολίες.
**γ.** Η υπέρυθρη ακτινοβολία που απορροφάται από ένα σώμα προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας του
**δ.** Ο ήλιος είναι ισχυρή πηγή υπεριώδους ακτινοβολίας.
**ε.** Το Όζον της ατμόσφαιρας απορροφά τις υπέρυθρες ακτινοβολίες.

**1.203** Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι Λάθος.

**α.** Οι ακτίνες Χ παράγονται από την επιβράδυνση ηλεκτρονίων που προσκρούουν σε ένα μέταλλο.

**β.** Το ραντάρ λειτουργεί με κύματα που προέρχονται από τη ραδιενεργό διάσπαση πυρήνων.

**γ.** Τα μικροκύματα χρησιμοποιούνται στη ραδιοφωνία και την τηλεόραση.

**δ.** Οι ακτίνες γ εκπέμπονται όταν συμβαίνουν πυρηνικές διασπάσεις.

**ε.** Η υπεριώδης ακτινοβολία προκαλεί το μαύρισμα του δέρματος.

## ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

### Κβαντομηχανική

**1.204** Μέλαν λέγεται ένα σώμα όταν:
**α.** δεν εκπέμπει ακτινοβολία.
**β.** απορροφά πλήρως το ορατό φως.
**γ.** απορροφά πλήρως όλο το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.
**δ.** βρίσκεται σε υψηλή θερμοκρασία

**1.205** Η ακτινοβολία που εκπέμπει ένα μέλαν σώμα:
**α.** είναι πάντα ορατή.
**β.** εξαρτάται από την χημική σύσταση του σώματος.
**γ.** περιέχει μήκη κύματος μικρότερα μιας μέγιστης τιμής $\lambda_{max}$.
**δ.** περιέχει όλα τα μήκη κύματος.

**1.206** Σύμφωνα με την θεωρία του Planck (κβαντική θεωρία).
**α.** Η ενέργεια που μεταφέρει η Η/Μ ακτινοβολία παίρνει κάθε τιμή.
**β.** Η ενέργεια της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας παίρνει τιμές οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια κάποιας στοιχειώδους ποσότητας.
**γ.** Η ενέργεια που μπορεί να εκπέμπει ή απορροφά ένα σώμα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας στοιχειώδους ποσότητας που ονομάζεται «κβάντο» ενέργειας.
**δ.** Τα άτομα μπορούν να απορροφήσουν κάθε ποσότητα ενέργειας.

**1.207** Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία του Plank
**α.** Η ενέργεια ταλάντωσης των ατόμων μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.
**β.** Οι ενέργειες των ταλαντούμενων ατόμων είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας ελάχιστης τιμής.
**γ.** Το ταλαντούμενο άτομο μπορεί να εκπέμπει οποιοδήποτε ποσό ενέργειας.
**δ.** Το φάσμα του μέλανος σώματος είναι γραμμικό.

**1.208** Σε απόλυτο σκοτάδι τα σώματα που βρίσκονται σε θερμοκρασία δωματίου δεν φαίνονται διότι:
**α.** δεν εκπέμπουν ακτινοβολία.
**β.** Εκπέμπουν χαμηλής έντασης ορατή ακτινοβολία.
**γ.** Εκπέμπουν πιο πολύ στην περιοχή του υπέρυθρου που δεν είναι ορατό.
**δ.** Εκπέμπουν πιο πολύ υπεριώδη ακτινοβολία που δεν είναι ορατή.

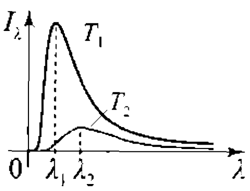
**1.209** Σε μέλαν σώμα το γινόμενο $\lambda_{max} \cdot T$ :
**α.** εξαρτάται από το μέγεθος του σώματος.
**β.** Εξαρτάται από την χημική σύσταση του σώματος.
**γ.** Είναι ανάλογο της θερμοκρασίας του σώματος.
**δ.** Έχει σταθερή τιμή.

**1.210** Ένα μέλαν σώμα βρίσκεται σε απόλυτη θερμοκρασία $T = 400K$ και εκπέμπει το μέγιστο της ακτινοβολίας του σε μήκος κύματος $\lambda$. Αν η θερμοκρασία του σώματος γίνει $T_1$ , το μήκος κύματος της μέγιστης εκπομπής υποδιπλασιάζεται. Αν η θερμοκρασία του γίνει ίση με $T_2$ το μήκος κύματος μέγιστης εκπομπής διπλασιάζεται , Ο λόγος $T_1/T_2$ είναι:

**α.** 2 **β.** 4 **γ.** 1/4 **δ.** $\sqrt{2}$

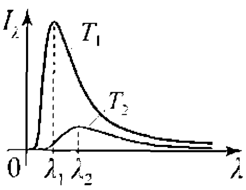


**1.211** Αν οι καμπύλες του σχήματος αντιστοιχούν σε δύο μέλανα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ με θερμοκρασίες $T_1, T_2$ τότε:




**α.** Τα σώματα έχουν ίδια χημική σύσταση.
**β.** Το σώμα $\Sigma_2$ έχει μεγαλύτερο όγκο.
**γ.** Το σώμα $\Sigma_2$ έχει μεγαλύτερη θερμοκρασία.
**δ.** Το «κβάντο» ενέργειας που αντιστοιχεί στην κορυφή κάθε καμπύλης είναι μεγαλύτερο για το σώμα Σ1

**1.212** Οι καμπύλες αντιστοιχούν σε δύο μέλανα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ με θερμοκρασίες $T_1, T_2$ αν για τις οποίες ισχύει $T_1 = 2T_2$ και τα κβάντα ενέργειας που αντιστοιχούν στις κορυφές των δύο κατανομών έχουν ενέργειες $E_1, E_2$:




**α.** Τα εμβαδά $S_1$ και $S_2$ κάτω από τις καμπύλες έχουν λόγο $S_1/S_2 = 2/1$.
**β.** Τα μήκη κύματος $\lambda_1, \lambda_2$ έχουν λόγο $\lambda_1/\lambda_2 = 1/\sqrt{2}$
**γ.** Τα κβάντα ενέργειας που αντιστοιχούν στην μέγιστη εκπομπή έχουν ενέργειες με λόγο $E_1/E_2 = \sqrt{2}/1$

**δ.** Τα άτομα του σώματος Σ1 που ταλαντώνονται με συχνότητα $f_1 = c/\lambda_1$ έχουν ενέργεια ταλάντωσης που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ενέργειας $E_2$.

**1.213** Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, η μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων όταν εξέρχονται από κάποιο μέταλλο:
**α.** Εξαρτάται από την ένταση της ακτινοβολίας.
**β.** Εξαρτάται από την φύση του μετάλλου.
**γ.** Είναι ίδια για κάθε συχνότητα.
**δ.** Είναι ανάλογη της συχνότητας.

**1.214** Σε ένα πείραμα φωτοηλεκτρικού φαινομένου θέλουμε να δούμε πως επηρεάζει η ένταση της ακτινοβολίας την ένταση του ρεύματος. Κρατάμε σταθερή τη συχνότητα σε κάποια τιμή μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου και αυξάνουμε σταδιακά την ένταση της ακτινοβολίας. Η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα.
**α**. Δεν μεταβάλλεται.
**β**. Μειώνεται.
**γ.** Αυξάνεται.
**δ.** Αλλάζει φορά.

**1.215** Φωτόνιο μήκους κύματος λ προκαλεί την εξαγωγή ηλεκτρονίου από μέταλλο με κινητική ενέργεια $K$. Αν πέσει στο μέταλλο ένα φωτόνιο μήκους κύματος $2\lambda$:
**α.** Θα προκαλέσει την εξαγωγή φωτοηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια $K/2$.
**β.** Θα προκαλέσει εξαγωγή ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια μεγαλύτερη της $K/2$.
γ. Θα εξάγει ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια μικρότερη της $K/2$.
**δ.** Ίσως να μην προκαλέσει εξαγωγή ηλεκτρονίων από το μέταλλο.

**1.216** Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο η τάση αποκοπής:
**α.** εξαρτάται από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.
**β.** Μειώνεται αν αυξηθεί η συχνότητα της ακτινοβολίας.
**γ.** Μειώνεται αν αυξηθεί το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.
**δ.** Είναι ανεξάρτητη από το έργο εξαγωγής.

**1.217** Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο η τάση αποκοπής:
**α.** Είναι ίδια για όλα τα μέταλλα.
**β.** Είναι μηδέν όταν η συχνότητα είναι ίση με την συχνότητα κατωφλίου.
**γ.** Αυξάνει αν αυξηθεί ο αριθμός των φωτονίων που πέφτουν στην κάθοδο.
**δ.** Είναι ανάλογη της συχνότητας της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

**1.218** Στην κάθοδο φωτοηλεκτρικής διάταξης πέφτει μία μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας $f$ η οποία προκαλεί εξαγωγή ηλεκτρονίων. Μεταβάλλοντας την τάση μεταξύ ανόδου-καθόδου παρατηρούμε ότι η ένταση του ρεύματος μηδενίζεται όταν η τάση πάρει την τιμή $V_o = \varphi/e$. Η ενέργεια κάθε φωτονίου της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι:

**α.** $3\varphi$ **β.** $2\varphi$ γ. $\varphi$ **δ.** $4\varphi$

**1.219** Σε μια φωτοηλεκτρική διάταξη προσπίπτει μονοχρωματικό φώς πάνω στην κάθοδο η οποία είναι γειωμένη. Τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από το μέταλλο με κινητική ενέργεια ίση με $1{,}6 \cdot 10^{-19} j$. Η ένταση του ρεύματος μηδενίζεται όταν το δυναμικό της ανόδου είναι:

**α.** $V_A = 1V$ **β.** $V_A = -1V$ γ. $V_A = -10V$ **δ.** $V_A = 10V$

**1.220** Στο φαινόμενο Compton αλλά και στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο έχουμε αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με ηλεκτρόνιο.

**α.** Το ηλεκτρόνιο είναι δέσμιο στο φαινόμενο Compton.
**β.** Το ηλεκτρόνιο είναι ελεύθερο στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.
**γ.** Το ηλεκτρόνιο είναι ελεύθερο στο φαινόμενο Compton.
**δ.** Το ηλεκτρόνιο είναι δέσμιο και στα δύο φαινόμενα.



**1.221** Στο φαινόμενο Compton δίδεται η σχέση που δείχνει την μεταβολή του μήκους κύματος της ακτινοβολίας :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

δεν εξαρτάται από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου:

**α.** Το μήκος κύματος $\lambda'$ του φωτονίου που σκεδάζεται.
**β.** Το ποσοστό μεταβολής $\Delta\lambda/\lambda$ του μήκους κύματος.
γ. Η μεταβολή $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$
**δ.** Η ενέργεια $E'$ του φωτονίου που σκεδάζεται.

**1.222** Στο φαινόμενο Compton η διαφορά του μήκους κύματος $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ ανάμεσα στην προσπίπτουσα και τη σκεδαζόμενη ακτινοβολία:

**α.** Δεν εξαρτάται από τη γωνία $\varphi$ που σχηματίζει η προσπίπτουσα με την σκεδαζόμενη ακτινοβολία:
**β.** Δεν εξαρτάται από τη μάζα του ηλεκτρονίου.
**γ.** Δεν εξαρτάται από το μήκος κύματος για δεδομένη γωνία.
**δ.** Είναι μέγιστη για γωνία $\varphi = 90^o$.

**1.223** Το φαινόμενο που ενισχύει την άποψη του de Broglie για κυματική φύση των σωματιδίων είναι:
**α.** Η ακτινοβολία μέλανος σώματος.
**β.** Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.
**γ.** Η περίθλαση ηλεκτρονίων.
**δ.** Η σκέδαση φωτός σε ελεύθερα ηλεκτρόνια ( φαινόμενο Compton).

**1.224** Ένα σωματίδιο άλφα (πυρήνας Ηλίου) έχει μάζα τετραπλάσια από την μάζα ενός πρωτονίου $(m_a = 4m_p)$ . Αν η ταχύτητα του πρωτονίου είναι διπλάσια της ταχύτητας του σωματιδίου άλφα τότε ο λόγος των μηκών κύματος de Broglie $\lambda_\alpha/\lambda_p$ είναι :
**α.** $1/2$ **β.** $2$ **γ.** $1$ **δ.** $4$

**1.225** Ηλεκτρόνιο εισέρχεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Κατά την διάρκεια της κίνησης δεν μεταβάλλεται:
**α.** Η ορμή του ηλεκτρονίου.
**β.** Η δύναμη Lorentz.
**γ.** Το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου.
**δ.** Η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου.

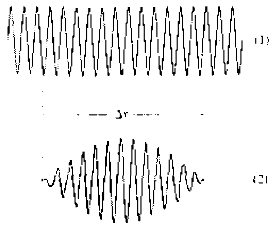


**1.226** Ποια από τα επόμενα ζεύγη μεγεθών ενός υποατομικού σωματιδίου μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια.
**α.** Ταχύτητα- θέση
**β.** Ενέργεια – Χρονική διάρκεια
**γ.** Ενέργεια- Ορμή
**δ.** Ορμή – Θέση

**1.227** Σε ένα κινούμενο ηλεκτρόνιο μάζας $m$ η αβεβαιότητα θέσης είναι ίση με το μήκος κύματος $\lambda_D$ (de Broglie) του ηλεκτρονίου. Η ελάχιστη αβεβαιότητα $\Delta p$ της ορμής του ηλεκτρονίου είναι:
$\alpha.$ $\dfrac{\lambda}{2\pi}$ $\beta.$ $\lambda$ $\gamma.$ $\dfrac{\lambda}{2}$ $\delta.$ $2\pi\lambda$

**1.228** Η αρχή της αβεβαιότητας:
**α.** δεν ισχύει στο μικρόκοσμο.
**β.** Ισχύει και στο μακρόκοσμο αλλά οι συνέπειες είναι ασήμαντες.
**γ.** Ισχύει μόνο για τα φορτισμένα σωματίδια.
**δ.** Θέτει όριο σφάλματος μόνο στην μέτρηση ορμής και θέσης ενός σωματιδίου.

**1.229** Οι κυματομορφές του σχήματος αναφέρονται σε ηλεκτρόνια τα οποία κινούνται στον άξονα $x'x$.



**α.** Η αβεβαιότητα θέσης είναι πιο μικρή στο ηλεκτρόνιο (1).
**β.** Η αβεβαιότητα ορμής είναι πιο μεγάλη στο ηλεκτρόνιο (2).
**γ.** Η αβεβαιότητα ορμής είναι πιο μεγάλη στο ηλεκτρόνιο (1).
**δ.** Η αβεβαιότητα θέσης είναι ίδια και στα δύο ηλεκτρόνια (1) και (2).

**1.230** Η κυματοσυνάρτηση $\Psi$:
**α.** Δεν έχει μονάδες.
**β.** Δείχνει την θέση του σωματιδίου κάθε στιγμή.
**γ.** Παίρνει μόνο θετικές τιμές.
**δ.** Περιέχει πληροφορίες για την θέση του σωματιδίου.

**1.231** Για ένα σωματίδιο που κινείται στον άξονα $x'x$ η κυματοσυνάρτηση $\Psi$:
**α.** Δείχνει την θέση του σωματιδίου κάθε χρονική στιγμή
**β.** Δείχνει την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στη θέση $x$ ως τη θέση $x + dx$
**γ.** Είναι πάντα περιοδική συνάρτηση της θέσης
**δ.** Εξαρτάται από το περιβάλλον στο οποίο κινείται το σωματίδιο

**1.232** Αν $\Psi$ η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το ηλεκτρόνιο στο άτομο υδρογόνου η πιθανότητα να βρεθεί σε κάποια περιοχή όγκου $dV$:
**α.** Είναι ίδια όπου και αν πάρουμε τον όγκο $dV$
**β.** Έχει μέτρο ίσο με $\Psi/dV$
**γ.** Έχει μέτρο ίσο με $\Psi \cdot dV$
**δ.** Έχει μέτρο ίσο με $\Psi^2 \cdot dV$

*Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους*

**1.233** Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος
**α.** Ένα μέλαν σώμα φαίνεται πάντα μαύρο.
**β.** Σύμφωνα με τον Planck η ενέργεια που έχει ένα άτομο που ταλαντώνεται με συχνότητα $f$ θα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας $hf$.
**γ.** Η σταθερά του Planck έχει μονάδες ενέργειας.
**δ.** Δύο μέλανα σώματα με διαφορετική σύσταση μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε φασματοσκοπικά.
**ε.** Δύο μέλανα σώματα που έχουν ίδια θερμοκρασία εκπέμπουν την ίδια ακριβώς ακτινοβολία.

**1.234** Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος
**α.** Η μέγιστη ένταση ακτινοβολίας μέλανος σώματος αντιστοιχεί πάντα σε μη ορατή ακτινοβολία.
β. Τα σώματα που έχουν χαμηλή θερμοκρασία δεν ακτινοβολούν και για αυτό δεν είναι ορατά όταν βρίσκονται σε ένα σκοτεινό δωμάτιο.
**γ.** Το φάσμα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι συνεχές.
**δ.** Ένα σώμα δεμένο στο άκρο ελατηρίου που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση μπορεί να χάσει πρακτικά οποιοδήποτε ποσό ενέργειας.
**ε.** Η ελάχιστη τιμή της ενέργειας ενός ατόμου που ταλαντώνεται είναι $E_{ελ} = 0$ 

**1.235** Η ελάχιστη συχνότητα της ακτινοβολίας που προκαλεί έξοδο ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο:
**α.** Ονομάζεται συχνότητα κατωφλίου
**β.** Είναι ίδια για όλα τα μέταλλα.
**γ.** Είναι αντιστρόφως ανάλογη του έργου εξαγωγής.
**δ.** Είναι ανάλογη του έργου εξαγωγής.
**ε.** Μειώνεται αν αυξηθεί η ένταση της ακτινοβολίας.

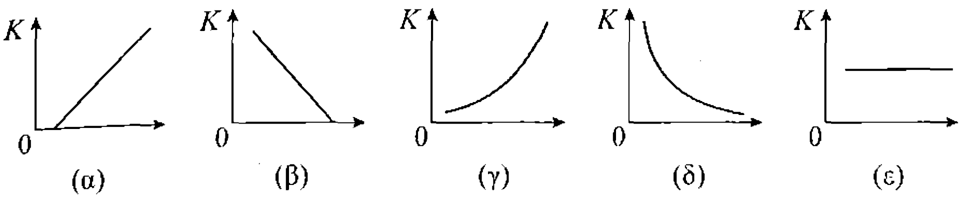
**1.236** Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο:
**α.** Η τάση αποκοπής είναι ανεξάρτητη της συχνότητας.
**β.** Κάθε φωτόνιο δίνει όλη του την ενέργεια σε ένα μόνο ηλεκτρόνιο.
γ. Η ακτινοβολία συμπεριφέρεται σαν να αποτελείται από σωματίδια
**δ.** Τα ηλεκτρόνια εξέρχονται μόνο όταν το φως είναι μονοχρωματικό.
**ε.** Η ένταση της ακτινοβολίας καθορίζει αν θα συμβεί εξαγωγή ηλεκτρονίων.

**1.237** Σε μέταλλο πέφτει μονοχρωματική ακτινοβολία με συχνότητα η οποία είναι μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου. Για τα εξερχόμενα ηλεκτρόνια:
**α.** Το πλήθος τους είναι ανάλογος της έντασης της ακτινοβολίας
**β.** Η κίνηση τους μετά την έξοδο είναι επιταχυνόμενη για κάθε τιμή της τάσης.
**γ.** Το πλήθος που φτάνει στην άνοδο εξαρτάται από την εφαρμοζόμενη τάση.
**δ.** Για κάποια τιμή της τάσης φτάνουν όλα στην άνοδο.
**ε.** Κάποια φτάνουν στην άνοδο και όταν η τάση ανόδου – καθόδου γίνει μηδέν

**1.238** Σε ένα πείραμα φωτοηλεκτρικού φαινομένου η τάση αποκοπής:
**α.** Δεν εξαρτάται από τη συχνότητα της ακτινοβολίας.
**β.** Είναι μηδέν όταν η συχνότητα είναι ίση με τη συχνότητα κατωφλίου.
**γ.** Αν αυξήσουμε την συχνότητα της ακτινοβολίας θα αυξηθεί.
**δ.** Δεν εξαρτάται από το έργο εξαγωγής του μετάλλου

**ε.** Από την μέτρηση της για διάφορες τιμές της συχνότητας μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά του Plank

**1.239** Δίδονται τα διαγράμματα της κινητικής ενέργειας φωτοηλεκτρονίων:




**α.** Το διάγραμμα (α) μπορεί να δείχνει πως μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με την συχνότητα της ακτινοβολίας.
**β.** Το διάγραμμα (β) δείχνει πως μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με το έργο εξαγωγής για κάποια συχνότητα.
**γ.** Το διάγραμμα (γ) δείχνει πως μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με την ένταση της ακτινοβολίας.
**δ.** Το διάγραμμα (δ) δείχνει πως μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.
**ε.** Το διάγραμμα (ε) μπορεί να δείχνει πως μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με την ένταση της ακτινοβολίας.

**1.240** Στο φαινόμενο Compton:
**α.** Σύμφωνα με την κλασσική θεωρία η σκεδαζόμενη και η προσπίπτουσα ακτινοβολία θα έχουν ίδιο μήκος κύματος.
**β.** Η διαφορά μεταξύ των μηκών κύματος $\lambda' - \lambda$ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας X και της σκεδαζόμενης γίνεται μέγιστη όταν η γωνία σκέδασης $\varphi$ είναι $90^o$.
**γ.** Το φως δεν συμπεριφέρεται ως ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.
**δ.** Η μετατόπιση Compton $\lambda' - \lambda$ είναι ανάλογη του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.
**ε.** Το ποσοστό μεταβολής $\Delta\lambda/\lambda$ διπλασιάζεται αν διπλασιαστεί η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

**1.241** Στο φαινόμενο Compton:
**α.** Η ενέργεια του αρχικού φωτονίου γίνεται κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου.
**β.** Διατηρείται ορμή που είχε το αρχικό φωτόνιο.
γ. Δεν διατηρείται η ενέργεια του αρχικού φωτονίου.
**δ.** Δεν εκδηλώνεται μετρήσιμη μετατόπιση Compton όταν η προσπίπτουσα ακτινοβολία ανήκει στο ορατό φάσμα .

**ε.** Η σκεδαζόμενη ακτινοβολία έχει μήκος κύματος που εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης.

**1.242** Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος
**α.** Σύμφωνα με θεωρία de Broglie τα υποατομικά σωματίδια παρουσιάζουν ταυτόχρονα σωματιδιακό αλλά και κυματικό χαρακτήρα.
**β.** Η ορμή ενός σωματιδίου (μέτρο) και το μήκος κύματος έχουν σταθερό λόγο.
**γ.** Η κυματική φύση των ηλεκτρονίων επαληθεύεται πειραματικά.
**δ.** Τα σωματίδια χωρίς ηλεκτρικό φορτίο δεν συμπεριφέρονται ποτέ ως κύματα.
**ε.** Ένα ηλεκτρόνιο ταυτόχρονα συμπεριφέρεται και ως σωματίδιο και ως κύμα.

**1.243** Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος
**α.** Το φως συμπεριφέρεται ως σωματίδιο σε όλα τα φαινόμενα.
**β.** Αν το μήκος κύματος σωματιδίου είναι σταθερό , ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σωματιδίου είναι μηδέν.
**γ.** Όταν το φως αλληλοεπιδρά με την ύλη συμπεριφέρεται ως κύμα.
**δ.** Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο το φως εκδηλώνει την σωματιδιακή του φύση.
**ε.** Δύο σωματίδια με ίδια κινητική ενέργεια θα έχουν και ίδιο μήκος κύματος.

**1.244** Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος

**α.** Αν η θέση ενός σωματιδίου είναι γνωστή με απόλυτη ακρίβεια τότε η ορμή του σωματιδίου είναι τελείως άγνωστη.

**β**. Όταν η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας είναι μικρή, τότε ο χρόνος μέσα στον οποίο έγινε η μέτρηση της ενέργειας είναι μεγάλος.

**γ.** Το γινόμενο αβεβαιοτήτων ορμής και θέσης είναι πάντα σταθερό.

**δ.** Η κίνηση ενός ηλεκτρονίου σε καθορισμένη τροχιά γύρω από τον πυρήνα δεν είναι σε συμφωνία με την αρχή της αβεβαιότητας.

**ε.** Όσο μικραίνει η αβεβαιότητα θέσης ενός σωματιδίου τόσο πιο έντονα εκδηλώνεται η κυματική του συμπεριφορά.

**1.245** Η κυματοσυνάρτηση $\Psi$ ενός σωματιδίου:

**α.** Παίρνει μόνο θετικές τιμές.

**β.** Δεν έχει μονάδες.

**γ.** Είναι πάντα περιοδική συνάρτηση της θέσης.

**δ.** Περιέχει πληροφορίες για την ορμή και τη θέση του σωματιδίου.

**ε.** Έχει τιμή μηδέν στις περιοχές που δεν μπορεί να βρεθεί το σωματίδιο.

# ΘΕΜΑΤΑ Β

## ΚΡΟΥΣΕΙΣ

**2.1** Μία σφαίρα Α συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β, οι ταχύτητές τους μετά την κρούση έχουν ίσα μέτρα. Αν η σφαίρα Β συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με την ακίνητη σφαίρα Α, τα μέτρα των ταχυτήτων τους μετά την κρούση έχουν λόγο $u'_A/u'_B$, ίσο με:

$\alpha.$ 3 $\quad\quad$ $\beta.$ 1/3 $\quad\quad$ $\gamma.$ 2/3

**2.2** Σφαίρα $\Sigma_1$ μάζα $m$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα $\Sigma_2$ μάζας $M$ $(M > m)$ . Εξ αιτίας της κρούσης η μεταβολή του μέτρου της ορμής της σφαίρας $\Sigma_1$ είναι $-25\%$ .

**i.** Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας $\Sigma_1$ είναι:

$\alpha.$ $2{,}5mv$ $\quad\quad$ $\beta.$ $1{,}75mv$ $\quad\quad$ $\gamma.$ $1{,}5mv$

**ii.** Ο λόγος των μαζών είναι

$\alpha.$ $\frac{m}{M} = \frac{1}{7}$ $\quad\quad$ $\beta.$ $\frac{m}{M} = \frac{2}{5}$ $\quad\quad$ $\gamma.$ $\frac{m}{M} = \frac{1}{3}$

**2.3** Μικρή σφαίρα $A$ μάζας $m_1$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα $B$. Αμέσως μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Αν το 64% της κινητικής ενέργειας που είχε η σφαίρα Α πριν την κρούση μεταβιβάστηκε στην Β τότε οι ορμές των σωμάτων μετά την κρούση έχουν λόγο $p'_1/p'_2$ είναι:

$\alpha.$ $\frac{3}{2}$ $\quad\quad$ $\beta.$ $\frac{3}{4}$ $\quad\quad$ $\gamma.$ $\frac{3}{5}$

**2.4** Δύο σφαίρες Α και Β με μάζες $m_1$ και $m_2$ κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες που έχουν μέτρα $v_1$ και $v_2$ ( $v_1 = 2v_2$). Οι σφαίρες κινούνται η μία προς την άλλη και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση, η σφαίρα Α μένει ακίνητη. Ο λόγος $K_1/K_2$ των κινητικών ενεργειών των σφαιρών πριν την κρούση είναι:

$\alpha.$ 4 $\quad\quad$ $\beta.$ 6 $\quad\quad$ $\gamma.$ 8

**2.5** Σφαίρα $\Sigma_1$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα $\Sigma_2$. Αν μετά την κρούση οι ορμές των σφαιρών είναι ίσες οι κινητικές τους ενέργειες θα είναι:

$\alpha.$ $K'_1 = K'_2$ $\quad\quad$ $\beta.$ $K'_1 = 3K'_2$ $\quad\quad$ $\gamma.$ $K'_2 = 3K'_1$

**2.6** Δύο σφαίρες με ίσες μάζες κινούνται στην ίδια κατεύθυνση και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν η κινητική ενέργεια της μιας σφαίρας μειώθηκε κατά 75 %, τότε η κινητική ενέργεια της άλλης αυξήθηκε κατά:

***α.*** 25 % ***β.*** 75 % ***γ.*** 300 %

**2.7** Δύο σώματα με μάζες $m_1$ και $m_2$ κινούνται με αντίθετες ταχύτητες και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση η κινητική ενέργεια του σώματος $m_2$ είναι τετραπλάσια της κινητικής ενέργειας που είχε πριν την κρούση. Για τις μάζες των σωμάτων ισχύει:

***α.*** $m_1 = m_2$ ***β.*** $m_1 = 2m_2$ ***γ.*** $m_1 = 3m_2$

**2.8** Δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Ο λόγος των κινητικών τους ενεργειών πριν την κρούση $K_1/K_2$ είναι ίσος με 2 και μένει ίδιος και μετά την κρούση. Ο λόγος των μαζών $m_2/m_1$ των δύο σφαιρών είναι:

*α.* 1 *β.* 2 *γ.* 1/2

**2.9** Δύο σώματα που έχουν αντίθετες ορμές συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση:

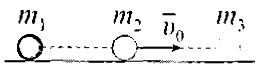
**α.** Οι ορμές των δύο σωμάτων είναι ίσες.

**β.** Οι κινητικές ενέργειες των δύο σωμάτων είναι ίσες.

**γ.** Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος είναι μηδέν.



**2.10** Τρείς σφαίρες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ με μάζες $m_1, m_2, m_3$ που έχουν την ίδια ακτίνα βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε τα κέντρα τους να είναι στην ίδια ευθεία. Η σφαίρα μάζας $m_2$ βρίσκεται ανάμεσα στις άλλες δύο. Δίνουμε στη σφαίρα μάζας $m_2$ αρχική ταχύτητα $\upsilon_o$ που έχει διεύθυνση την ευθεία που συνδέει τα κέντρα των σφαιρών. Αν για τις μάζες των σφαιρών ισχύει: $m_2 = m$ και $m_1 = m_3 = 4m$ τότε ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν συνολικά είναι:

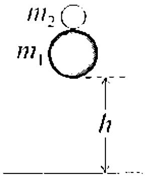



***α.*** *Δύο* ***β.*** *Τρείς* ***γ.*** *Τέσσερις*

**2.11** Ένα σώμα $\Sigma_1$ κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα $\Sigma_2$ ( $\upsilon_2 = 0$). Μετά την κρούση το σώμα $\Sigma_2$ αποκτά ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2'$. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος $\Sigma_1$ μετά την δεν μπορεί να πάρει την τιμή:

*α.* $\upsilon_1' = -\upsilon_2'$ *β.* $\upsilon_1' = -\dfrac{\upsilon_2'}{2}$ *γ.* $\upsilon_1' = 3\dfrac{\upsilon_2'}{4}$

**2.12** Ένα σώμα μάζας $m_1$ και ένα άλλο μάζας $m_2$ αφήνονται από ύψος $h$, το δεύτερο αμέσως μετά το πρώτο. Όλες οι κρούσεις είναι τέλεια ελαστικές και συμβαίνουν κατά μήκος της κατακόρυφης γραμμής. Αν το σώμα μάζας $m_1$ παραμένει ακίνητο μετά τις κρούσεις τότε:




**i.** ο λόγος των μαζών είναι:

**α.** $m_1/m_2 = 1$ **β.** $m_1/m_2 = 2$ **γ.** $m_1/m_2 = 3$

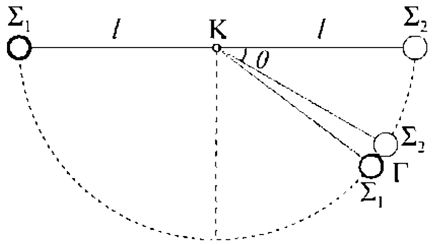
**ii.** το ύψος στο οποίο θα ανέλθει το σώμα μάζας $m_2$ είναι:

**α.** $h$ **β.** $2h$ **γ.** $4h$

**2.13** Δύο σφαίρες $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες που έχουν μέτρα $\upsilon_1 = \upsilon$, $\upsilon_2 = 3\upsilon$ και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά . Μετά την κρούση η σφαίρα $\Sigma_1$ αποκτά ταχύτητα αντίθετη της αρχικής της. Ο λόγος των κινητικών ενεργειών $K_1'/K_2'$ μετά την κρούση είναι:

$\alpha. \frac{1}{2}$ $\beta. \frac{1}{3}$ $\gamma. \frac{1}{4}$

**2.14** Δύο μικρά μεταλλικά σφαιρίδια $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ με ίσες ακτίνες είναι δεμένα στα κάτω άκρα δύο νημάτων $\nu_1, \nu_2$ που έχουν ίδιο μήκος $l$ και ισορροπούν με τα νήματα σε κατακόρυφη θέση έτσι ώστε τα σφαιρίδια να είναι σε επαφή. Το άνω άκρο των νημάτων είναι στερεωμένο σε ακλόνητο καρφί $K$.




Απομακρύνουμε τα σφαιρίδια από την αρχική τους θέση και τα φέρνουμε σε τέτοια θέση ώστε τα νήματα να γίνουν οριζόντια . Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη τη σφαίρα $\Sigma_1$ και λίγο αργότερα αφήνουμε ελεύθερη και τη σφαίρα $\Sigma_2$. Τα σφαιρίδια συγκρούονται ελαστικά όταν το νήμα $\nu_2$ σχηματίζει γωνία $30^o$ με την αρχική του οριζόντια θέση. Μετά την κρούση το σφαιρίδιο $\Sigma_1$ μόλις που κάνει ανακύκλωση. Για τις μάζες των σφαιριδίων ισχύει

$\alpha.\ m_2 = 2m_1$ $\beta.\ m_2 = 3m_1$ $\gamma.\ m_1 = 3m_2$

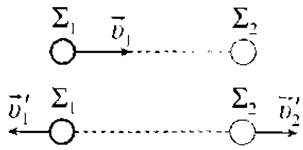
**2.15** Δύο σφαίρες $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ κινούνται σε λείο δάπεδο και τα μέτρα των ταχυτήτων τους πριν την κρούση έχουν λόγο $|\upsilon_2|/|\upsilon_1| = 2/1$. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν εξ αιτίας της κρούσης το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της $\Sigma_1$ είναι αντίθετο του ποσοστού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του $\Sigma_2$. Ο λόγος των μαζών $m_1/m_2$ μπορεί να είναι:

$\alpha. 4$ $\beta.\ 2$ $\gamma. 1/2$

**2.16** Δύο σφαίρες με διαφορετικές μάζες $m_1 \neq m_2$ κινούνται στην ίδια ευθεία και προς την ίδια κατεύθυνση. Κάποια στιγμή οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Εξ αιτίας της κρούσης η κινητική ενέργεια της σφαίρας $\Sigma_1$ μειώνεται κατά 75% ενώ η κινητική ενέργεια της σφαίρας $\Sigma_2$ αυξάνεται κατά 300%. για τις μάζες των σφαιρών ισχύει:

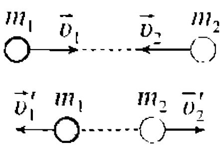
$\alpha.\ m_2 = 3m_1$ $\qquad$ $\beta.\ m_2 = 6m_1$ $\qquad$ $\gamma.\ m_2 = 9m_1$

**2.17** Σφαίρα $\Sigma_1$ κινούμενη πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1$ συγκρούεται με ακίνητη σφαίρα $\Sigma_2$ ίδιας ακτίνας. Αμέσως μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες ίσου μέτρου $\upsilon_1' = \upsilon_2' = \upsilon_1/2$. Αν $K, K'$ η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση:



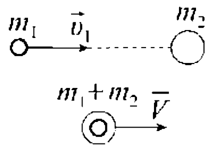

***α.*** $K' = K$ $\qquad$ ***β.*** $K' = 3K/4$ $\qquad$ *γ.* $K' = K/2$

**2.18** Δύο σφαίρες $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ με μάζες $m_1$ , $m_2$ κινούνται με αντίθετες ταχύτητες και συγκρούονται κεντρικά. Αν η κινητική ενέργεια που χάνει η $\Sigma_1$ είναι ελάχιστη , ενώ η κινητική ενέργεια που χάνει η $\Sigma_2$ είναι μέγιστη .Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας γίνεται θερμότητα κατά την κρούση είναι:




$\alpha.\ \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\beta.\ \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\gamma.\ \frac{3}{4}$

**2.19** Σώμα μάζας $m_1$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2$ που είναι αρχικά ακίνητο. Εξαιτίας της κρούσης το 75% της αρχικής κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα.




**i.** Για τις μάζες των σωμάτων ισχύει:

$\alpha.\ m_2 = m_1$ $\qquad$ $\beta.\ m_2 = 2m_1$ $\qquad$ $\gamma.\ m_2 = 3m_1$

**ii.** Το κλάσμα της αρχικής ορμής του σώματος μάζας $m_1$ που μεταβιβάζεται στο σώμα μάζας $m_2$ είναι:

α. 75% $\qquad$ β. 50% $\qquad$ γ. 25%

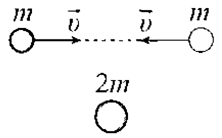
**2.20** Έστω δύο πλαστικές κρούσεις Α και Β των ίδιων σωμάτων με μάζες $m$ και $M$.
**Α κρούση:** Το σώμα μάζας $m$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon$ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα μάζας $M$ που είναι ακίνητο. Λόγω κρούσης αναπτύσσεται θερμότητα $Q_1$.

**Β κρούση:** Το σώμα μάζας $M$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon$ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα μάζας $m$ που είναι ακίνητο. Λόγω κρούσης αναπτύσσεται θερμότητα $Q_2$. Ο λόγος των θερμοτήτων $Q_1/Q_2$ είναι:

α. $Q_1/Q_2 > 1$ β. $Q_1/Q_2 = 1$ γ. $Q_1/Q_2 < 1$

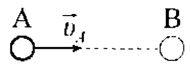
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

**2.21** Δύο σώματα, ίδιας μάζας $m$ το καθένα, κινούνται με αντίθετες ταχύτητες μέτρου $\upsilon$. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά και η παραγόμενη θερμότητα είναι $Q$. Αν πριν την κρούση ένα από τα σώματα είναι ακίνητο ενώ το άλλο κινείται ταχύτητα μέτρου $2\upsilon$ και η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική και πλαστική, η παραγόμενη θερμότητα είναι $Q'$. Ο λόγος των θερμοτήτων $Q/Q'$ είναι:



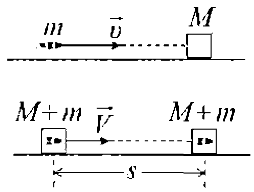

*α.* 3 *β.* 2 *γ.* 1

**2.22** Η σφαίρα Α του σχήματος, μάζας $m_A$, προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου $\upsilon$ στην ακίνητη σφαίρα Β, μάζας $m_B$, σχηματίζοντας συσσωμάτωμα. Κατά την κρούση, το 25% της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος γίνεται θερμότητα. Αν η σφαίρα Α προσπέσει στη σφαίρα Β με ταχύτητα μέτρου $2\upsilon$, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που θα γίνει θερμότητα είναι:




*α.* 25% *β.* 50% *γ.* 75%

**2.23** Κιβώτιο μάζας $M$ είναι αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu$. Βλήμα μάζας $m$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon$ και σφηνώνεται στο κιβώτιο. Το συσσωμάτωμα ολισθαίνει στο δάπεδο και σταματάει αφού διανύσει διάστημα $s$. Αν $Q_{\kappa\rho}$ η θερμότητα λόγω της κρούσης και $Q_{\tau\rho}$ η θερμότητα λόγω τριβής κατά την ολίσθηση του συσσωματώματος, τότε:




*α.* $\dfrac{Q_{\kappa\rho}}{Q_{\tau\rho}} = \dfrac{M}{M+m}$ *β.* $\dfrac{Q_{\kappa\rho}}{Q_{\tau\rho}} = \dfrac{m}{M}$ *γ.* $\dfrac{Q_{\kappa\rho}}{Q_{\tau\rho}} = \dfrac{M}{m}$

**2.24** Σώμα μάζας $M$ ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k$ το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Δεύτερο σώμα μάζας $m$ κινείται στο λείο δάπεδο με ταχύτητα $\upsilon$ και συγκρούεται κεντρικά με το σώμα μάζας $M$. Αν η κρούση είναι ελαστική η μέγιστη δυναμική ενέργεια που

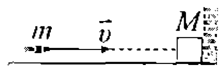
αποκτά το ελατήριο είναι $U_1$ και αν η κρούση είναι πλαστική είναι $U_2$ . Αν θέλουμε να είναι $U_1 = U_2$ πρέπει ο λόγος των μαζών $m/M$ να είναι:

$\alpha.1$ $\beta.2$ $\gamma.3$

**2.25** Σώμα Σ1 μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $\upsilon$ και συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο σώμα $\Sigma_2$ μάζας M. Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του σώματος $\Sigma_1$ είναι ίδιο όταν η κρούση είναι ελαστική και όταν η κρούση είναι πλαστική . Ο λόγος των μαζών $m/M$ των δύο σωμάτων είναι:

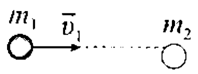
$\alpha.1$ $\beta.\ \frac{1}{2}$ $\gamma.\frac{1}{3}$

**2.26** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα βλήμα μάζας $m$ το οποίο κινείται οριζόντια και σφηνώνεται σε ακίνητο σώμα μάζας $M = 4m$, το οποίο ακουμπά σε ακίνητο τοίχο. Η ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει το βλήμα για να σφηνωθεί ολόκληρο μέσα στο σώμα είναι $K_0$. Αν δεν υπάρχει ο τοίχος, το σώμα μάζας $M$ είναι ελεύθερο να κινηθεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο και αν υποθέσουμε ότι η απώλεια κινητικής ενέργειας είναι η ίδια με την προηγούμενη περίπτωση, τότε η ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει το βλήμα ώστε να σφηνωθεί ολόκληρο μέσα στο σώμα είναι:



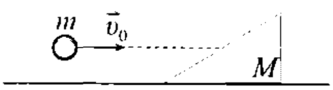

$\alpha.\ 5K_0/3$ $\beta.\ 5K_0/4$ $\gamma.\ 4K_0/3$

**2.27** Μικρή σφαίρα μάζας $m_1$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και συγκρούεται μη κεντρικά αλλά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα ίδιας ακτίνας που έχει μάζα $m_2$ . Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις. Ο λόγος των μαζών $m_1/m_2$ είναι:




$\alpha.2$ $\beta.\ 0{,}5$ $\gamma.\ 1$

**2.28** Τριγωνική σφήνα μάζας M και σχήματος ορθογωνίου τριγώνου (κάτοψη ΑΓΔ) ηρεμεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Σφαίρα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_o$ και συγκρούεται ελαστικά με τη σφήνα (Σχήμα). Μετά την κρούση η σφαίρα κινείται με κατακόρυφη ταχύτητα . Αν μετά την κρούση τα δύο σώματα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες ο λόγος των μαζών $m/M$ είναι:




$\alpha.\frac{m}{M} = 1$ $\beta.\ \frac{m}{M} = \frac{1}{2}$ $\gamma.\ \frac{m}{M} = \frac{1}{3}$

**2.29** Μικρή ελαστική σφαίρα εκτοξεύεται οριζόντια με ορμή μέτρου $P_o$ και κινητική ενέργεια $K_o$. Ώσπου να φτάσει στο οριζόντιο δάπεδο το έργο του βάρους είναι $3K_o$ .

Όταν φτάνει στο οριζόντιο δάπεδο συγκρούεται ελαστικά και αναπηδά. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας εξ αιτίας της κρούσης έχει μέτρο ίσο με:

$\alpha.\ 2p_o$ $\beta. 2p_o\sqrt{3}$ $\gamma. p_o\sqrt{3}$

**2.30** Σημειακή σφαίρα μάζας $m$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon$ και συγκρούεται ελαστικά με λείο κατακόρυφο τοίχο και μετά την κρούση κινείται σε διεύθυνση κάθετη της αρχικής . Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας έχει μέτρο:

$\alpha.\ m\upsilon$ $\beta. 2m\upsilon$ $\gamma.\ m\upsilon\sqrt{2}$

**2.31** Σφαίρα $A$ μάζας $m_1 = m$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντια ευθεία $xx'$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται ελαστικά μη κεντρικά με ακίνητη σφαίρα $B$ διπλάσιας μάζας $m_2 = 2m$. Μετά την κρούση η σφαίρα Α κινείται σε διεύθυνση που είναι κάθετη προς την διεύθυνση της κίνησης της πριν την κρούση. Για τις κινητικές ενέργειες $K_1', K_2'$ των δύο σφαιρών μετά την κρούση ισχύει:

$\alpha. K_2' = 2K_1'$ $\beta. K_2' = K_1'$ $\gamma. K_2' = 3K_1'$

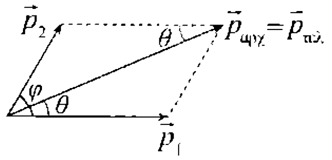
**2.32** Σφαίρα μάζας $m_1$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\upsilon_1$ και συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2$ .Μετά την κρούση η σφαίρα μάζας $m_1$ κινείται σε διεύθυνση κάθετη της αρχικής με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = \upsilon_1/\sqrt{2}$ .Αν οι τελικές κινητικές ενέργειες των μαζών είναι ίσες ο λόγος των μαζών είναι :

$\alpha.\ \frac{m_1}{m_2} = 1$ $\beta.\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$ $\gamma.\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$

**2.33** Μία σφαίρα μάζας $m_1$ συγκρούεται ελαστικά με μία άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2$. Αν η $m_1$ μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα κάθετη στην αρχική της ταχύτητα και έχει μέτρο ίσο με το μισό της αρχικής της ταχύτητας, θα ισχύει:

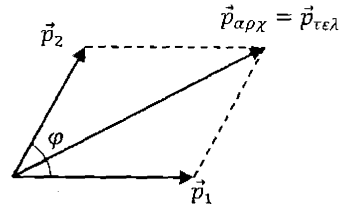
**α.** $m_2 = m_1$ **β.** $2m_2 = 3m_1$ **γ.** $3m_2 = 5m_1$

**2.34** Δύο σφαίρες $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ κινούνται έτσι ώστε η κινητική ενέργεια της σφαίρας $\Sigma_2$ να είναι διπλάσια της κινητικής ενέργειας της $\Sigma_1$ και κάποια στιγμή συγκρούονται πλαστικά . Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση σχηματίζουν γωνία $\varphi = 60^o$ . Μετά την κρούση η ταχύτητα του συσσωματώματος σχηματίζει γωνία $\theta = 30^o$ με την ταχύτητα που είχε η σφαίρα Σ1 πριν την κρούση . Ο λόγος $m_1/m_2$ των μαζών των δύο σφαιρών είναι:




$\alpha.\ 4$ $\beta.\ 2$ $\gamma.\ 1$

**2.35** Δύο σφαίρες με μάζες $m_1$ και $m_2$ κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο έτσι ώστε οι ταχύτητες τους να σχηματίζουν γωνία $\varphi = 60^o$ και συγκρούονται πλαστικά. Λίγο πριν την κρούση οι σφαίρες έχουν ίσες κινητικές ενέργειες $K_1 = K_2 = K$. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει κινητική ενέργεια $K_\Sigma = 1{,}5K$. Ο λόγος των μαζών $m_1/m_2$ των δύο σφαιρών είναι:




$\alpha. \frac{1}{2}$ $\beta. \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\gamma.\ 1$

**2.36** Μία σφαίρα Α μάζας $m_1 = m$ κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και συγκρούεται με ακίνητη σφαίρα Β μάζας $m_2 = 2m$ . Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε κάθετες κατευθύνσεις και η σφαίρα Α κινείται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\theta = 30^o$ με την ταχύτητα που είχε η ίδια πριν την κρούση. Το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$\alpha.\ 0\%$ $\beta.\ 12{,}5\%$ $\gamma.\ 25\%$

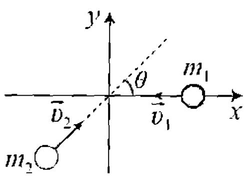
**2.37** Σώμα Σ μάζας $m$ κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και κάποια στιγμή διασπάται με έκρηξη σε δύο σώματα $\Sigma_1 = \Sigma_2$ με ίσες μάζες $m_1 = m_2$. Ο λόγος των κινητικών ενεργειών των δύο κομματιών είναι $K_2/K_1 = 5/1$ ενώ το σώμα Σ1 κινείται σε ευθεία κάθετη προς την διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ που είχε πριν από την έκρηξη. Η κινητική ενέργεια του συστήματος εξ αιτίας της έκρηξης αυξήθηκε κατά:

$\alpha.100\%$ $\beta.\ 200\%$ $\gamma.300\%$

**2.38** Δύο σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ με μάζες $m_1$ και $m_2 = 2m_1$ συγκρούονται πλαστικά και το 100% της αρχικής κινητικής ενέργειας των σωμάτων γίνεται θερμότητα. Αν δύο ίδια σώματα κινούνται πριν συγκρουστούν σε κάθετες διευθύνσεις με ίδιες κατά μέτρο ορμές, το κλάσμα της κινητικής τους ενέργειας που γίνεται θερμότητα είναι:

**α.** $2/3$ **β.** $3/5$ **γ.** $5/9$

**2.39** Δύο σφαίρες ίδιας μάζας $m_1 = m_2 = m$ κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα , με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ με μέτρα $\upsilon_1 = \upsilon\, , \upsilon_2 = 5\upsilon$. Όταν οι σφαίρες φτάνουν στην αρχή των αξόνων συγκρούονται πλαστικά. Αν για τη γωνία θ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}6\, \kappa\alpha\iota\, \eta\mu\theta = 0{,}8$ Το μέτρο της μεταβολής της ορμής κάθε σφαίρας είναι:

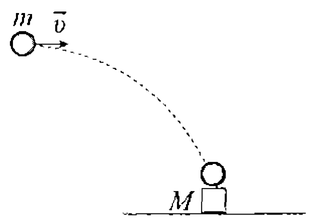



$\alpha.\ 2m\upsilon\sqrt{3}$ $\beta.\ 2m\upsilon\sqrt{2}$ $\gamma.\ 3m\upsilon\sqrt{2}$

**2.40** Μικρή σφαίρα κινείται με ταχύτητα $\upsilon$ και συγκρούεται πλάγια και ανελαστικά με οριζόντιο δάπεδο. Για τις γωνίες πρόσπτωσης ($\hat{\pi}$) και ($\hat{\alpha}$) που σχηματίζει η ταχύτητα του σφαιριδίου με την κάθετη στο επίπεδο ισχύει:

$\alpha. \hat{\pi} = \hat{\alpha}$ $\qquad$ $\beta.\ \hat{\pi} < \hat{\alpha}$ $\qquad$ $\gamma.\ \hat{\pi} > \hat{\alpha}$

**2.41** Σφαίρα μάζας $m$ βάλλεται οριζόντια από ύψος $h$ και όταν φτάνει στο έδαφος συγκρούεται με κύβο μάζας $M$ ο οποίος είναι ακίνητος. Αν τη στιγμή της εκτόξευσης η σφαίρα έχει κινητική ενέργεια $K_o$ και αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα που δημιουργείται έχει κινητική ενέργεια $K' = 50\% K_o$ (και δεν κάνει αναπήδηση), Ο λόγος των μαζών $m/M$ είναι




$\alpha.\ \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\beta.\ \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\gamma. 1$

**2.42** Σφαίρα μικρών διαστάσεων βάλλεται οριζόντια από σημείο που βρίσκεται σε ύψος $h$ από οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = \sqrt{2/3gh}$ και κάποια στιγμή συγκρούεται με το λείο οριζόντιο δάπεδο και ανακλάται χάνοντας κατά την κρούση τα $2/3$ της κινητικής της ενέργειας. Η γωνία ανάκλασης της σφαίρας είναι :

$\alpha.\ 30^o$ $\qquad$ $\beta.\ 45^o$ $\qquad$ $\gamma.\ 60\ ^o$

**2.43*** Σφαίρα μάζας $m_1 = 3m$ κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο και συγκρούεται πλαστικά με κύβο μάζας $m_2 = m$ που είναι ακίνητος σε λείο οριζόντιο επίπεδο χωρίς να συμβεί αναπήδηση. Αν απώλεια κινητικής ενέργειας εξ αιτίας της κρούσης είναι 52% και $\Delta\vec{P}_1, \Delta\vec{P}_2$ οι μεταβολές ορμές της σφαίρας και του κύβου αντίστοιχα τότε για ο λόγος των μέτρων $|\Delta\vec{P}_1| / |\Delta\vec{P}_2|$ είναι:

$\alpha.\ \sqrt{5}$ $\qquad$ $\beta.\ 2\sqrt{5}$ $\qquad$ $\gamma. \sqrt{10}$

## ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

**2.44** Σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση $\pi/2$. Όταν η φάση της ταλάντωσης αυξηθεί κατά $\pi$ τότε θα είναι μέγιστη:
**α.** Η ταχύτητα του σώματος.
**β.** Η απομάκρυνση του σώματος.
**γ.** Η επιτάχυνση του σώματος.

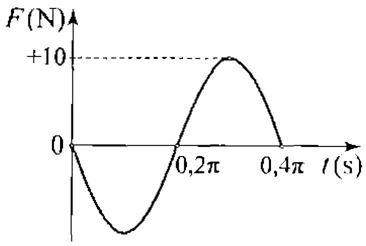
**2.45** Σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχει ταχύτητα μέτρου $|\upsilon| = \upsilon_{max}\sqrt{3}/2$ ενώ την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι αρνητικός. Η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι:

$\alpha.\ x = \frac{A}{3}$ $\beta.\ x = \frac{A\sqrt{3}}{2}$ $\gamma.\ x = \frac{A}{2}$

**2.46** Σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση $\upsilon\ = -\ \omega A\eta\mu\omega t$. Η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση:

$\alpha. x\ =\ A\eta\mu(\omega t + \pi)$ $\beta.\ x\ =\ A\sigma\upsilon\nu\omega t.$ $\gamma. x\ =\ A\eta\mu\omega t$

**2.47** Η δύναμη επαναφοράς σ' ένα σώμα που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0{,}1$m μεταβάλλεται όπως στο σχήμα. Η εξίσωση της ταχύτητας είναι:




$\alpha.\ \upsilon = 0{,}5\eta\mu 5t$
$\boldsymbol{\beta}.\ \upsilon = 0{,}5\eta\mu(5t + \frac{\pi}{2})$
$\boldsymbol{\gamma}.\ \upsilon =\ 0{,}5\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$

**2.48** Σε μια ΑΑΤ χωρίς αρχική φάση η μεταβολή ορμής από τη στιγμή $t_o = 0$ ως τη στιγμή $t_1 = T/6$ είναι $\Delta p_1$ ενώ από τη στιγμή $t_1$ ως τη στιγμή $t_2 = T/4$ είναι $\Delta p_2$. Για τις μεταβολές ορμής $\Delta p_1, \Delta p_2$ ισχύει:

$\alpha.\ \Delta p_1 = 2\Delta p_2$ $\beta.\ \Delta p_1 = \Delta p_2$ $\gamma.\ \Delta p_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta p_2$

**2.49** Το πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k$ είναι στερεωμένο στην οροφή. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου στερεώνουμε σώμα βάρους $w$ το οποίο κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν ως θετική ορίσουμε τη φορά προς τα πάνω, τότε η αλγεβρική τιμή της δύναμης που δέχεται η οροφή από το ελατήριο συναρτήσει της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας, δίνεται από τη σχέση:

$\alpha.\ F'_{\varepsilon\lambda} = -w + kx$ $\beta.\ F'_{\varepsilon\lambda} = -w - kx$ $\gamma.\ F'_{\varepsilon\lambda} = w - kx$

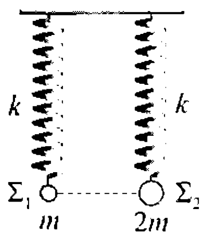
**2.50** Ένα σώμα μάζας $m$ είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k$ και ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα πάνω μέχρι να φτάσει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αν $g$ η επιτάχυνση της βαρύτητας, το μέτρο της μέγιστης δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι ίσο με:

$\alpha.\ \mu\eta\delta\acute{\varepsilon}\nu$ $\beta.\ mg$ $\gamma.\ 2mg$

**2.51** Ένα σώμα ισορροπεί στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου. Αν στη θέση ισορροπίας η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $\Delta l = 2{,}5$ cm και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$\alpha.\ \omega = 10\, rad/s$ $\beta.\ \omega = 20\, rad/s$ $\gamma.\ \omega = 25\, rad/s$

**2.52** Τα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ του σχήματος εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτη ταλάντωσης $A_1 = A$ και $A_2 = 2A$, αντίστοιχα. Τα μέτρα των μέγιστων δυνάμεων του ελατηρίου, $F_{max1}$ και $F_{max2}$, που δέχονται τα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ συνδέονται με τη σχέση:




**α.** $F_{max1}/F_{max2} = 1/2$
**β.** $F_{max1}/F_{max2} = 2$
**γ.** $F_{max1}/F_{max2} = 1$

**2.53** Ελατήριο σταθεράς k είναι κατακόρυφο με το κάτω άκρο του στερεωμένο σε οριζόντιο επίπεδο. Τοποθετούμε πάνω στο ελατήριο σώμα $\Sigma_1$ μάζας $M$ το οποίο κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A$ . Όταν η φάση της ταλάντωσης αυξηθεί κατά $\pi$ τοποθετούμε πάνω στο σώμα $\Sigma_1$ ένα σώμα $\Sigma$ μάζας $m$ και τότε το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πάλι με ίδιο πλάτος Α. Ο λόγος των μαζών $m/M$ είναι :

$\alpha.\ 1$ $\beta.\ 2$ $\gamma.\ 1/2$

**2.54** Σώμα κάνει ΑΑΤ ,τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν και η αλγεβρική τιμή της δύναμη επαναφοράς είναι αρνητική. Τη χρονική στιγμή $t = T/6$ ο λόγος της κινητικής προς την δυναμική ενέργεια $(K/U)$ είναι :

$\alpha.\sqrt{2}$ $\beta.\ \sqrt{3}$ $\gamma.3$

**2.55** Ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k$ έχει το πάνω άκρο του στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και ενώ αυτό βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους, στερεώνεται μάζα $m$. Από τη θέση αυτή το σώμα αφήνεται ελεύθερο και αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με:

α. $m^2g^2/k$ β. $2m^2g^2/k$ γ. $m^2g^2/2k$

**2.56** Δίσκος μάζας $M$ ισορροπεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k$. Τοποθετούμε πάνω στο δίσκο ένα σώμα μάζας $m$ και το σύστημα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι 16 φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια ταλάντωσης ο λόγος των μαζών $M/m$ είναι:

α. 8 β. 4 γ. 2

**2.57** Σώμα κάνει ΑΑΤ χωρίς αρχική φάση. Αν το έργο της δύναμης επαναφοράς στο χρονικό διάστημα $t_o = 0$ έως $T/12$ είναι $W = -2j$ τότε η ενέργεια $E$ της ταλάντωσης είναι :

α. $2j$ β. $4j$ γ. $8j$



**2.58** Σώμα μάζας $m$ ισορροπεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k$ . Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω κατά $d$ και κάποια στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει ΑΑΤ . Όταν διανύσει διάστημα $s = 10cm$ η φάση της ταλάντωσης έχει αυξηθεί κατά $\pi$ και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται ίση με την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου για πρώτη φορά. [ $g = 10m/s^2$ )]
Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι :

α. $5\,\frac{rad}{s}$ β. $10\frac{rad}{s}$ γ. $5\sqrt{2}\frac{rad}{s}$

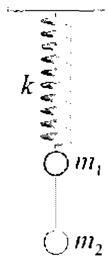
**2.59** Το ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k$ του σχήματος είναι κατακόρυφο και έχει το κάτω άκρο του ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο. Από ύψος $h$, πάνω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, αφήνουμε ελεύθερο σώμα μάζας $m$. Το σώμα κινείται στην ευθεία του άξονα του ελατηρίου, καρφώνεται στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και στη συνέχεια εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας που απέχει κατά $d = 2/3\,h$ από την θέση του φυσικού μήκους. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι


α. $U_{ελ(max)} = 2kh^2$ β. $U_{ελ(max)} = 3kh^2$ γ. $U_{ελ(max)} = 4kh^2$

**2.60** Τα σώματα του διπλανού σχήματος έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$ και ηρεμούν στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k$. Τραβώντας το σώμα μάζας $m_2$ προς τα κάτω, το απομακρύνουμε κατά $d = mg/k$ και το αφήνουμε να κινηθεί. Αν $T_1$ η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος που συνδέει τα δύο σώματα και $T_2$ η μέγιστη τιμή της, τότε ο λόγος $T_2/T_1$ είναι ίσος με:

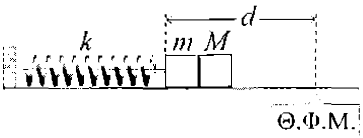

*α.* 2 *β.* 3 *γ.* 4

**2.61** Τα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ του διπλανού σχήματος ισορροπούν. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει τα σώματα και τότε το σώμα $\Sigma_1$ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν η ταχύτητα του $\Sigma_1$ μηδενίζεται για πρώτη φορά, το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων είναι:



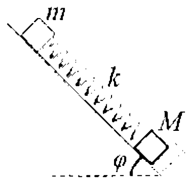

*α.* $m_1/m_2 = 2$ *β.* $m_1/m_2 = 3/2$ *γ.* $m_1/m_2 = 1$

**2.62** Τα σώματα του σχήματος με μάζες $m$ και $M = 3m$ βρίσκονται σε επαφή και το σώμα μάζας $m$ είναι δεμένο με ελατήριο σταθεράς $k$ το οποίο με τη βοήθεια νήματος είναι συσπειρωμένο κατά $d$. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Η μέγιστη απόσταση του σώματος μάζας $m$ από την αρχική του θέση είναι:




*α.* $2d$ *β.* $\frac{5}{3}d$ *γ.* $1{,}5d$

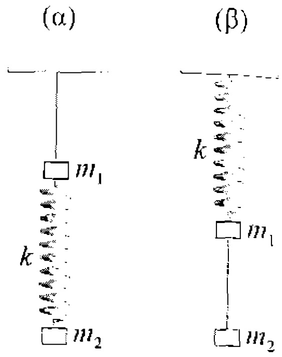
**2.63** Το σώμα μάζας $m$ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A$. Η ελάχιστη τιμή της μάζας $M$ ώστε να μην χάνει την επαφή της με το δάπεδο που είναι κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο είναι




*α.* $M = \frac{kA}{g\eta\mu\varphi} + m$

*β.* $M = \frac{kA}{g\eta\mu\varphi} - m$

*γ.* $M = \frac{kA}{g\eta\mu\varphi}$




**2.64** Στη διάταξη του σχήματος (α) απομακρύνουμε το σώμα μάζας $m_2$ κατά $d$ προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Παρατηρούμε ότι το νήμα μόλις που δεν χαλαρώνει.
Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στη διάταξη του σχήματος (β) απομακρύνοντας το σώμα μάζας $m_2$ κατά $d'$
Η μέγιστη τιμή της απόστασης $d'$ ώστε να μην χαλαρώσει το νήμα στο σχήμα (β) είναι :

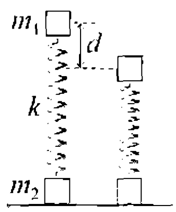
$\alpha.\ d' = d$ $\qquad$ $\beta.\ d' = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} d$ $\qquad$ $\gamma.\ d' = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} d$

**2.65** Σώμα μάζας $m$ είναι τοποθετημένο πάνω σε σώμα μάζας $M$ και το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k$. Αφαιρούμε το σώμα $m$ και τότε το $M$ κάνει ΑΑΤ με ενέργεια $E$. Όταν το σώμα M βρίσκεται στην ανώτερη θέση του τοποθετούμε ακαριαία ξανά πάνω του το σώμα $m$ και στη συνέχεια το σύστημα των δύο σωμάτων ταλαντώνεται με ενέργεια $E'$. Για τις ενέργειες $E'$ και $E$ ισχύει:

$\alpha.\ E' = \dfrac{m^2 g^2}{k}$ $\qquad$ $\beta.\ E' = 2\dfrac{m^2 g^2}{k}$ $\qquad$ $\gamma.\ E' = 4\dfrac{m^2 g^2}{k}$

**2.66** Σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m$ είναι τοποθετημένο πάνω σε σώμα $\Sigma_2$ μάζας $M$. Το σώμα $\Sigma_2$ βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k$. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει απλή αρμονική ταλάντωση σε οριζόντιο άξονα. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των σωμάτων είναι $\mu_s$ η μέγιστη τιμή του πλάτους ώστε τα δύο σώματα να μην αποχωρίζονται είναι:

$\alpha.\ \mu_s g/\omega^2$ $\qquad$ $\beta.\ \dfrac{M}{m}\dfrac{\mu_s g}{\omega^2}$ $\qquad$ $\gamma.\ \dfrac{m}{M}\dfrac{\mu_s g}{\omega^2}$



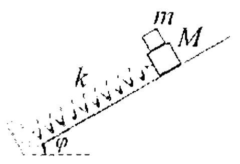

**2.67** Τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2$ και το σύστημα ισορροπεί. Κατεβάζουμε το σώμα μάζας $m_1$ προκαλώντας πρόσθετη συσπείρωση του ελατηρίου κατά $d$ και στη συνέχεια αφήνουμε ελεύθερο το $m_1$ (με μηδενική αρχική ταχύτητα). Η μέγιστη τιμή του $d$ για την οποία δε συμβαίνει απογείωση του σώματος $m_2$ είναι:

**α.** $d = m_2 g/k$

**β.** $d = (m_1 + m_2)g/k$

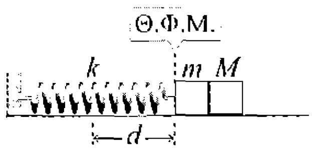
**γ.** $d = (m_1 + m_2)g/2k$

**2.68** Σώμα μάζας $M$ είναι δεμένο στο άνω άκρο ιδανικού ελατηρίου και ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο. Πάνω στο σώμα τοποθετούμε σώμα μάζας $m$. Οι τιμές του συντελεστή τριβής μεταξύ των σωμάτων ώστε να μην ολισθαίνει το ένα σώμα ως προς το άλλο είναι:




$\alpha.\ \mu_s \geq \dfrac{M+2m}{M+m}\varepsilon\varphi\varphi$ $\beta.\ \mu_s \geq \dfrac{M-m}{M+m}\varepsilon\varphi\varphi$ $\gamma.\ \mu_s \geq \dfrac{2Mm}{M+m}\varepsilon\varphi\varphi$

**2.69** Σώμα μάζας $m$ είναι δεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k και βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Απομακρύνουμε το σώμα από την θέση ισορροπίας του προκαλώντας συμπίεση του ελατηρίου κατά $d$ και το αφήνουμε ελεύθερο. Όταν το σώμα επιστρέφει στην αρχική του θέση συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο σώμα μάζας $M$. Αν η κρούση είναι ελαστική το σώμα μάζας $m$ μετά την κρούση κάνει ΑΑΤ με πλάτος $A$. Αν η κρούση είναι πλαστική το συσσωμάτωμα κάνει ΑΑΤ πλάτους $A'$. Αν $A' = A$ τότε για τις μάζες $m$ και $M$ ισχύει:




$\alpha\ \ m = \dfrac{2}{3}M$ $\beta.\ \ m = \dfrac{M}{2}$ $\gamma.\ \ m = \dfrac{M}{3}$

**2.70** Σώμα μάζας $m$ ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου. Με το σώμα συμπιέζουμε το ελατήριο κατά $\Delta l$ και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν το σώμα διανύσει διάστημα $s$ ($s < \Delta l$) συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ένα σώμα μάζας $M$. Τα δύο σώματα λίγο πριν την κρούση έχουν αντίθετες ταχύτητες. Αν το συσσωμάτωμα, μετά την κρούση, κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A' = A$, τότε η σχέση των μαζών είναι:

**α.** $M = m$ **β.** $M = 3m$ **γ.** $M = 2m$

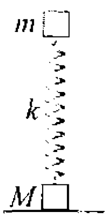
**2.71** Σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1$ είναι δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου , πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και ταλαντώνεται με πλάτος Α και μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{max}$. Ένα σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2 = 3m_1$ κινείται προς το $\Sigma_1$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{max}/2$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το $\Sigma_1$. Για να είναι το πλάτος $A'$ της ταλάντωσης του σώματος $\Sigma_1$ το μέγιστο δυνατό μετά την κρούση πρέπει η κρούση να γίνει σε απόσταση $d$ από την θέση ισορροπίας του Σ1 ίση με:

$\alpha.\ A$ $\beta.\ \dfrac{A}{2}$ $\gamma.\ \dfrac{A\sqrt{3}}{2}$

**2.72** Σώμα μάζας $M$ ισορροπεί στερεωμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου το οποίο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta l_o$. Από ύψος $h = 3\Delta l_o$ πάνω από το σώμα μάζας $M$ αφήνουμε ελεύθερο να πέσει ένα σώμα μάζας $m$. Τα σώματα συγκρούονται πλαστικά και το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης του συσσωματώματος είναι ίση με $g$ τότε για τις μάζες $M$ και $m$ ισχύει:

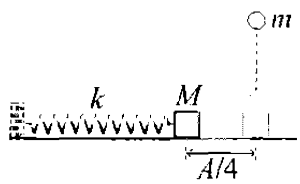
$\alpha.\ M = 3m$ $\beta.\ M = 2m$ $\gamma.\ M = m$

**2.73** Αρχικά τα σώματα του σχήματος ισορροπούν και η ελατηριακή δυναμική ενέργεια είναι $E_o$. Προκαλούμε πρόσθετη συσπείρωση του ελατηρίου κατά $d$ έτσι ώστε η ελατηριακή δυναμική ενέργεια να γίνει $9E_o$ και αφήνουμε ελεύθερο το σώμα μάζας $m$ να κάνει ΑΑΤ. Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το σώμα μάζας Μ από το δάπεδο είναι $N_{max}$ και η ελάχιστη είναι $N_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$. Αν $N_{max} = 2N_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$ η σχέση που συνδέει τις μάζες Μ και m είναι:




**α.** $M = m$ $\beta.\ M = 3m$ $\gamma.\ M = 5m$

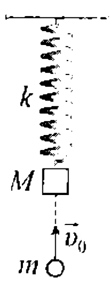
**2.74** Το σώμα $\Sigma$ του σχήματος μάζας Μ κάνει ΑΑΤ πλάτους Α σε λείο οριζόντιο . Όταν το σώμα βρίσκεται σε απόσταση $A/4$ από την θέση ισορροπίας του πέφτει πάνω του ένα άλλο σώμα μάζας $m$ κινούμενο κατακόρυφα. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A/2$. Ο λόγος των μαζών $m/M$ των δύο σωμάτων είναι




$\alpha.$ 4 $\beta.$ 2 $\gamma.\ 3/2$

**2.75** Ένα σώμα $\Sigma$ μάζας $M = 3m$, ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου που έχει το πάνω του άκρο ακλόνητο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ένα βλήμα μάζας $m$, κινείται κατακόρυφα προς τα επάνω με ταχύτητα $\upsilon_0$ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα $\Sigma$. Αν το συσσωμάτωμα που προκύπτει αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{4})$$




το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος ακριβώς πριν την κρούση που μετατράπηκε σε ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$\alpha.$ 25% $\beta.$ 50% $\gamma.$ 75%

**2.76** Σε μια φθίνουσα ταλάντωση η απώλεια ενέργειας (μείωσης της ενέργειας)

*α.* Αυξάνει γραμμικά *β.* Μειώνεται εκθετικά *γ.* Αυξάνει εκθετικά

**2.77** Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, $\Lambda > 0$. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού της ενέργειας είναι:

$\alpha.\ \tau = \dfrac{\ell n2}{4\Lambda}$ $\beta.\ \tau = \dfrac{\ell n2}{2\Lambda}$ $\gamma.\ \tau = \dfrac{2\ell n2}{\Lambda}$

**2.78** Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ισχύει $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, $\Lambda > 0$. Κάποια στιγμή $t$ το πλάτος έχει γίνει $A = A_0/8$. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους είναι:

**α.** $t/2$ **β.** $t/3$ **γ.** $t/8$

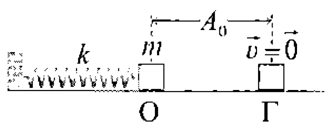
**2.79** Σε μια φθίνουσα ταλάντωση το ποσοστό μείωσης του πλάτους ανά περίοδο:
**α.** Είναι μέγιστο στην πρώτη περίοδο
**β.** Είναι ίδιο σε κάθε περίοδο
**γ.** Μειώνεται εκθετικά

**2.80** Σε μία φθίνουσα ταλάντωση με μικρό $b$ η θερμότητα που αναπτύσσεται στην $1^η$, $2^η$ και $3^η$ περίοδο είναι $Q_1, Q_2, Q_3$. Η μεταξύ τους σχέση είναι:

$\alpha.\ Q_2 = \dfrac{Q_1 + Q_3}{2}$ $\beta.\ Q_2 = \dfrac{Q_1 Q_3}{Q_1 Q_3}$ $\gamma.\ Q_2 = \sqrt{Q_1 Q_3}$

**2.81** Σε μία φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος μειώνεται εκθετικά σύμφωνα με τη σχέση $A = A_o e^{-\Lambda t}$.
**α.** Η απώλεια ενέργειας μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.
**β.** Το ποσοστό απώλειας ενέργειας στην πρώτη περίοδο είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό απώλειας ενέργειας στη δεύτερη περίοδο.
γ. Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = ln2/\Lambda$ η ενέργεια μειώνεται κατά 75%

**2.82** Στο οριζόντιο ελατήριο του σχήματος, σταθεράς $k = 100$ N/m, έχουμε δέσει στο ελεύθερο άκρο του σώμα Σ μάζας $m = 1$ kg. Απομακρύνουμε το σώμα κατά $A_0 = 0{,}4$ m από τη θέση ισορροπίας και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ταλάντωση. Στο σώμα εκτός της δύναμης επαναφοράς δρα και δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -12\upsilon$ (SI). Κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t_1$ το σώμα περνά από τη θέση $x_1$ έχοντας ταχύτητα $\upsilon_1 = 2$ m/s και επιτάχυνση $a_1 = 6$ m/s². Το έργο της δύναμης αντίστασης στο χρονικό διάστημα από 0 έως $t_1$ είναι ίσο με:




$\alpha.$ $-6$ J $\beta.$ $-1{,}5$ J $\gamma.$ $-2{,}5$ J

**2.83** Σώμα είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k$. Απομακρύνουμε το σώμα κατά $A_0$ από την αρχική του θέση και τη στιγμή $t_0 = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο. Το σώμα κάνει φθίνουσα ταλάντωση στην οποία το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με την εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, όπου $\Lambda$ θετική σταθερά. Τη χρονική στιγμή $t_1$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_0/2$ ενώ στο χρονικό διάστημα $t_0 = 0$ ως $t_1$ το σώμα έχει ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων και το έργο της αντίστασης του αέρα είναι $-12\,j$. Τη στιγμή $t_2 = 2t_1$ η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

***α.*** $E_2 = 1\,J$ ***β.*** $E_2 = 2\,J$ ***γ.*** $E_2 = 3\,J$

**2.84** Ένα σύστημα ελατηρίου - μάζας κάνει φθίνουσα ταλάντωση με περίοδο $T = 1\,s$ και το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Για τις θερμότητες $Q_1$, $Q_2$ που αναπτύσσονται στην πρώτη και στην δεύτερη περίοδο, αντίστοιχα, ισχύει $Q_1/Q_2 = \sqrt{2}$. Ο χρόνος τ υποδιπλασιασμού του πλάτους είναι:
***α.*** 1 s ***β.*** 2 s ***γ.*** 4 s

**2.85** Ένα σώμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση και η απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $x = 0{,}3\eta\mu 10\pi t$ (SI). Αν η συχνότητα του διεγέρτη αυξηθεί κατά 5 Hz, η μέγιστη ταχύτητα διπλασιάζεται σε σχέση με την αρχική. Για τη συχνότητα συντονισμού $f_0$ ισχύει:

***α.*** $f_0 = 5\,Hz$ ***β.*** $5\,Hz < f_0 < 10\,Hz$ ***γ.*** $f_0 > 10\,Hz$

**2.86** Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση για τους ρυθμούς μεταβολής κινητικής και δυναμικής ενέργειας ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = -4\frac{dU}{dt}$$

Όταν η συχνότητα $f$ της ταλάντωσης είναι:

***α.*** $f = 2f_o$ ***β.*** $f = f_o\sqrt{2}$ ***γ.*** $f = f_o/2$

**2.87** Σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση η απομάκρυνση του σώματος δίνεται από τη σχέση $x = 0{,}2\eta\mu 20\pi t$ (SI). Αν η συχνότητα πάρει την τιμή $f_2 = 14$ Hz, η μέγιστη ταχύτητα παίρνει την τιμή $\upsilon_{max} = 5{,}6\pi$ m/s.

**i.** Για τη συχνότητα συντονισμού ισχύει:

*α.* $f_0 < 10$ Hz *β.* $10\text{ Hz} < f_0 < 14$ Hz *γ.* $f_0 > 14$ Hz

**ii.** Για τη συχνότητα $f_1 = 10$ Hz ισχύει:

*α.* $K_{max}/U_{max} < 1$ *β.* $K_{max}/U_{max} = 1$ *γ.* $K_{max}/U_{max} > 1$

**2.88** Σώμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με την άσκηση εξωτερικής περιοδικής δύναμης. Για κάθε συχνότητα μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι:

$\alpha.\ E_{\pi\rho(T)} = Q_{(T)}$ $\beta.\ \frac{dE_{\pi\rho}}{dt} = \frac{dQ}{dt}$ $\gamma.\ D = m\omega^2$

**2.89** Σώμα μάζας $m$ δεμένο στο άκρο ελατηρίου κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα $f$. Η διεγείρουσα δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι της μορφής $F_\delta = F_{max}\eta\mu(\omega t + \pi/3)$ και η εξίσωση απομάκρυνσης είναι $x = A\eta\mu\omega t$. Η σχέση της συχνότητας ταλάντωσης με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι:

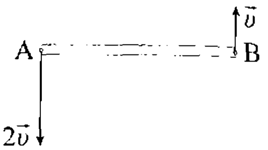
**α.** $f > f_0$ **β.** $f = f_0$ **γ.** $f < f_0$

**2.90** Σε ένα σύστημα σώματος- ελατηρίου ασκείται εξωτερική περιοδική δύναμη . Όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_1$ η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι διπλάσια της μέγιστης κινητικής ενέργειας του σώματος. Όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_2$ τότε η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι διπλάσια της μέγιστης δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης . Για τις συχνότητες $f_1, f_2$

$\alpha.\ f_o = \frac{f_1 + f_2}{2}$ $\beta.\ f_o = \sqrt{f_1 f_2}$ $\gamma.\ f_o = \frac{2f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2}$

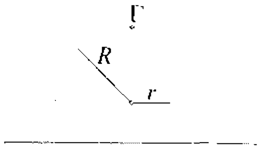
## ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ

**2.91** Η ράβδος του σχήματος έχει μήκος $l$ και περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στη ράβδο ο οποίος διέρχεται από κάποιο σημείο της ράβδου. Η ταχύτητα του άκρου Α έχει μέτρο διπλάσιο του μέτρου της ταχύτητας του άκρου Β. Ο άξονας περιστροφής Ο απέχει από το άκρο Α απόσταση:



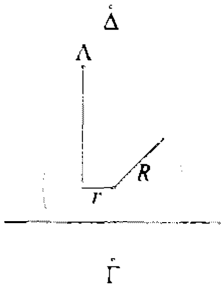

***α.*** $r_A = l/4$   ***β.*** $r_A = 3l/4$   ***γ.*** $r_A = 2l/3$

**2.92** Το καρούλι του σχήματος κυλάει πάνω σε ράγα. Αν για τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σημείων Γ και Δ ισχύει $\upsilon_\Gamma = 3\upsilon_\Delta$, η σχέση των ακτινών $R$ και $r$ είναι:




***α.*** $R = 2r$   ***β.*** $R = 3r$   ***γ.*** $R = 3r/2$

**2.93** Το καρούλι κυλάει σε οριζόντια δοκό ώστε ο εσωτερικός κύλινδρος ακτίνας $r$ $(r = R/3)$ να είναι σε επαφή με τη δοκό. Αν το νήμα είναι συνέχεια κατακόρυφο τότε τα μέτρα των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ έχουν λόγο :

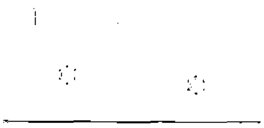



*α.* $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_\Gamma} = 1$   *β.* $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_\Gamma} = \dfrac{1}{2}$   *γ.* $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_\Gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**2.94** Ένας τροχός ακτίνας $R$ κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε το κέντρο μάζας να κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά κατά μέτρο ένα σημείο του τροχού είναι $\upsilon$. Η επιτάχυνση του κατώτερου σημείου του τροχού έχει μέτρο:

*α.* $\dfrac{\upsilon^2}{R}$   *β.* $\dfrac{\upsilon^2}{2R}$   *γ.* $\dfrac{\upsilon^2}{4R}$

**2.95** Ένα τρακτέρ κινείται σε οριζόντιο δρόμο. Οι μπροστινοί τροχοί έχουν ακτίνα $R_1$, ενώ οι πίσω τροχοί έχουν ακτίνα $R_2$ και ισχύει $R_2 = 2R_1$. Αν οι τροχοί κυλάνε χωρίς να ολισθαίνουν:



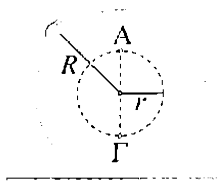
**i.** Τα ανώτερα σημεία των μπροστινών τροχών έχουν ταχύτητες $\upsilon_1$ και $\upsilon_2$ για τις οποίες ισχύει:

***α.*** $\upsilon_2 = 2\upsilon_1$   ***β.*** $\upsilon_2 = \upsilon_1$   ***γ.*** $\upsilon_2 = \sqrt{2}\upsilon_1$

**ii.** Όταν οι μπροστινοί τροχοί κάνουν $N$ στροφές τότε οι πίσω τροχοί θα έχουν κάνει:

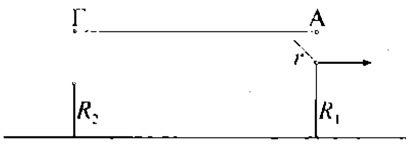
***α.*** $N_2 = 2N$   ***β.*** $N_2 = N$   ***γ.*** $N_2 = N/2$

**2.96** Ο τροχός του σχήματος έχει ακτίνα $R$ και κυλάει σε οριζόντιο επίπεδο. Τα σημεία Α και Γ ανήκουν στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχουν την ίδια απόσταση $r$ από το κέντρο μάζας. Αν ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ είναι $\upsilon_A/\upsilon_\Gamma = 3$ τότε ο λόγος των αποστάσεων $r/R$ είναι:



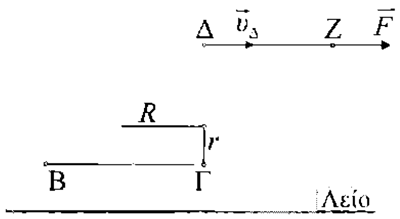

***α.*** $r/R = 1/2$ ***β.*** $r/R = 1/3$ ***γ.*** $r/R = 1/4$

**2.97** Οι δύο τροχοί $T_1$ και $T_2$ έχουν ακτίνες $R_1 = R$ και $R_2 = 3R/4$ και κάνουν κύλιση χωρίς ολίσθηση. Το νήμα είναι πολλές φορές τυλιγμένο στους δύο τροχούς. Αν ο αριθμός των περιστροφών των δύο τροχών σε χρόνο $\Delta t$ είναι $N_1, N_2$. Τότε για το λόγο $N_1/N_2$ ισχύει:



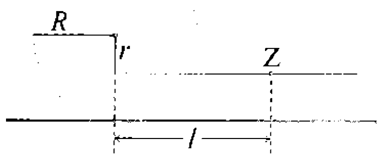

*α.* $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{3}{2}$ *β.* $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{4}{3}$ *γ.* $\dfrac{N_1}{N_2} = 1$

**2.98** Ο τροχός του σχήματος κάνει σύνθετη κίνηση στο λείο δάπεδο. Τα νήματα είναι τυλιγμένα πολλές φορές γύρω από τα αυλάκια του τροχού και ισχύει $R = 2r$. Ο λόγος της ταχύτητας του σημείου Δ προς την ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:



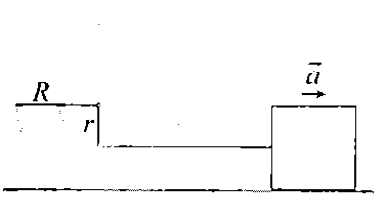

***α.*** $\upsilon_\Delta/\upsilon_{cm} = 2$ ***β.*** $\upsilon_\Delta/\upsilon_{cm} = 1$ ***γ.*** $\upsilon_\Delta/\upsilon_{cm} = 3$

**2.99** Το οριζόντιο τμήμα του νήματος έχει αρχικά μήκος $l$. Τραβάμε το άκρο Ζ και ο τροχός κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση. Για τις ακτίνες ισχύει $R = 2r$. Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετατοπιστεί κατά $\Delta x_{cm} = l/2$ τότε το μήκος του οριζόντιου τμήματος του σχοινιού θα είναι:



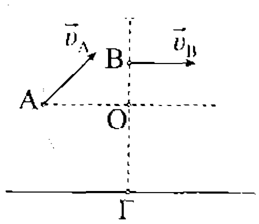

***α.*** $\Delta x = 2l/3$ ***β.*** $\Delta x = 3l/4$ ***γ.*** $\Delta x = l/2$

**2.100** Τροχός ακτίνας $R = 0{,}4\ \text{m}$ φέρει εγκοπή ακτίνας $r = R/2$ στην οποία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται στο μέσον κύβου πλευράς $R$ και μάζας, όπως στο σχήμα. Μετακινούμε τον κύβο με σταθερή



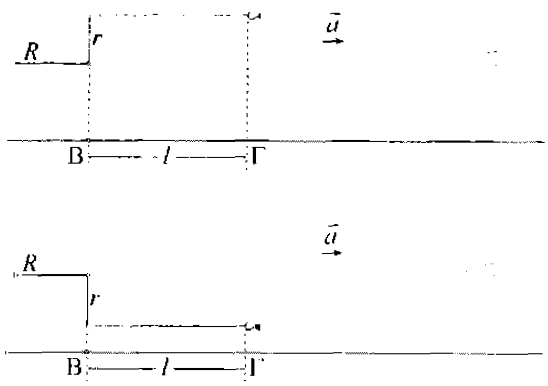
επιτάχυνση $a$ και ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αρχικά ($t_0 = 0$) τα σώματα είναι ακίνητα και το οριζόντιο τμήμα του νήματος έχει μήκος $l = 1{,}5R$. Όταν τα δύο σώματα θα έρθουν σε επαφή η ταχύτητα του κύβου θα είναι:

$\alpha. v = \sqrt{Ra}$ $\beta.\ v = \sqrt{2Ra}$ $\gamma.\ v = \sqrt{\frac{3}{2}Ra}$




**2.101** Ο δίσκος ακτίνας $R$ κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο και κάποια στιγμή $t$ τα σημεία Α και Β που απέχουν από το κέντρο του δίσκου $OA = R$ και $OB = R/2$ έχουν ταχύτητες ίδιου μέτρου $v_A = v_B = v$ όπως δείχνει το σχήμα . Την ίδια χρονική στιγμή το σημείο Γ του τροχού που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο έχει ταχύτητα μέτρου $v_\Gamma$:

$\alpha.\ v_\Gamma = 0$ $\beta. v_\Gamma = \dfrac{v}{4}$ $\gamma.\ v_\Gamma = \dfrac{v}{5}$




**2.102** Τα δύο οχήματα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση $a$ και έλκουν δύο ίδιους τροχούς ακτίνας $R$. Στους τροχούς υπάρχει εγκοπή ακτίνας $r$, με $r = R/2$, έτσι ώστε το σχοινί να έχει τυλιχθεί πολλές φορές γύρω τους. Οι τροχοί κυλάνε χωρίς να ολισθαίνουν με σκοπό να μεταφερθούν στο Γ. Ο πάνω τροχός φτάνει στο Γ σε χρόνο $\Delta t$ και ο κάτω τροχός σε χρόνο $\Delta t'$. Ο λόγος $\Delta t'/\Delta t$ είναι:

$\alpha.\ \Delta t/\Delta t' = 1$ $\beta.\ \Delta t/\Delta t' = 2$ $\gamma.\ \Delta t/\Delta t' = \sqrt{3}$

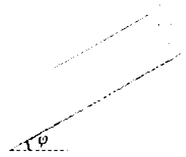
**2.103** Ομογενής ράβδος ΑΓ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή η ταχύτητα του άκρου Α της ράβδου είναι αντίθετη της ταχύτητας του κέντρου μάζας. Η ταχύτητα του άκρου Γ είναι

$\alpha.\ v_{cm}$ $\beta.\ 2v_{cm}$ $\gamma.\ 3v_{cm}$

**2.104** Δίσκος ακτίνας $R$ κάνει κύλιση σε κεκλιμένο επίπεδο. Κάθε στιγμή η ταχύτητα του κατώτερου σημείου έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου. Ο λόγος των μέτρων της ταχύτητας του ανώτερου σημείου προς την ταχύτητα του κατώτερου σημείου είναι:

$\alpha.\ \sqrt{2}$ $\beta.\ 2$ $\gamma.\ \sqrt{3}$

**2.105** Ο τροχός του σχήματος έχει μάζα $m$ και ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 45°$ με τη βοήθεια νήματος. Που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια. Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής ώστε ο τροχός ισορροπεί είναι:

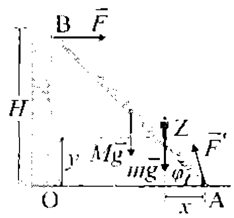



$\alpha.\ 1/2$ $\qquad$ $\beta.\ \sqrt{2}/2$ $\qquad$ $\gamma.\ 1$

**2.106** Ομογενής δοκός ΑΒ, μάζας $M$ και μήκους $l$, ισορροπεί οριζόντια και στηρίζεται σε δύο σημεία Γ και Δ για τα οποία ισχύει $(\text{ΑΓ}) = l/8$ και $(\text{ΑΔ}) = 3l/4$. Ένας άνθρωπος μάζας $m$ στέκεται πάνω στη δοκό στη θέση Α. Η μέγιστη μάζα του ανθρώπου ώστε να μην ανατρέπεται η δοκός είναι:

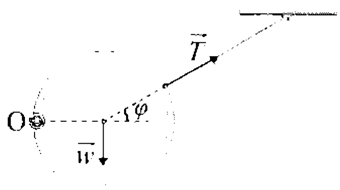
$\alpha.\ m = M$ $\qquad$ $\beta.\ m = 2M$ $\qquad$ $\gamma.\ m = 3M$

**2.107** Ομοιόμορφη σκάλα μάζας $M$ και μήκους $l$ ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\varphi = 45°$ με το οριζόντιο επίπεδο. Άνθρωπος μάζας $m = 3M$ αρχίζει να ανεβαίνει στη σκάλα. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σκάλας και οριζόντιου επιπέδου είναι $\mu_s = 0{,}5$, το μέγιστο ύψος $y$ που μπορεί να φτάσει ο άνθρωπος είναι:



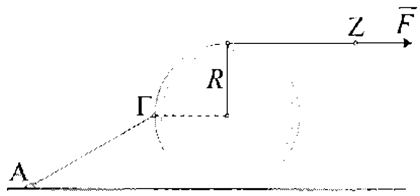

**α.** $y = l/4$ $\qquad$ **β.** $y = l\sqrt{2}/2$ $\qquad$ **γ.** $y = l\sqrt{2}/4$

**2.108** Ο δακτύλιος του σχήματος είναι ομογενής, έχει μάζα $m$ και ισορροπεί. Η γωνία $\varphi$ είναι $30°$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g$. Η δύναμη που δέχεται ο δακτύλιος από τον άξονα περιστροφής έχει μέτρο:



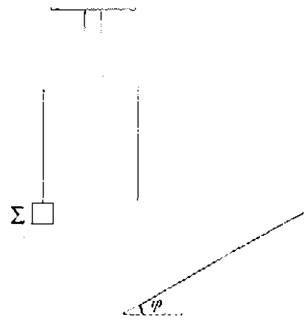

**α.** $2mg$ $\qquad$ **β.** $mg\sqrt{3}$ $\qquad$ **γ.** $mg$

**2.109** Ομογενής δίσκος, μάζας $M$ και ακτίνας $R$, βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στην περιφέρεια του δακτυλίου έχουμε τυλίξει πολλές φορές ένα αβαρές και μη ελαστικό νήμα. Το σημείο Γ της περιφέρειας, που βρίσκεται σε ύψος $h = R$ από το δάπεδο, το έχουμε συνδέσει με το σημείο Α του εδάφους με άλλο ιδανικό νήμα. Ασκούμε οριζόντια δύναμη $F$ στο σημείο Ζ, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ο δακτύλιος παραμένει ακίνητος. Η Τάση του νήματος ΑΓ έχει μέτρο:




$\alpha.\ T = 2F$ $\qquad$ $\beta.\ T = F\sqrt{2}$ $\qquad$ $\gamma.\ T = F/\sqrt{2}$

**2.110** Το σώμα Σ έχει μάζα $m$ ενώ ο δίσκος έχει μάζα $M$, ακτίνα $R$ και βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30°$. Ο δίσκος και το σώμα Σ συνδέονται με νήμα που διατρέχει ακίνητη τροχαλία. Αν το σύστημα ισορροπεί:



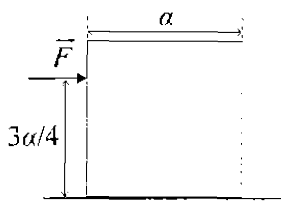

**i.** η μάζα του δίσκου είναι:

***α.*** $M = m$ ***β.*** $M = 2m$ *γ.* $M = 3m$

**ii.** Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής είναι

***α.*** $\mu_s = 1/3$ ***β.*** $\mu_s = 1/\sqrt{3}$ *γ.* $\mu_s = \sqrt{3}/4$

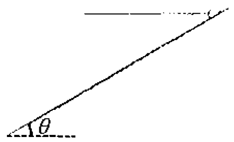
**2.111** Ο κύβος ακμής $\alpha$ του σχήματος έχει μάζα $m = 6kg$ βρίσκεται ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή οριακής τριβής $\mu_s = 0{,}8$. Αυξάνουμε σταδιακά το μέτρο της δύναμης F. Αν είναι $g = 10m/s^2$ τότε η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ για την οποία η πλάκα παραμένει ακίνητη είναι:




$\alpha.\ 40N$ $\beta.48N$ $\gamma.\ 54N$



**2.112** Ένας τροχός βάρους $w$ ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\theta = 60°$ με τη βοήθεια οριζόντιου νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρειά του, όπως στο σχήμα. Ο τροχός δέχεται δύναμη στατικής τριβής με:

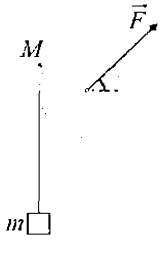



*α.* φορά προς τα κάτω και μέτρο $T_s = w/3$.

*β.* φορά προς τα πάνω και μέτρο $T_s = w/3$.

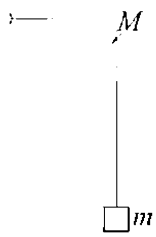
*γ.* φορά προς τα πάνω και μέτρο $T_s = w/\sqrt{3}$.

**2.113** Για να συγκρατείται ακίνητος ένας δίσκος μάζας $M$ σε επαφή με κατακόρυφο επίπεδο δέχεται πλάγια δύναμη $\vec{F}$ με γωνία $\varphi = 45^o$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από την περιφέρεια του δίσκου είναι τυλιγμένο νήμα και στην άκρη του νήματος είναι στερεωμένος κύβος μάζας $m$ που ισορροπεί. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_\sigma = 0{,}25$. Η μέγιστη τιμή της μάζας του κύβου μπορεί να είναι :




$\alpha.\ m = M$ $\beta.\ m = \dfrac{M}{2}$ $\gamma.\ m = \dfrac{M}{4}$

**2.114** Ο δίσκος του σχήματος έχει μάζα M ενώ το σώμα που κρέμεται έχει μάζα $m$. Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής ώστε να μην ολισθαίνει ο δίσκος είναι:




$\alpha.\ \mu_s = \dfrac{M}{M+m}$

$\beta.\ \mu_s = \dfrac{m}{M+m}$

$\gamma.\ \mu_s = \dfrac{M+m}{M+2m}$

**2.115** Υλικό σημείο μάζας $m$ είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $l$ και ισορροπεί ώστε το νήμα να είναι κατακόρυφο. Το άλλο άκρο Ο του νήματος είναι στερεωμένο στην οροφή. Με το νήμα τεντωμένο πάμε το σώμα σε κάποια θέση Α στην οποία το νήμα είναι οριζόντιο και το εκτοξεύουμε με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα $\upsilon_o$ που έχει φορά προς τα κάτω. Όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο η κινητική ενέργεια του σώματος είναι τετραπλάσια της αρχικής τότε το μέτρο L της στροφορμής είναι:

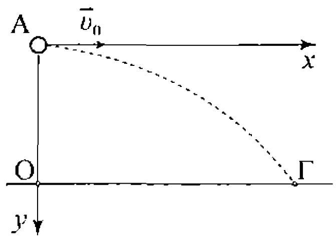
$\alpha.\ 4m\dfrac{\upsilon_o^3}{g}$ $\qquad\beta.\ 3m\dfrac{\upsilon_o^3}{g}$ $\qquad\gamma. 2m\dfrac{\upsilon_o^3}{g}$



**2.116** Υλικό σημείο μάζας m είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $l$ και ισορροπεί ώστε το νήμα να είναι κατακόρυφο. Το άλλο άκρο Ο του νήματος είναι στερεωμένο στην οροφή. Με το νήμα τεντωμένο πάμε το σώμα σε σώμα σε κάποια θέση Α στην οποία το νήμα είναι οριζόντιο και το εκτοξεύουμε με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα. Αν $\vec{p}_o$ είναι η αρχική ορμή του σώματος και $\vec{p}$ η ορμή του όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο για πρώτη φορά, η μεταβολή της στροφορμής του σώματος μέχρι τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο για πρώτη φορά έχει μέτρο ίσο με:

$\alpha. l|\Delta\vec{p}|$ $\qquad\beta. l\,\Delta|\vec{p}|$ $\qquad\gamma. l\sqrt{p^2 - p^2}$

**2.117** Στην οριζόντια βολή ώσπου το σώμα να φτάσει στο έδαφος η μεταβολή της στροφορμής του ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς που περνάει από το Ο έχει αλγεβρική τιμή ίση με $\Delta L$. Η μεταβολή της στροφορμής ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς που περνάει από το Α έχει αλγεβρική τιμή $\Delta L'$. Ποια πρόταση είναι η σωστή:




$\alpha.\ \Delta L' = \Delta L$ $\qquad\beta.\ \Delta L' = \dfrac{\Delta L}{2}$ $\qquad\gamma.\ \Delta L' = 3\Delta L$

**2.118** Δύο αστροναύτες με μάζα m ο καθένας , βρίσκονται στο διάστημα είναι δεμένοι με αβαρές νήμα, μήκους $l$ , και περιστρέφονται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους, με γραμμική ταχύτητα μέτρου $\upsilon$ ο καθένας. Τραβώντας το σχοινί, πλησιάζουν σε απόσταση $l/2$ .

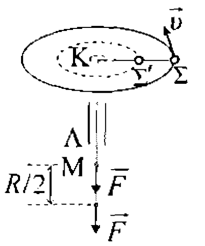
**i.** Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κάθε αστροναύτη:

***α.*** διπλασιάζεται ***β.*** τετραπλασιάζεται ***γ.*** παραμένει σταθερό.

**ii** Η ενέργεια που δαπανήθηκε από τους αστροναύτες ώστε να πλησιάσουν σε απόσταση $l/2$ είναι ίση με:

***α.*** μηδέν ***β.*** $3m\upsilon^2$ ***γ.*** $4m\upsilon^2$

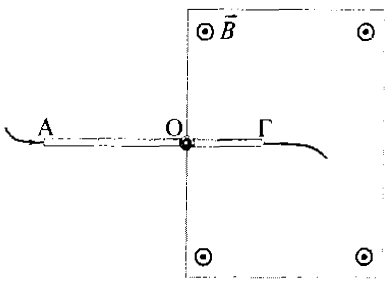
**2.119** Το σφαιρίδιο του σχήματος, μάζας $m$, διαγράφει οριζόντιο κύκλο ακτίνας $(\text{ΚΣ}) = R$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega$ δεμένο στο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος, το οποίο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ. Στο άκρο Μ του νήματος ασκείται κατάλληλη δύναμη $F$, ώστε αυτό να κινηθεί χωρίς τριβή διαμέσου του σωλήνα μέχρι η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου μάζας $m$ να γίνει $\text{ΚΣ}' = R/2$. Σε όλη τη διάρκεια της μεταβολής της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, θεωρούμε ότι το σφαιρίδιο κινείται εκτελώντας κυκλική κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Το έργο της δύναμης $F$ για τη μετακίνηση του σφαιριδίου μάζας $m$ θα είναι ίσο με:




***α.*** $\frac{1}{2}m\omega^2R^2$ ***β.*** $\frac{2}{3}m\omega^2R^2$ ***γ.*** $\frac{3}{2}m\omega^2R^2$

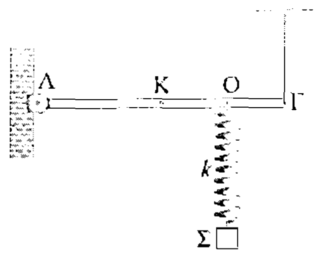
**Συνδυαστικά Θέματα**

**2.120** Λεπτή μεταλλική ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $l$ και μάζας $m$ μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα Ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση $x = 2l/3$ από το άκρο Α . Η ράβδος τροφοδοτείται από συνεχές ρεύμα έντασης Ι και ισορροπεί με το 1/3 του μήκους της να βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο όπως στο σχήμα. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι



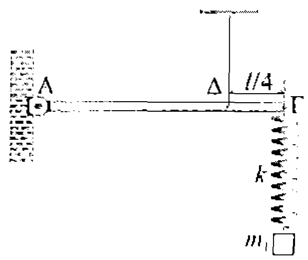

$\alpha. B = \frac{mg}{Il}$ $\beta. B = \frac{2mg}{Il}$ $\gamma. B = \frac{3mg}{Il}$

**2.121** Στο σχήμα η ομογενής ράβδος μάζας $M$ και μήκους $l$ έχει αρθρωθεί στο ένα άκρο της Α, ενώ το άλλο άκρο Γ συνδέεται με νήμα, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε οροφή. Το σώμα Σ έχει μάζα $m = 2M/3$ και ισορροπεί κρεμασμένο στο κάτω άκρο ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου. Το πάνω άκρο του ελατηρίου στηρίζεται στο σημείο O της ράβδου και είναι $(\mathrm{KO}) = (\mathrm{O\Gamma})$. Ανεβάζουμε το σώμα Σ προς τα πάνω, ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και το αφήνουμε να κινηθεί. Η μέγιστη δύναμη που θα δεχτεί το νήμα έχει μέτρο:



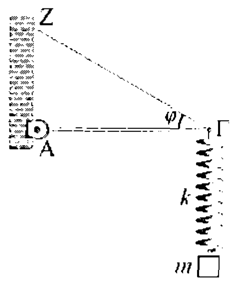

**α.** $T_{max} = 2mg$ **β.** $T_{max} = 2{,}25mg$ **γ.** $T_{max} = 3mg$

**2.122** Η ομογενής ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα $M = 2m$ και ισορροπεί οριζόντια με άρθρωση στο άκρο Α . Στο άκρο της Γ συνδέεται ιδανικό ελατήριο στο κάτω άκρο του οποίου κρέμεται σώμα μάζας $m$. Η ράβδος συγκρατείται με κατακόρυφο νήμα το οποίο συνδέεται στο σημείο της Δ για το οποίο είναι $\Delta\Gamma = l/4$.Αν το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_\theta = 4mg$ τότε το μέγιστο επιτρεπτό πλάτος ώστε το νήμα ούτε να σπάει ούτε να χαλαρώνει είναι :



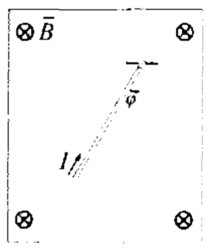

**α.** $3mg/k$ **β.** $mg/k$ **γ.** $2mg/k$

**2.123** Η ράβδος του σχήματος έχει μάζα Μ και το σώμα έχει μάζα $m$ με $M = 2m$. Πάμε το σώμα μάζας $m$ στην θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει ΑΑΤ. Αν το νήμα έχει πολύ μεγάλο όριο θραύσης και η γωνία είναι $\varphi = 30^o$ τότε ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη τιμή της τάσης του νήματος $T_{max}/T_{min}$ είναι:




$\alpha.\ \dfrac{3}{2}$ $\beta.\ \dfrac{5}{3}$ $\gamma.\ \dfrac{3}{1}$

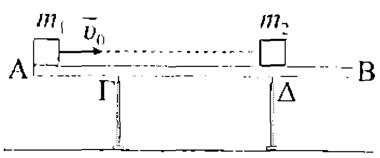
**2.124** Ένας ευθύγραμμος μεταλλικός αγωγός ΑΛ μήκους $l$ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο Α και είναι κάθετος στον αγωγό αγωγός. Κάθετα στο επίπεδο της κίνησης του αγωγού υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο ,έντασης $B$ όπως στο σχήμα. Πάμε τον αγωγό σε μία θέση που σχηματίζει γωνία $30^o$ με την κατακόρυφο και τον συγκρατούμε ακίνητο με την επίδραση δύναμης F που είναι κάθετη στον αγωγό και ασκείται στο άκρο Γ του αγωγού. Κάποια στιγμή διαβιβάζουμε στον αγωγό συνεχές ρεύμα έντασης $I$ και αφήνουμε ελεύθερο και παρατηρούμε ότι ο



αγωγός παραμένει ακίνητος Αν η μάζα του αγωγού είναι $m$ τότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει μέτρο:

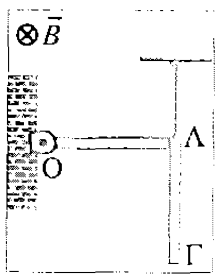
$\alpha.\ B = \dfrac{F}{2Il}$ $\beta.\ B = \dfrac{2F}{Il}$ $\gamma.B = \dfrac{F}{Il}$

**2.125** Η ομογενής δοκός ΑΒ μήκους $l$ και μάζας Μ ισορροπεί σε οριζόντια θέση με δύο στηρίγματα Γ και Δ $ΑΓ = ΔΒ = l/4$. Δύο σώματα με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 3m$ βρίσκονται ακίνητα στα σημεία Α και Δ . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu$ μεταξύ σωμάτων και ράβδου έχει μικρή τιμή($\pi\chi\ \ \mu < 0{,}2$). Δίνουμε στο σώμα μάζας $m_1$ οριζόντια αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = \sqrt{3{,}5\mu g l}$. Αν η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική ελαστική τότε η ελάχιστη τιμή της μάζας Μ της δοκού για να μην χαθεί η επαφή στο Γ είναι:



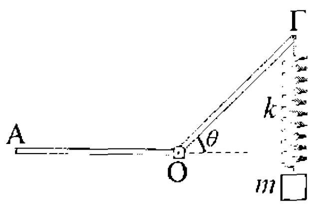

$\alpha.\ M = m$ $\beta.\ \ M = 2m$ $\gamma.\ \ 1{,}5m$

**2.126** Οι ράβδοι ΟΑ και ΑΓ είναι μεταλλικές έχουν ίδιο μήκος $l$ και ίδια μάζα $M$ η κάθε μία και έχουν συνδεθεί ώστε να σχηματίζουν ορθή γωνία και να αποτελούν ένα στερεό σώμα ΟΑΓ. Το στερεό συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο στο άκρο Ο ενώ το σημείο Α συνδέεται μεσω νήματος με την οροφή. Στην περιοχή υπάρχει οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B$ . Όταν ο αγωγός $ΟΑΓ$ δεν διαρρέεται από ρεύμα τότε η τάση του νήματος έχει μέτρο $T$ και η δύναμη από την άρθρωση έχει μέτρο $F$ . Αν διαβιβάσουμε ρεύμα στον αγωγό ΟΑΓ η τάση του νήματος αποκτά μέτρο $T'$ και το μέτρο της δύναμης από την άρθρωση γίνεται $F'$. Αν $T' = T/3$ τότε το μέτρο της δύναμης από την άρθρωση θα είναι:




$\alpha.\ F' = F\sqrt{5}$ $\beta.\ F' = F\sqrt{3}$ $\gamma.\ F' = F\sqrt{2}$

**2.127** Οι δύο ράβδοι του σχήματος έχουν ίδια μάζα $M$ και ίδιο μήκος $l$ και είναι ενωμένες σε σημείο Ο ώστε να σχηματίζουν γωνία $120^o$. Το ελατήριο έχει σταθερά $k$ και το ένα άκρο του είναι στερεωμένο στο άκρο Γ της ράβδου $ΑΓ$. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου έχουμε στερεώσει σώμα μάζας $m$. Αν $m = M/4$ και $\theta = 60^o$ το μέγιστο πλάτος $A_{max}$ ταλάντωσης για να μην ανατρέπονται οι ράβδοι είναι:



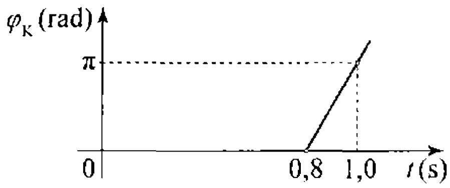

$\alpha.\ \dfrac{5mg}{2k}$ $\beta.\dfrac{2mg}{k}$ $\gamma.\dfrac{mg}{k}$

## ΚΥΜΑΤΑ

**2.128** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται στον $x'x$ κατά την θετική φορά. Το σημείο $O(x=0)$ αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_0 = 0$ χωρίς αρχική φάση. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 8T$ το σημείο Κ που βρίσκεται στη θέση $x_\kappa = 2\lambda$ έχει εκτελέσει:

**α.** 8 πλήρεις ταλαντώσεις
**β.** 6 πλήρεις ταλαντώσεις
**γ.** 10 πλήρεις ταλαντώσεις

**2.129** Αρμονικό κύμα διαδίδεται στον $x'x$. Η πηγή $O$ κάνει αρμονική ταλάντωση στον άξονα $y'y$ χωρίς αρχική φάση. Στο σχήμα βλέπουμε τη μεταβολή της φάσης ενός σημείου Κ με $x_\kappa = 8m$. Το μήκος κύματος είναι:

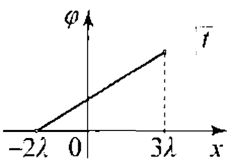



**α.** $\lambda = 2m$ **β.** $\lambda = 4m$ **γ.** $\lambda = 8m$

**2.130** Σε γραμμικό μέσον $x'x$ διαδίδεται αρμονικό κύμα μήκους κύματος λ προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'x$. Οι ταλαντώσεις δύο σημείων Κ και Λ του μέσου έχουν την ίδια στιγμή φάσεις $\varphi_K = 12\pi$ και $\varphi_\Lambda = 4{,}5\pi\, rad$. Αν το Κ βρίσκεται στη θέση $x_K = +2\lambda$ τότε το Λ θα βρίσκεται στη θέση:

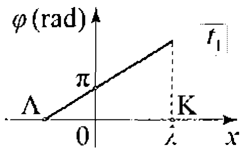
**α.** $x_\Lambda = -1{,}75\lambda$ **β.** $x_\Lambda = +5{,}75\lambda$ **γ.** $x_\Lambda = -2{,}75\lambda$

**2.131** Αρμονικό κύμα διαδίδεται στον x΄x. Το σημείο Ο κάνει αρμονική ταλάντωση στον y΄y σύμφωνα με την εξίσωση $y = A \cdot \eta\mu\omega t$. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η φάση των διαφόρων σημείων του άξονα x΄x τη χρονική στιγμή $t$. Ένα σημείο Κ βρίσκεται στη θέση $x_K = 3\lambda$ . Η φάση του Κ τη χρονική στιγμή $t$ είναι:




**α.** $\varphi_K = 6\pi$ **β.** $\varphi_K = 4\pi$ **γ.** $\varphi_K = 10\pi$

**2.132** Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται προς την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σημείο Ο $(x = 0)$ ξεκινά την ταλάντωσή του διερχόμενο από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται η φάση των σημείων του άξονα $x$ τη χρονική στιγμή $t_1$ που το κύμα έχει

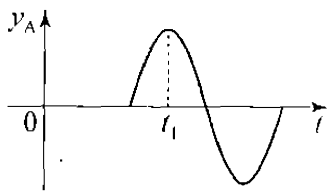


φτάσει μέχρι το σημείο Λ. Αν ένα σημείο Κ βρίσκεται στην θέση $x_K = \lambda$ η διαφορά φάσης $\varphi_K - \varphi_\Lambda$ των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ μετά τη στιγμή $t_1$ είναι:
***α.*** *π* ***β.*** *2π* ***γ.*** *3π*

**2.133** Στον άξονα $x'x$ διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα που έχει μήκος κύματος λ και συχνότητα $f$. Δύο σημεία Κ και Λ αρχίζουν να ταλαντώνονται τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1{,}5T$ και $t_2 = 3T$. Μετά τη στιγμή $t_2$ τα σημεία Κ και Λ έχουν κάθε στιγμή:
**α.** Ίδια απομάκρυνση ίδια ταχύτητα.
**β.** Αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα.
**γ.** Ίδια απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα.

**2.134** Στον άξονα $x'x$ διαδίδεται αρμονικό κύμα. Η απομάκρυνση του σημείου $O(x = 0)$ είναι $y = A\eta\mu\omega t$ και κάποια στιγμή $\tau$ δύο σημεία Κ και Λ έχουν φάσεις $\varphi_K$ και $\varphi_\Lambda$ για τις οποίες ισχύει $\varphi_K + \varphi_\Lambda = 4\pi$ και $\varphi_K > \varphi_\Lambda$. Τη χρονική στιγμή $\tau$ το μέσον Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ που συνδέει τις θέσεις ισορροπίας των σημείων Κ και Λ έχει:
***α.*** Μέγιστη απομάκρυνση. ***β.*** Μέγιστη ταχύτητα. ***γ.*** Μέγιστη επιτάχυνση.

**2.135** Στον άξονα $x'x$ διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα μήκους κύματος λ. Στο σχήμα φαίνεται πως μεταβάλλεται με το χρόνο η απομάκρυνση ενός σημείου Α. Το σημείο Α είναι το πλησιέστερο σημείο στην αρχή Ο που ταλαντώνεται σε συμφωνία φάσης με το Ο. Αν η απομάκρυνση του Ο δίδεται από τη σχέση $y = A\eta\mu\omega t$ τη στιγμή $t_1$ το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $d$ από το Ο η οποία είναι ίση με:




*α.* $\lambda$ *β.* $1{,}5\lambda$ *γ.* $1{,}25\lambda$

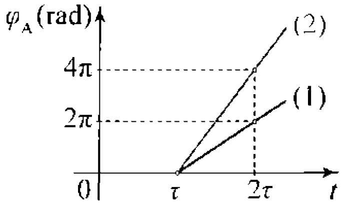
**2.136** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται στον άξονα $xx$ προς την θετική κατεύθυνση και τη στιγμή $t_o = 0$ αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Ο$(x = 0)$. Δύο σημεία Β και Γ βρίσκονται στις θέσεις Β$(x_B)$ και Γ$(x_\Gamma)$ . Κάποια στιγμή $t_1$ η φάση της ταλάντωσης του Β είναι $3\pi/2$. Αν η φάση του Γ γίνεται $3\pi/2$ τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T/2$ τότε:

$\alpha.\, x_B - x_\Gamma = \lambda$ $\beta.\ x_B - x_\Gamma = -\dfrac{\lambda}{2}$ $\gamma.\, x_B - x_\Gamma = -\lambda$

**2.137** Σε χορδή $x'x$ διαδίδεται αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση, το οποίο έχει μήκος κύματος λ. Τη στιγμή $t_1$ το άκρο Ο της χορδής διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και το σημείο Ζ μόλις αρχίζει να ταλαντώνεται. Στο τμήμα ΟΖ της χορδής τη στιγμή $t_1$ υπάρχουν 3 σημεία με μηδενική ταχύτητα. Τη στιγμή $t_1$ τα σημεία της χορδής στο τμήμα ΟΖ με απομάκρυνση $y = +A/2$ είναι:

***α.*** 4 ***β.*** 2 ***γ.*** 6

**2.138** Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσον που συμπίπτει με τον άξονα $xx$. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σημείο Ο(x=0) αρχίζει να κάνει αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση. Στο διάγραμμα του σχήματος βλέπουμε πως μεταβάλλεται η φάση ενός σημείου $A$ του άξονα $x'x$ για δύο περιπτώσεις κυμάτων που διαδίδονται στον $x'x$ στις οποίες το Ο κάνει αρμονική ταλάντωση στον άξονα $y'y$ χωρίς αρχική φάση. Για τα μήκη κύματος ισχύει:




$\alpha. \lambda_2 = 2\lambda_1$ $\beta. \lambda_2 = 4\lambda_1$ $\gamma. \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{2}$

**2.139** Σε μία χορδή Οx διαδίδεται εγκάρσιο κύμα. Η ταλάντωση του σημείου Ο περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Κάποια στιγμή $t_1$ το σημείο Ο διέρχεται από την θέση ισορροπίας του και το κύμα έχει διαδοθεί ως κάποιο σημείο $A$ , την ίδια στιγμή ανάμεσα στα σημεία Ο και Α υπάρχουν 5 σημεία που έχουν ταχύτητα μηδέν.

**i.** Τη στιγμή $t_1$.

**α.** Η ταχύτητα του Ο είναι θετική.

**β.** Η φάση του Ο είναι 5π

**γ.** Υπάρχουν άλλα 3 σημεία που έχουν ίδια ταχύτητα με το $O$

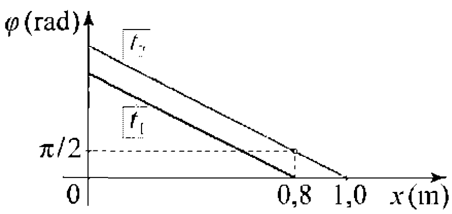
**ii.** Αν η συχνότητα ήταν μειωμένη κατά 20% τότε τη στιγμή $t_1$

**α.** Η ταχύτητα του Ο θα ήταν αρνητική

**β.** Το μέσον Μ του τμήματος ΟΑ θα είχε μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

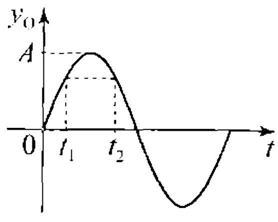
**γ.** Τρία σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ που θα είχαν μηδενική ταχύτητα.

**2.140** Αρμονικό κύμα διαδίδεται στον άξονα $x'x$. Στο διάγραμμα βλέπουμε τις φάσεις των σημείων στα οποία έχει διαδοθεί το κύμα δύο χρονικές στιγμές $t_1$ και $t_2$. Αν η συχνότητα του κύματος είναι $f = 2{,}5Hz$ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:




$\alpha.\ 1\dfrac{m}{s}$ $\beta.\ 0{,}5\dfrac{m}{s}$ $\gamma.\ 2\dfrac{m}{s}$

**2.141** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα συχνότητας $f$ διαδίδεται στον άξονα $x'x$. Η απομάκρυνση του σημείου Ο$(x = 0)$ μεταβάλλεται με το χρόνο όπως δείχνει το διάγραμμα του σχήματος. Από τη στιγμή $t_1$ ως τη στιγμή $t_2$ το κύμα έχει διαδοθεί κατά $\lambda/6$ στον άξονα $x'x$. Το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του σημείου Ο στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι ίσο με :




$\alpha.\ \omega A$ $\beta.\ \omega A/2$ $\gamma.\ \omega A\sqrt{2}$

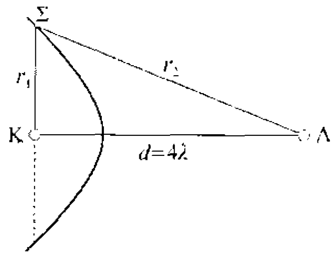
**2.142** Στην επιφάνεια υγρού διαδίδονται αρμονικά κύματα που δημιουργούνται από δύο σύγχρονες πηγές $\Pi_1$ και $\Pi_2$, που ταλαντώνονται με πλάτος $A$ και περίοδο $T$. Σημείο Κ της επιφάνειας απέχει $r_1 = 2{,}5\lambda$ από την $\Pi_1$ και $r_2 = 4\lambda$ από την $\Pi_2$. Η ταλάντωση του Κ διαρκεί χρόνο $\Delta t$ ίσο με:

$\alpha.\ \Delta t = 2{,}5T$ $\beta.\ \Delta t = 1{,}5T$ $\gamma.\ \Delta t = 0$

**2.143** Στην ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων εκτελούν κατακόρυφες ταλαντώσεις με συχνότητα $f$ και δημιουργούν εγκάρσια τη κύματα ίδιου πλάτους $A$. Ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού ταλαντώνεται μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων με πλάτος $2A$. Αν οι δύο πηγές εκτελέσουν ταλάντωση με συχνότητα $2f$ και με το ίδιο πλάτος $A$, τότε το σημείο Σ:

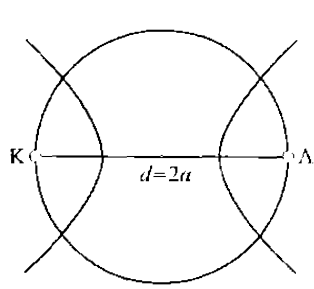
**α.** θα ταλαντωθεί με πλάτος $2A$.
**β.** θα ταλαντωθεί με πλάτος $4A$.
**γ.** θα παραμείνει ακίνητο.

**2.144** Δυο σύγχρονες πηγές Κ, Λ στην επιφάνεια υγρού, βρίσκονται σε απόσταση $d = 4\lambda$ παράγουν αρμονικά κύματα με μήκος κύματος λ. Ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού βρίσκεται πάνω στην καμπύλη ενισχυτικής συμβολής $r_2 - r_1 = 2\lambda$ και το ευθύγραμμο τμήμα ΣΚ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Η απόσταση ΚΣ είναι:




$\alpha.$ 2λ $\beta.$ 3λ $\gamma.$ 4λ

**2.145** Δυο σύγχρονες πηγές Κ, Λ βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού, παράγουν αρμονικά κύματα με μήκος κύματος λ. Οι πηγές βρίσκονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία ενός κύκλου ακτίνας $\alpha = 1{,}25\lambda$. Ο αριθμός των σημείων της περιφέρειας του κύκλου στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή είναι:




$\alpha.6$ $\beta.$ 8 $\gamma.10$

**2.146** Δύο σύγχρονες πηγές βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας υγρού και κάνουν αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $f$. Ένα σημείο Α του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ απέχει $\lambda/2$ από το μέσον Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ. Αν η συχνότητα ήταν $f' = f/2$ τότε στο $A$ θα είχαμε:

**α.** ενισχυτική συμβολή και για τις δύο συχνότητες.

**β.** ενισχυτική συμβολή για τη συχνότητα $f$ και ακυρωτική συμβολή για την $f'$

**γ.** ακυρωτική συμβολή και για τις δύο συχνότητες.

**2.147** Δύο σύγχρονες πηγές $\Pi_1$, $\Pi_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της επιφάνεια υγρού και κάνουν την ίδια ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda$. Η απόσταση των δύο πηγών είναι $d = 0{,}75\lambda$. Αν η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών διπλασιαστεί τότε το πλήθος των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος που κάνουν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος:

***α.*** Μένει ίδιο　　　　***β.*** διπλασιάζεται　　　　***γ.*** τριπλασιάζεται

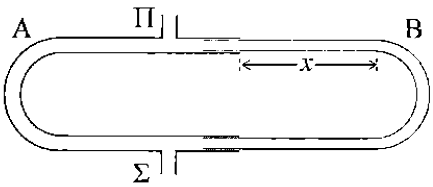
**2.148** Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $\Pi_1$, $\Pi_2$ παράγουν κύματα ίδιου πλάτους στη επιφάνεια υγρού. Μικρό κομμάτι φελλού απέχει $r_1 = 5m$ από την πηγή $\Pi_1$ και $r_2 = 4{,}5m$ από την $\Pi_2$. Το μέγιστο μήκος κύματος που μπορεί να παραχθεί από τις πηγές, προκειμένου να παραμένει ακίνητος ο φελλός είναι: 

$\alpha. 2m$　　　　$\beta. 1m$　　　　$\gamma. 0{,}5m$

**2.149** Δύο σύγχρονες πηγές βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας υγρού. Η ελάχιστη απόσταση $d_{\varepsilon\lambda}$ δύο σημείων του ευθυγράμμου τμήματος που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος είναι:

$\alpha.\ \lambda$　　　　$\beta.\ \lambda/2$　　　　$\gamma. \lambda/4$

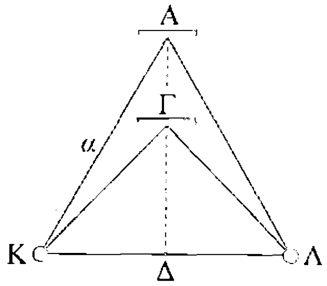
**2.150** Στη διάταξη που αποτελείται από δύο σωλήνες Α και Β. Ο σωλήνας $B$ μπορεί να μετακινείται εντός του $A$ ώστε να αυξάνει το μήκος $x$. Η πηγή Π παράγει ήχο μήκους κύματος $\lambda = 30cm$.Τα 2 κύματα συμβάλλουν στο Σ . Η ένταση του ήχου στο Σ είναι μέγιστη όταν η απόσταση x παίρνει τιμή $x_o = 40cm$.




Η αμέσως επόμενη τιμή της απόστασης για την οποία η ένταση του ήχου στο Σ γίνεται ξανά μέγιστη είναι:

$\alpha.\ 47{,}5cm$　　　　$\beta.\ 55cm$　　　　$\gamma.\ 60cm$

**2.151** Στην ελεύθερη επιφάνεια νερού που ηρεμεί θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΚΑΛ πλευράς $\alpha = 6\lambda$. Στο σημείο Κ τοποθετούμε ένα μικρό καρφί κάθετο στην επιφάνεια του υγρού το οποίο με τη βοήθεια διεγέρτη το αναγκάζουμε να ταλαντώνεται κάθετα στην επιφάνεια του νερού δημιουργώντας έτσι ένα εγκάρσιο κύμα μήκους κύματος $\lambda$. Για την παρατήρηση φαινομένων συμβολής τοποθετούμε έναν επίπεδο ανακλαστήρα κάθετο στη διάμεσο ΑΔ της πλευράς ΚΛ. Αρχικά τοποθετούμε τον ανακλαστήρα στο Α και στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε το πείραμα τοποθετώντας τον ανακλαστήρα στο Γ που βρίσκεται σε απόσταση $\Delta\Gamma = 4\lambda$. Σε πόσα σημεία του τμήματος ΑΓ μπορούμε να τοποθετήσουμε τον ανακλαστήρα και να παρατηρήσουμε ενισχυτική συμβολή στο σημείο Λ.




$\alpha.$ 2 $\qquad\qquad$ $\beta.$ 3 $\qquad\qquad$ $\gamma.$ 4

**2.152** Σε χορδή σχηματίζεται στάσιμο κύμα του οποίου η εξίσωση απομάκρυνσης είναι $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu\omega t$ .Ένα σημείο Γ της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = \lambda/6$ έχει για πρώτη φορά μηδενική ταχύτητα όταν η απομάκρυνση του είναι:

$\alpha.$ $y = 2A$ $\qquad\qquad$ $\beta.$ $y = A$ $\qquad\qquad$ $\gamma.$ $y = \frac{A}{2}$

**2.153** Ελαστική χορδή ΟΚ μήκους L, που βρίσκεται στη διεύθυνση του άξονα x΄Οx, έχει στερεωμένο το ένα άκρο της Κ σε ακλόνητο σημείο ενώ το αριστερό της άκρο Ο βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και είναι ελεύθερο να κινηθεί. Με κατάλληλη διαδικασία δημιουργείται στη χορδή στάσιμο κύμα με συνολικά 5 δεσμούς. Στο σημείο $x = 0$ δημιουργείται κοιλία με πλάτος ταλάντωσης $2A$. Το σημείο που βρίσκεται στο μέσο $M$ της χορδής ταλαντώνεται με πλάτος:

$\alpha.$ $A$ $\qquad\qquad$ $\beta.$ $A\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $\gamma.$ $2A$

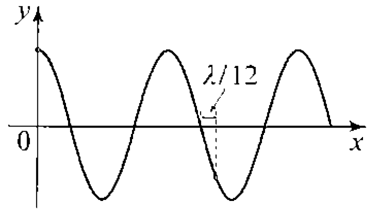
**2.154** Σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$ διαδίδονται ταυτόχρονα δύο αρμονικά κύματα των οποίων οι έχουν εξισώσεις είναι: $y_1 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ και $y_2 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$ οπότε δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στο $O\ (x = 0)$. Ένα σημείο Κ του ελαστικού μέσου είναι η πλησιέστερη κοιλία στο Ο που ταλαντώνεται έχοντας την ίδια φάση με την κοιλία Ο. Μεταβάλλοντας τη συχνότητα των αρχικών κυμάτων καταφέρνουμε το σημείο Κ να γίνει ο τρίτος δεσμός μετά το σημείο Ο. Η συχνότητα των αρχικών κυμάτων μεταβλήθηκε κατά:

$\alpha.$ +25%. $\qquad\qquad$ $\beta.$ −20%. $\qquad\qquad$ $\gamma.$ +20%.

**2.155** Σε γραμμικό ελαστικό μέσο, κατά μήκος του ημιάξονα $Ox$, δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στη θέση $x = 0$. Δύο σημεία Κ και Λ του ελαστικού μέσου βρίσκονται αριστερά και δεξιά του πρώτου δεσμού, μετά τη θέση $x = 0$, σε αποστάσεις $\lambda/6$ και $\lambda/12$ από αυτόν αντίστοιχα, όπου $\lambda$ το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα. Ο λόγος των μεγίστων ταχυτήτων $v_{Kmax}/v_{\Lambda max}$ των σημείων αυτών είναι:

$\alpha.\ \sqrt{3}$ $\beta.\ 1/3$ $\gamma.\ 3$

**2.156** Ένα στάσιμο κύμα που δημιουργείται σ' ένα γραμμικό ελαστικό μέσο περιγράφεται από την εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T)$. Το πλάτος ταλάντωσης $A'$ ενός σημείου Μ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται δεξιά του τρίτου δεσμού από το σημείο $x = 0$ και σε απόσταση $\lambda/12$ από αυτόν είναι:




$\alpha.\ A' = A\sqrt{3}$ $\beta.\ A' = A/2$ $\gamma.\ A' = A$

**2.157** Για στάσιμο κύμα στον $x'x$ ισχύει η εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\ x/\lambda \cdot \eta\mu\omega t$. Δυο σημεία $M$ και $Z$ βρίσκονται στις θέσεις $x_M = \lambda/3$ και $x_z = +1{,}5\lambda$. Όταν το $Z$ φτάνει στην ακραία θετική θέση του η απομάκρυνση του $M$ είναι:

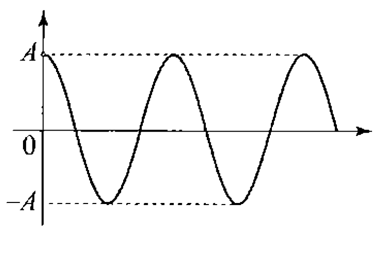
$\alpha.\ y_M = +2A$ $\beta.\ y_M = +A$ $\gamma.\ y_M = -\dfrac{A}{2}$



**2.158** Σε χορδή μήκους $L$ με τα άκρα της στερεωμένης δημιουργείται στάσιμο κύμα. Τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται με συχνότητα $f$ εκτός από τα άκρα της. Αν τετραπλασιάσουμε τη συχνότητα ταλάντωσης της χορδής δημιουργείται πάλι στάσιμο κύμα. Πόσα σημεία της χορδής θα παραμένουν ακίνητα (μαζί με τα άκρα τους).

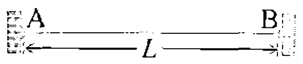
$\alpha.\ 6$ $\beta.\ 5$ $\gamma.\ 4$

**2.159** Δύο κύματα που διαδίδονται στην ίδια ευθεία και από τη συμβολή τους προκύπτει στάσιμο κύμα. Στην θέση $O\ (x = 0)$ εμφανίζεται κοιλία πλάτους $2A$. Στο σχήμα βλέπουμε στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη στιγμή $t_1$. Αν $K$ και $U$ είναι η κινητική και η δυναμική ενέργεια της χορδής τη στιγμή $t_1$ ισχύει:




$\alpha.\ K = U$ $\beta.\ K = \dfrac{3}{4}U$ $\gamma.\ K = 3U$

**2.160** Τα άκρα μιας ελαστικής χορδής μήκους $L = 2{,}5m$ είναι δεμένα στα σταθερά σημεία Α και Β. Στη χορδή έχουμε δημιουργία στάσιμου κύματος από τρέχοντα κύματα που είχαν ταχύτητα διάδοσης $12m/s$. Αν η συχνότητα ταλάντωσης είναι $f = 7{,}2Hz$ τότε το μέσον της χορδής:




**α.** Κάνει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος (κοιλία)

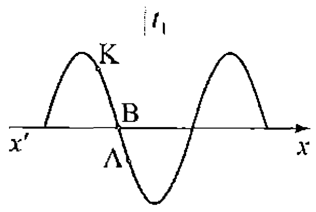
**β.** Μένει ακίνητο (δεσμός)

**γ.** Κάνει ταλάντωση με αρχική φάση $\varphi_o = 0$

**2.161** Σε μια ελαστική χορδή ΟΑ μήκους $L$ που έχει το ένα άκρο της Α ακλόνητο στερεωμένο δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στο άκρο Ο. Αν η ταχύτητα διάδοσης κυματικής διαταραχής στη χορδή είναι υ τότε η ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των σημείων της χορδής είναι:

$\alpha. f = \dfrac{\upsilon}{L}$ $\qquad$ $\beta.\ \dfrac{\upsilon}{2L}$ $\qquad$ $\gamma.\ \dfrac{\upsilon}{4L}$

**2.162** Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το στιγμιότυπο ενός κύματος τη χρονική στιγμή $t_1$ κατά την οποία τα σημεία Κ και Λ έχουν αρνητική ταχύτητα (προς τα κάτω) . Αν η απόσταση των θέσεων ισορροπίας των σημείων Κ και Λ είναι μικρότερη του $\lambda/4$ τότε το στιγμιότυπο αντιστοιχεί:




**α.** Σε στάσιμο κύμα

**β.** Σε τρέχον κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά.

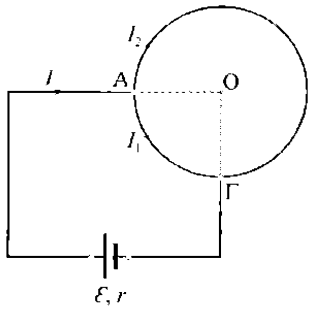
**γ.** Σε τρέχον κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά .

**2.163** Σε μια χορδή της οποίας το ένα άκρο Α είναι ελεύθερο και το άλλο άκρο Γ είναι στερεωμένο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με κοιλία στο ελεύθερο άκρο. Η χορδή ταλαντώνεται με συχνότητα $f$ έτσι ώστε να σχηματίζονται 6 συνολικά δεσμοί. Για να σχηματιστούν 8 συνολικά δεσμοί πρέπει η συχνότητα να μεταβληθεί κατά:

$\alpha. -25\%$ $\qquad$ $\beta.\ 25\%$ $\qquad$ $\gamma. 40\%$

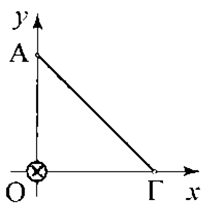
## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

*Σε όλα τα θέματα Β να βρείτε τη σωστή επιλογή και να την αιτιολογήσετε*



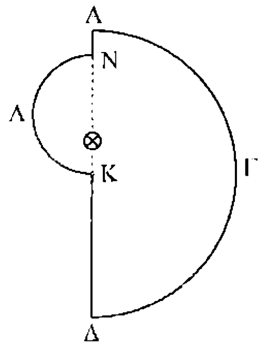

**2.164** Ο μεταλλικός δακτύλιος του σχήματος ακτίνας $\alpha$ αποτελείται από ομογενές και ισοπαχές σύρμα σταθερής ειδικής αντίστασης και τα σημεία του Α και Γ συνδέονται στους πόλους ηλεκτρικής πηγής η οποία διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I$. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου που οφείλεται στα ρεύματα που διαρρέουν το δακτύλιο είναι:

$\alpha.\ B = \dfrac{\mu_o I}{2\alpha}$ $\qquad$ $\beta.\ B = \dfrac{3}{8}\dfrac{\mu_o I}{\alpha}$ $\qquad$ $\gamma.\ 0$




**2.165** Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι διέρχεται από την αρχή Ο ορθογωνίου συστήματος και είναι κάθετος στο επίπεδο του. Η φορά του ρεύματος φαίνεται στο σχήμα . Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στην ίδια απόσταση $\alpha$ από το Ο. Το άθροισμα $\Sigma\vec{B}d\vec{l}$ κατά μήκος του ευθυγράμου τμήματος είναι ίσο με:

$\alpha.\ \dfrac{\mu_o}{4\pi}I$ $\qquad$ $\beta.\ \mu_o I$ $\qquad$ $\gamma.\ \dfrac{\mu_o}{4}I$




**2.166** Θεωρούμε μία επίπεδη κλειστή διαδρομή η οποία αποτελείται από τα ημικύκλια ΑΓΔ, ΚΛΝ και τα ευθύγραμμα τμήματα ΝΑ και ΔΚ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ένας ρευματοφόρος αγωγός είναι κάθετος στο επίπεδο της καμπύλης και τέμνει το επίπεδο της κλειστής καμπύλης σε κάποιο σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΝ. Έστω $A_1$ και $A_2$ τα αθροίσματα $\sum \vec{B}\cdot d\vec{l}$ κατά μήκος των δύο ημικυκλίων ΑΓΔ και ΚΛΝ. Ο λόγος $A_1/A_2$ είναι:

$\alpha.\ 2$ $\qquad$ $\beta. -1$ $\qquad$ $\gamma.\ 1$

**2.167** Τρείς ευθύγραμμοι παράλληλοι αγωγοί (1) , (2) και (3) διαρρέονται από ρεύματα εντάσεων $I_1, I_2, I_2$ . Οι αγωγοί (1) και (2) διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα ίδιας έντασης $I_1 = I_2$ . Συμβολίζουμε με $A$ το άθροισμα $\Sigma\vec{B}d\vec{l}$ κατά μήκος κάποιας καμπύλης. Θεωρούμε τρείς κλειστές καμπύλες $c_1, c_2, c_3$. Η καμπύλη $c_1$

περικλείει και τους τρείς αγωγούς (1),(2) και (3) , η καμπύλη $c_2$ περικλείει τους αγωγούς (2) και (3) ενώ η καμπύλη $c_3$ περικλείει τους αγωγούς (1) και (2) . Αν $A_1, A_2, A_3$ είναι τα αθροίσματα $\Sigma\vec{B}d\vec{l}$ για κάθε καμπύλη και είναι $A_1 = 0$ τότε η σχέση που συνδέει τα $A_2, A_3$ είναι:

$\alpha.\ A_3 = -2A_2$ $\beta.\ A_3 = -A_1$ $\gamma.\ A_3 = -3A_1$

Χριστόφορος Κατσιλέρος

**2.168** Δύο παράλληλοι ρευματοφόροι αγωγοί (1) και (2) απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d$ και διαρρέονται από ρεύματα ίδιας φοράς και ίδιας έντασης $I_1 = I_2 = I$. Αν οι εντάσεις του μαγνητικού πεδίου σε δύο σημεία Κ και Λ που βρίσκονται στο επίπεδο των δύο αγωγών και είναι συμμετρικά ως προς τον αγωγό (2), είναι ίσες τότε η απόσταση των σημείων Κ και Λ είναι:

$\alpha.\ d\sqrt{2}$ $\beta.\ d/2$ $\gamma.\ 2d$

**2.169** Κυκλικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα, οπότε δημιουργεί μαγνητικό πεδίο του οποίου η ένταση στο κέντρο του αγωγού έχει μέτρο $B$. Χρησιμοποιούμε το σύρμα του αγωγού και σχηματίζουμε κυκλικό πλαίσιο με δύο σπείρες, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα ίδιας έντασης. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου είναι:

$\alpha.\ B/2$ $\beta.\ 2B$ $\gamma.\ 4B$



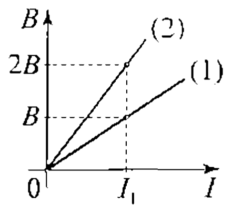
**2.170** Ένα κυκλικό πλαίσιο με $N$ σπείρες, ίδιας ακτίνας $\alpha$ και αντίστασης $R$ η καθεμία, τροφοδοτείται από πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$ και εσωτερικής αντίστασης $r = R$. Αν προσθέσουμε και άλλες όμοιες σπείρες ώστε να διπλασιάσουμε τον αριθμό των σπειρών, η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του πλαισίου αυξάνεται κατά 20%. Ο αριθμός $N$ των σπειρών του πλαισίου είναι:

$\alpha.\ 2$ $\beta.1$ $\gamma.3$

**2.171** Με κυλινδρικό σύρμα μήκους $l$ κατασκευάζουμε κυκλικό αγωγό τον οποίο συνδέουμε στους πόλους ιδανικής πηγής που έχει ΗΕΔ $\mathcal{E}$ και τότε στο κέντρο του κυκλικού αγωγού η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει μέτρο $B$. Αν κόψουμε το σύρμα σε 2 τμήματα με ίδιο μήκος και σχηματίσουμε δύο κυκλικούς αγωγούς τους οποίους συνδέσουμε στους πόλους της ίδιας πηγής ώστε τα κέντρα τους και τα επίπεδα τους σχεδόν να ταυτίζονται , τότε στο κοινό κέντρο των δύο κυκλικών αγωγών η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει μέτρο $B'$ που είναι:

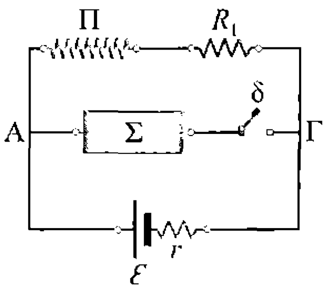
$\alpha.\ B' = 8B$ $\beta.\ B' = 2B$ $\gamma.\ B' = 4B$

**2.172** Δύο σωληνοειδή πηνία Π1 και Π2 έχουν μήκη $l_1, l_2$ και αριθμούς σπειρών $N_1, N_2$ αντίστοιχα. Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε πως μεταβάλλεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό κάθε σωληνοειδούς σαν συνάρτηση της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει. Αν $l_1 = 2\,l_2$ για τους αριθμούς σπειρών των δύο πηνίων ισχύει:



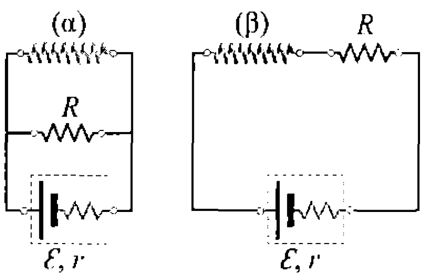

$\alpha.\ \dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{1}{2}$ $\beta.\ \dfrac{N_2}{N_1} = 1$ $\gamma.\ \dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{2}{1}$

**2.173** Πηνίο $\Pi$ με αντίσταση $R_\pi = R$ συνδέεται σε σειρά με αντίσταση $R_1 = R$ και τα άκρα $A$ και $\Gamma$ της συνδεσμολογίας συνδέονται στους πόλους ηλεκτρικής πηγή ΗΕΔ ( $\mathcal{E}$ ) και εσωτερικής αντίστασης $r = R$. Στους πόλους $A$ , $\Gamma$ της πηγής συνδέεται και μια θερμική συσκευή Σ η οποία λειτουργεί κανονικά αν κλείσουμε το διακόπτη. Όταν ο διακόπτης είναι ανοιχτός τότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου έχει μέτρο $B$ . Όταν κλείσουμε το διακόπτη το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου μειώνεται κατά 25%. Η ισχύς κανονικής λειτουργίας της συσκευής είναι:




$\alpha.\ \dfrac{\mathcal{E}^2}{4R}$ $\beta.\ \dfrac{\mathcal{E}^2}{8R}$ $\gamma.\ \dfrac{\mathcal{E}^2}{16R}$

**2.174** Στα κυκλώματα (α) και (β) το πηνίο είναι το ίδιο και έχει αντίσταση $R_\pi = R$. Στο σχήμα (α) η αντίσταση έχει συνδεθεί παράλληλα προς το πηνίο. Στο σχήμα (β) η αντίσταση έχει συνδεθεί στη σειρά με το πηνίο. Η πηγή έχει ΗΕΔ $\mathcal{E}$ και εσωτερική αντίσταση $r = R$.Τα μέτρα των εντάσεων των μαγνητικών πεδίων στο εσωτερικό των δύο πηνίων είναι $B$ στο πηνίο του σχήματος (α) και $B'$ στο πηνίο του σχήματος (β). Ο λόγος $B/B'$ είναι:

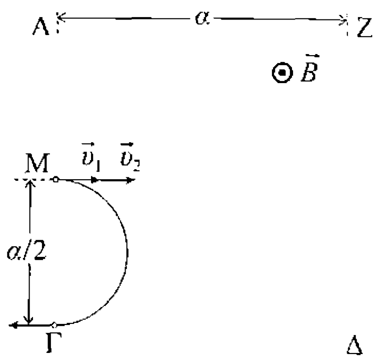



$\alpha.1$ $\beta.2$ $\gamma.1/2$

**2.175** Ένα πρωτόνιο είναι αρχικά ακίνητο και επιταχύνεται με τάση $V$ κινούμενο από ένα σημείο Α του άξονα $x'x$ σε ένα σημείο Γ. Στο σημείο $\Gamma(x_\Gamma = \alpha)$ το πρωτόνιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο εκτείνεται στην περιοχή με $x \geq a$ και εξέρχεται από το ένα σημείο $\Delta$ $(x_\Delta = \alpha)$ αφού διαγράψει ημικυκλική τροχιά ακτίνας $R_p$. Αν αντί για πρωτόνιο επιταχύνουμε από το Α στο Γ ένα σωμάτιο άλφα θα διαγράψει ημικυκλική τροχιά ακτίνας $R_\alpha$ κατά την κίνηση του στο ομογενές μαγνητικό πεδίο. Αν για τα φορτία και τις μάζες των σωματιδίων γνωρίζουμε ότι ισχύει $q_\alpha = 2q_p$ και $m_\alpha = 4m_p$ τότε οι ακτίνες των ημικυκλίων έχουν λόγο:

$\alpha.\ \dfrac{R_\alpha}{R_p} = 2$ $\beta.\ \dfrac{R_\alpha}{R_p} = \sqrt{2}$ $\gamma.\ \dfrac{R_\alpha}{R_p} = 1$

**2.176** Η κάθετη τομή ομογενούς μαγνητικού πεδίου είναι τετράγωνο πλευράς $\alpha$. Ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ στο μέσον μιας πλευράς του τετραγώνου και αφού διαγράψει ημικύκλιο εξέρχεται από το πεδίο μετά από χρόνο $\Delta t_1$.Αν το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου ήταν διπλάσιο τότε ο χρόνος παραμονής του σωματιδίου θα ήταν $\Delta t_2$. Η σχέση που συνδέει τα χρονικά διαστήματα $\Delta t_1$ και $\Delta t_2$ είναι:

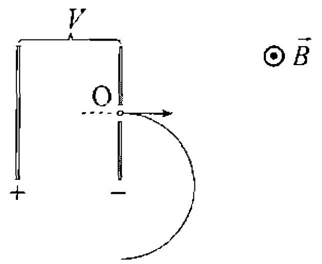



***α.*** $\Delta t_1 = \Delta t_2$ ***β.*** $\Delta t_1 = 2\Delta t_2$ **γ.** $\Delta t_1 = \Delta t_2/2$

**2.177** Ηλεκτρόνιο κινείται στον άξονα $x'x$ και εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα μέτρου $\upsilon$ η οποία σχηματίζει γωνία $30^o$ με τις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$ που έχει την διεύθυνση του άξονα $x'x$. Η προβολή της τροχιάς του σωματιδίου σε επίπεδο κάθετο στον άξονα $x'x$ είναι κύκλος ακτίνας $R$. Όταν το ηλεκτρόνιο συναντήσει ξανά για πρώτη φορά τον άξονα $x'x$ θα έχει διανύσει διάστημα $s$ ίσο με:

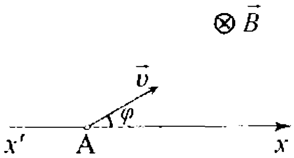
$\alpha. s = \pi R\sqrt{3}$ $\beta.\ \ s = 2R\sqrt{3}$ $\gamma. 4\pi R$

**2.178** Δύο θετικά φορτισμένα σωματίδια $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ που έχουν ίδιο φορτίο επιταχύνονται στο ίδιο ηλεκτρικό πεδίο και στη συνέχεια εισέρχονται από το ίδιο σημείο $O$ , σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές και διαγράφουν ημικυκλικές τροχιές με ακτίνες $R_1, R_2$. Οι χρόνοι παραμονής των δύο σωματιδίων στο μαγνητικό πεδίο $\Delta t_1, \Delta t_2$ είναι $\Delta t_2 = 4\Delta t_1$. Όταν τα σωματίδια εξέρχονται από το πεδίο οι στροφορμές τους ως προς το Ο έχουν μέτρα $L_1, L_2$ για τα οποία ισχύει:




$\alpha.\ L_2 = 2L_1$ $\beta.\ L_2 = 4L_1$ $\gamma. L_2 = 8L_1$

**2.179** Αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται από ένα σημείο Α σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου και σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^o$ με την ευθεία $x'x$ η οποία είναι το όριο του πεδίου. Το σωματίδιο εξέρχεται από το πεδίο από κάποιο σημείο Γ της ευθείας $x'x$. Αν η απόσταση ΑΓ είναι ίση με $d$ και ο χρόνος κίνησης του σωματιδίου στο μαγνητικό πεδίο είναι τ τότε:



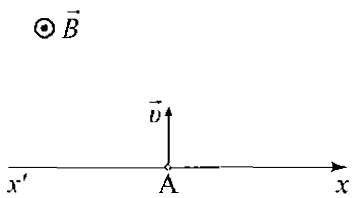

**i.** Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου είναι ίση με :

$\alpha.\ d$ $\qquad\qquad$ $\beta.\ d\sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ $\gamma. d\frac{\sqrt{3}}{2}$

**ii.** Η περίοδος της κυκλικής κίνησης είναι ίση με:

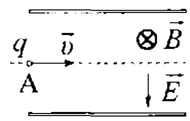
$\alpha.\ 3\tau$ $\qquad\qquad$ $\beta. 6\tau$ $\qquad\qquad$ $\gamma. 12\tau$

**2.180** Δύο θετικά φορτισμένα σωματίδια $(q, m_1)$ και $(q, m_2)$ εισέρχονται ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο Α ομογενούς μαγνητικού πεδίου του έντασης Β του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στο επίπεδο του σχεδίου. Τα δύο σωματίδια διαγράφουν ημικυκλικές τροχιές με ακτίνες $R_1 = R$, $R_2$ και εξέρχονται από το πεδίο στα σημεία Κ και Δ της ευθείας $x'x$ τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2R$. Η απόσταση των δύο σωματιδίων όταν το σωματίδιο μάζας $m_1$ εξέρχεται από το μαγνητικό πεδίο είναι:




$\alpha. \frac{R}{2}$ $\qquad\qquad$ $\beta.\ R$ $\qquad\qquad$ $\gamma. 2R$

**2.181** Πρωτόνιο $(q, m)$ εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο ενός επίπεδου πυκνωτή (ομογενές Ηλεκτρικό πεδίο) με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κάθετη στις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Στην περιοχή υπάρχει και ομογενές μαγνητικό πεδίο και έτσι το σωματίδιο κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και εξέρχεται από το ηλεκτρικό πεδίο σε χρόνο $\tau_p$. Από το ίδιο σημείο Α εισέρχεται ηλεκτρόνιο με την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ . Το ηλεκτρόνιο θα εξέλθει από τον πυκνωτή σε χρόνο $\tau_e$.



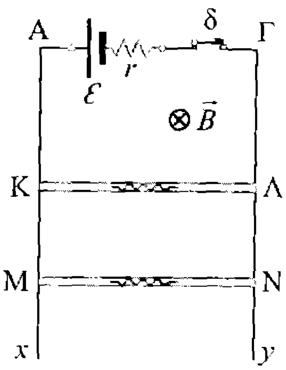

$\alpha.\ \tau_e < \tau_p$ $\qquad\qquad$ $\beta. \tau_e = \tau_p$ $\qquad\qquad$ $\gamma. \tau_e > \tau_p$

**2.182** Ένας ευθύγραμμος αγωγός έχει μήκος $l$, είναι οριζόντιος, διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I$ και βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι οριζόντιες και κάθετες στον αγωγό. Ο αγωγός δέχεται από το μαγνητικό πεδίο δύναμη μέτρου $F$. Λυγίζουμε τον αγωγό στο μέσον του μέχρι να σχηματιστεί ορθή γωνία, της οποίας το επίπεδο είναι κατακόρυφο και η μία κάθετη πλευρά έχει την αρχική διεύθυνση του αγωγού. Ο αγωγός δέχεται τότε από το μαγνητικό πεδίο δύναμη $\vec{F}'$, η οποία έχει μέτρο:

*α.* $F' = 2F$ *β.* $F' = \sqrt{2}F$ *γ.* $F' = \sqrt{2}F/2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

**1.183** Δύο κατακόρυφοι μεταλλικοί αγωγοί $Ax$ και $Γy$, απέχουν μεταξύ τους απόσταση $l = 1m$, έχουν αμελητέα αντίσταση και συνδέονται στα πάνω άκρα τους με ηλεκτρική πηγή $(\mathcal{E}, r)$. Το επίπεδο των αγωγών $Ax$ και $Γy$ είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου μέτρου έντασης $B$ και κατεύθυνσης όπως φαίνεται στο σχήμα. Δύο λεπτές μεταλλικές ράβδοι $ΚΛ$ και $ΜΝ$ μήκους $l$ η καθεμία με μάζες $m_1$ και $m_2$ αντίστοιχα και αντιστάσεις $R_1$ και $R_2$ αντίστοιχα μπορούν να ολισθαίνουν στους κατακόρυφους αγωγούς χωρίς τριβές. Αν οι ράβδοι ισορροπούν τότε ο λόγος των μαζών $m_1/m_2$ είναι:

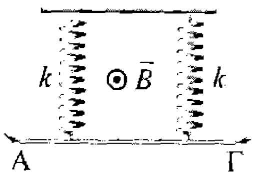



$α.\ \dfrac{m_1}{m_2} = (\dfrac{R_1}{R_2})^2$ $β.\ \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$ $γ.\ \dfrac{m_1}{m_2} = (\dfrac{R_2}{R_1})^2$

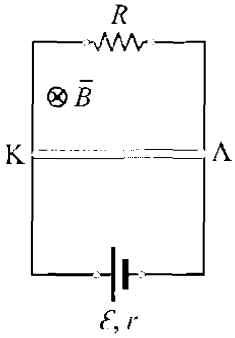
**1.184** Τρείς ευθύγραμμοι ρευματοφόροι αγωγοί (1), (2) και (3) μεγάλου μήκους βρίσκονται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Ο αγωγός (2) απέχει την ίδια απόσταση $d$ από τους αγωγούς (1) και (3). Οι αγωγοί διαρρέονται από ρεύματα εντάσεων $I_1, I_2, I_3$. Αν και οι τρείς αγωγοί ισορροπούν τότε για τις εντάσεις $I_1$ και $I_2$ ισχύει:

$α. I_1 = I_2$ $β. I_1 = 2I_2$ $γ. I_1 = 3I_2$

**1.185** Ο ομογενής αγωγός $ΚΛ$ του σχήματος μάζας $m$ και μήκους $l$, είναι οριζόντιος και ισορροπεί δεμένος σε δύο σημεία με δύο ιδανικά ελατήρια σταθερής $k$. Ο αγωγός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης $I$ με φορά όπως στο σχήμα και είναι κάθετος προς τις μαγνητικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B$. Όταν διακόψουμε το ρεύμα στον αγωγό, αυτός εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση της οποίας η ενέργεια είναι ίση το 25% της αρχικής δυναμικής ενέργειας των ελαστηρίων. Η ένταση του ρεύματος που διαρέει τον αγωγό $ΚΛ$ είναι:

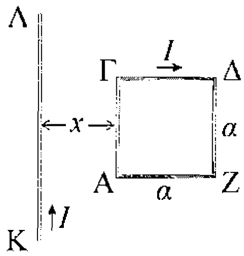



$α.\ I = \dfrac{mg}{Bl}$ $β.\ I = \dfrac{mg}{2Bl}$ $γ. I = \dfrac{2mg}{Bl}$




**2.186** Στους πόλους ηλεκτρικής πηγής $(\mathcal{E}, r)$ συνδέουμε ευθύγραμμο αγωγό μήκους ΚΛ μήκους $l$ και αντίστασης $R$ και παράλληλα στον αγωγό ΚΛ συνδέουμε αντίσταση $R$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο αγωγός ΚΛ είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν αποσυνδέσουμε την αντίσταση $R$ και στη θέση της συνδέσουμε αντίσταση $2R$ παρατηρούμε ότι το μέτρο της δύναμης Laplace μεταβάλλεται κατά 20%. Η εσωτερική αντίσταση $r$ της πηγής είναι:

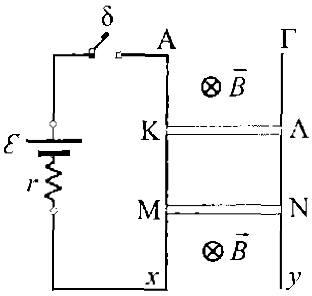
$\alpha.\ r = R$ $\quad\quad$ $\beta.\ r = 0{,}5R$ $\quad\quad$ $\gamma.\ r = 0{,}6R$




**2.187** Ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ και τετράγωνο πλαίσιο ΑΓΔΖ πλευράς α βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο έτσι ώστε ο αγωγός ΚΛ να είναι παράλληλος στις πλευρές ΑΓ και ΔΖ και η πλησιέστερη πλευρά ΑΓ του τετραγώνου από τον αγωγό να βρίσκεται σε απόσταση $x$ από τον αγωγό. Αν συνισταμένη δύναμη που δέχεται το πλαίσιο από το μαγνητικό πεδίο του ευθύγραμμου αγωγού έχει το ίδιο μέτρο με την δύναμη που δέχεται η πλευρά ΔΖ τότε για την απόσταση $x$ ισχύει:

$\alpha.\, x = \dfrac{a}{2}$ $\quad\quad$ $\beta.\, x = a$ $\quad\quad$ $\gamma.\, x = \dfrac{3}{2}\, a$






**2.188** Οι αγωγοί Αx και Γy είναι κατακόρυφοι και στερεωμένοι. Τα σύρματα ΚΛ και ΜΝ με διατομές που έχουν διαμέτρους Δ και δ είναι από το ίδιο υλικό και είναι οριζόντια με τα άκρα τους σε επαφή με τους κατακόρυφους αγωγούς και τα κρατάμε αρχικά ακίνητα. Για τις διαμέτρους Δ και δ ισχύει $\Delta = \delta\sqrt{2}$. Κάποια στιγμή $t_o = 0$ κλείνουμε το διακόπτη και την ίδια στιγμή αφήνουμε ελεύθερα τα σύρματα $K\Lambda$, $MN$ και παρατηρούμε ότι ο αγωγός ΚΛ έχει αρχική επιτάχυνση μέτρου $g/2$ με φορά προς τα πάνω. Η αρχική επιτάχυνση του αγωγού ΜΝ:

**α.** Έχει μέτρο ίσο με μηδέν

**β.** Έχει μέτρο ίσο με $2g$

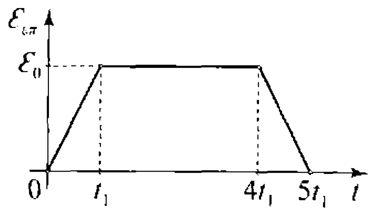
**γ.** Έχει μέτρο ίσο με $4g$

Να μελετήσετε δύο περιπτώσεις ( Η δύναμη μεταξύ των αγωγών να είναι αμελητέα και μη αμελητέα)

**2.189** ⋆ Τετράγωνο σύρμα πλευράς α είναι τοποθετημένο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έτσι ώστε το κάθετο διάνυσμα να σχηματίζει γωνία θ με τις δυναμικές γραμμές. Αν στρέψουμε το επίπεδο του πλαισίου κατά γωνία $-120^o$ παρατηρούμε ότι το επαγωγικό φορτίο είναι μηδέν. Σε ποια από τις γωνίες στροφής $\Delta\theta$ του επιπέδου του πλαισίου η τιμή του επαγωγικού φορτίου κατά απόλυτη τιμή είναι μέγιστη.

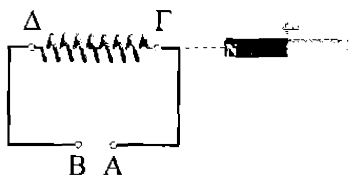
$\alpha.\ \Delta\theta = 60^o$ $\qquad$ $\beta. -60^o$ $\qquad$ $\gamma. 120^o$

**2.190** Η στιγμιαία επαγωγική ΗΕΔ σε ένα κύκλωμα μεταβάλλεται όπως δείχνει το διπλανό σχήμα . Η μέση επαγωγική ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο κύκλωμα στο χρονικό διάστημα $t_o = 0$ ως τη χρονική στιγμή $t = 5t_1$ είναι:




$\alpha.\ 0{,}5\mathcal{E}_o$ $\qquad$ $\beta.\ 0{,}6\mathcal{E}_o$ $\qquad$ $\gamma.\ 0{,}8\mathcal{E}_o$

**2.191** Το κύκλωμα του πηνίου είναι αρχικά ανοιχτό. Μετακινούμε το μαγνήτη έτσι ώστε να πλησιάζει προς το πηνίο όπως φαίνεται στο σχήμα. Κατά τη διάρκεια της κίνησης του μαγνήτη προς το ακίνητο πηνίο η τάση μεταξύ των σημείων Α και Β είναι:

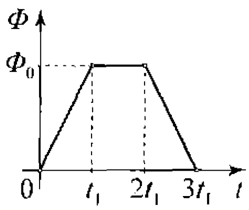


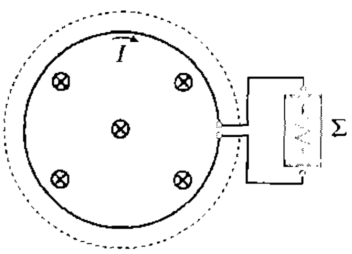

***α.*** $V_A - V_B = 0$ $\qquad$ ***β.*** $V_A - V_B > 0$ $\qquad$ ***γ.*** $V_A - V_B < 0$

**2.192** Διαθέτουμε δύο όμοια σύρματα από τα οποία κατασκευάζουμε δύο κυκλικά πλαίσια με αριθμούς $N_1$ , $N_2$ αντίστοιχα και τα άκρα τους τα συνδέουμε με δύο ίδια γαλβανόμετρα. Τοποθετούμε τα δύο πλαίσια μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο ώστε το επίπεδο των σπειρών τους να είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Κάποια στιγμή καταργούμε το μαγνητικό πεδίο .Τα φορτία $q_1$ , $q_2$ που μετακινούνται στα δύο πλαίσια έχουν λόγο:

$\alpha.\ \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{N_1}{N_2}$ $\qquad$ $\beta.\ \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{N_2}{N_1}$ $\qquad$ $\gamma.\ \dfrac{q_1}{q_2} = (\dfrac{N_2}{N_1})^3$

**2.193** Μία θερμική συσκευή Σ συνδέεται σε δύο σημεία ενός κυκλικού πλαισίου που βρίσκονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Ο κυκλικός αγωγός βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα του πηνίου μεταβάλλεται όπως δείχνει το διάγραμμα αριστερά.



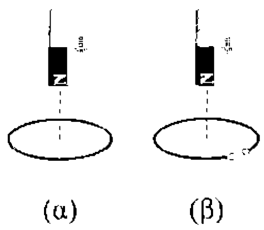
**i.** Η φορά του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό είναι αυτή που φαίνεται στο δεξιό σχήμα για το χρονικό διάστημα

$α.\ 0\ έως\ t_1$ $\quad β.\ \ t_1\ έως\ 2t_1$ $\quad γ.\ \ 2t_1\ έως\ 3t_1$

**ii.** Αν η συσκευή με στοιχεία "$P_K, V_K$" λειτουργεί κανονικά στο χρονικό διάστημα $0\ έως\ t_1$ τότε η ενέργεια $W_{ηλ}$ που καταναλώνει στο διάστημα 0 έως $3t_1$ είναι:

$α. W_{ηλ} = P_K t_1$ $\quad β. W_{ηλ} = 0$ $\quad γ. W_{ηλ} = 2P_K t_1$

**2.194** Δύο όμοιοι ραβδόμορφοι μαγνήτες αφήνονται από ύψος $h$ πάνω από δύο όμοιους μεταλλικούς δακτύλιους που το επίπεδό τους είναι οριζόντιο, και οι οποίοι είναι στερεωμένοι σε κάποιο ύψος από το δάπεδο. Ο δακτύλιος του σχήματος (α) είναι κλειστός ενώ ο δακτύλιος στο σχήμα (β) φέρει μικρή Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g$. Οι μαγνήτες φτάνουν στο έδαφος με ταχύτητες $υ_1, υ_2$ για τις οποίες ισχύει:

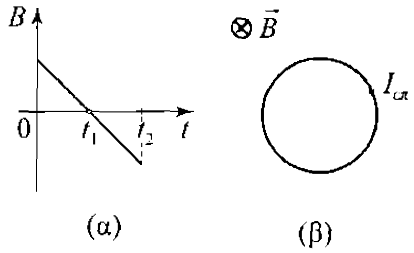



**α.** $υ_1 = υ_2 = \sqrt{2gh}$

**β.** $υ_1 > \sqrt{2gh}\ και\ υ_2 = \sqrt{2gh}$

**γ.** $υ_1 < \sqrt{2gh}\ και\ υ_2 = \sqrt{2gh}$

**2.195** Ο μεταλλικός δακτύλιος βρίσκεται σε περιοχή στην οποία υπάρχει μαγνητικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στο επίπεδο του δακτυλίου. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται όπως δείχνει το σχήμα (α) . Η φορά του επαγωγικού ρεύματος στο δακτύλιο είναι αυτή που δείχνει το σχήμα (β)

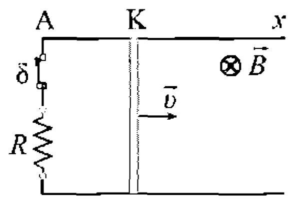



**α.** Στο χρονικό διάστημα 0 έως $t_1$

**β.** Στο χρονικό διάστημα $t_1$ έως $t_2$

**γ.** Στο χρονικό διάστημα 0 έως $t_2$

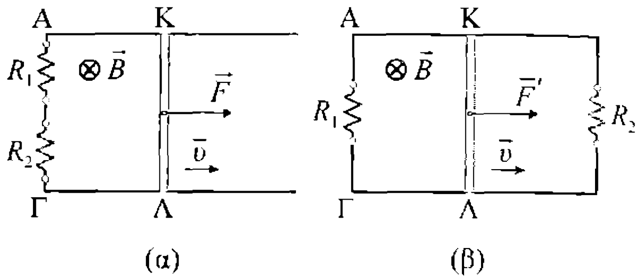
**2.196** Ο αγωγός ΚΛ έχει αντίσταση $R$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{υ}$ χωρίς τριβές με τα άκρα του σε επαφή με τους αγωγούς $Ax, Γy$ οι οποίοι είναι οριζόντιοι , παράλληλοι μεταξύ τους και έχουν αμελητέα αντίσταση . Όταν ο διακόπτης είναι κλειστός η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι $V$. Αν ανοίξουμε τον διακόπτη και ο αγωγός συνεχίσει να κινείται με την



ίδια ταχύτητα τότε η τάση στα άκρα του γίνεται :

$\alpha. 0$ $\beta.\ V$ $\gamma. 2V$

**2.197** Στα κυκλώματα που βλέπουμε στα σχήματα (α) και (β) ο αγωγός ΚΛ αμελητέας αντίστασης κινείται με την ίδια σταθερή ταχύτητα $\upsilon$ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο της κίνησής του με την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης που διέρχεται από το μέσον του και είναι κάθετη στον αγωγό.



(α) (β)

**i.** Αν στο κύκλωμα (α) το 75% της προσφερόμενης ενέργειας μέσω της δύναμης $F$ γίνεται θερμότητα στην αντίσταση $R_1$ τότε στο κύκλωμα (β) το ποσοστό της προσφερόμενης ενέργειας που γίνεται θερμότητα στην $R_1$ είναι:

$\alpha.$ 75% $\beta$ . 50% $\gamma.$ 25%

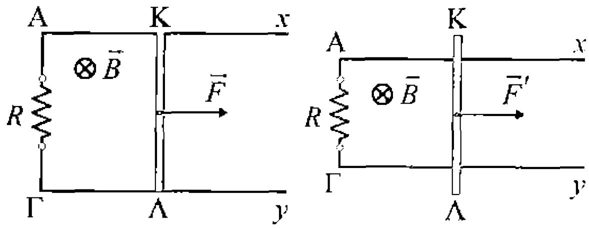
**ii.** Αν $Q_\alpha, Q_\beta$ είναι η συνολική θερμότητα που αναπτύσσεται σε χρόνο $\Delta t$ στα κυκλώματα (α) και (β) στον ίδιο χρόνο $\Delta t$ ο λόγος $Q_\alpha/\ Q_\beta$ είναι:

$\alpha.\ \frac{1}{4}$ $\beta.\ \frac{2}{9}$ $\gamma.\ \frac{3}{16}$

**iii.** Αν η οριακή ταχύτητα στο κύκλωμα (α) είναι $\upsilon_{o\rho}$ και στο κύκλωμα (β) είναι $\upsilon'_{o\rho}$ και ο λόγος $\upsilon_{o\rho}/\upsilon'_{o\rho} = 4$ τότε για τις αντιστάσεις $R_1, R_2$ ισχύει:

$\alpha. R_1 = R_2$ $\beta. R_1 + R_2 = \sqrt{R_1 R_2}$ $\gamma.\ R_1 + R_2 = 2\sqrt{R_1 R_2}$

**2.198** Στα σχήματα (α) και (β) οι αγωγοί ΚΛ έχει μήκος $l$ και αντίσταση $2R$. Οι δύο παράλληλοι αγωγοί Αx , Γy έχουν ασήμαντη αντίσταση και η απόσταση τους είναι ίση με $l$ στο σχήμα (α) ενώ στο σχήμα (β) είναι ίση με $l/2$. Ασκούμε στους δύο αγωγούς σταθερές δυνάμεις $F$ και $F'$ και τελικά οι δύο αγωγοί αποκτούν την ίδια σταθερή ταχύτητα.



(α) (β)

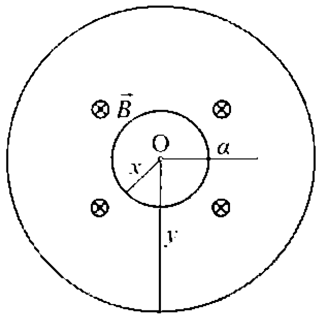
**i.** Για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει:

$\alpha.\ F' = \frac{1}{2}F$ $\beta.\ F' = \frac{3}{4}F$ $\gamma.F' = \frac{3}{8}F$

**ii.** Οι τάσεις στα άκρα της αντίστασης R κάποια στιγμή που οι αγωγοί έχουν την ίδια ταχύτητα είναι $V, V'$ για τις οποίες ισχύει:

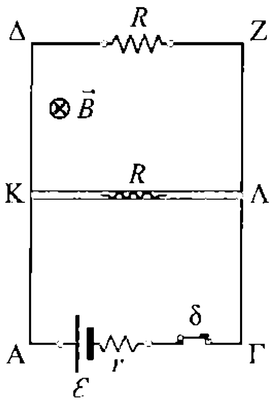
$\alpha.\ \dfrac{V'}{V} = \dfrac{3}{4}$ $\qquad \beta.\ \dfrac{V'}{V} = \dfrac{4}{3}$ $\qquad \gamma.\ \dfrac{V'}{V} = \dfrac{5}{3}$

**2.199** Ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του σχεδίου και εκτείνεται σε κυκλική περιοχή ακτίνας $\alpha$ και κέντρου Ο όπως φαίνεται στο σχήμα. Δύο ομόκεντροι και ομοεπίπεδοι δακτύλιοι, με ακτίνες x και y ($x < \alpha < y$) που έχουν την ίδια αντίσταση ανά μονάδα μήκους, έχουν το κέντρο τους στο Ο και το επίπεδο τους κάθετο στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Αν η ένταση του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό τότε οι δακτύλιοι διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα αν για τις ακτίνες τους ισχύει:



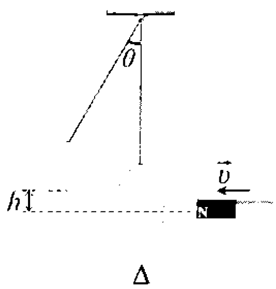

$\alpha.\ \alpha = \dfrac{(x+y)}{2}$ $\qquad \beta.\ \alpha = \dfrac{(x \cdot y)}{x+y}$ $\qquad \gamma.\ \alpha = \sqrt{x \cdot y}$

**2.200** Στο κύκλωμα του σχήματος η πηγή έχει ΗΕΔ $\mathcal{E}$ και εσωτερική αντίσταση $r = R/2$ . Οι κατακόρυφοι αγωγοί έχουν ασήμαντη αντίσταση. Αρχικά ο διακόπτης δ είναι κλειστός και ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί. Κάποια στιγμή $t_o = 0$ ανοίγουμε το διακόπτη. Αν $V_{K\Lambda}$ είναι η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ πριν ανοίξουμε το διακόπτη και $V'_{K\Lambda}$ είναι η μέγιστη τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ μετά το άνοιγμα του διακόπτη θα ισχύει:



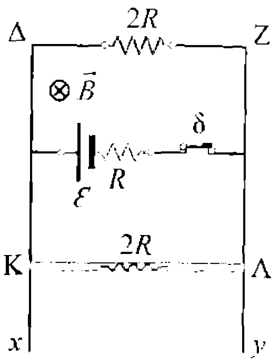

$\alpha.\ V'_{K\Lambda} < V_{K\Lambda}$ $\qquad \beta.\ V'_{K\Lambda} = V_{K\Lambda}$ $\qquad \gamma.\ V'_{K\Lambda} > V_{K\Lambda}$

**2.201** Κρεμάμε με μονωτικό νήμα ένα μεταλλικό δακτύλιο μάζας $m$ , τον αφήνουμε να ηρεμήσει σε κατακόρυφη θέση και μετά πλησιάζουμε σ' αυτόν ένα μαγνήτη απότομα. Παρατηρούμε ότι ο δακτύλιος απομακρύνεται από το μαγνήτη, και σταματά στιγμιαία όταν το νήμα να σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη θέση και τότε το κέντρο μάζας του δακτυλίου έχει ανυψωθεί κατά $h$ . Αν η ενέργεια που μεταφέρθηκε από εμάς προς το δακτύλιο είναι $E$, τότε




$\alpha.\ E < mgh$ $\qquad \beta.\ E = mgh$ $\qquad \gamma.\ E > mgh$

**2.202** Στο διπλανό σχήμα οι δύο κατακόρυφοι αγωγοί $\Delta x$ , $Zy$ έχουν αμελητέα αντίσταση και τα ανώτερα σημεία τους Δ και Ζ συνδέονται με σύρμα που έχει αντίσταση $2R$. Η ηλεκτρική πηγή έχει εσωτερική αντίσταση $r = R$ και ΗΕΔ ίση με $\mathcal{E}$. Όταν ο διακόπτης δ είναι κλειστός ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί. Όταν ανοίξουμε το διακόπτη ο ΚΛ αποκτά οριακή ταχύτητα μέτρου:




$\alpha.\ \upsilon_{o\rho} = \dfrac{\mathcal{E}}{Bl}$ $\beta.\ \upsilon_{o\rho} = \dfrac{\mathcal{E}}{2Bl}$ $\gamma.\ \upsilon_{o\rho} = \dfrac{2\mathcal{E}}{Bl}$

**2.203** Τετράγωνο πλαίσιο Ν σπειρών και αντίστασης $R$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα με άξονα περιστροφής που διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του που είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου και η τάση στα άκρα του πλαισίου έχει μέγιστη τιμή $N\omega B\alpha^2$. Αν στα άκρα του πλαισίου συνδέσουμε θερμικό βολτόμετρο αντίστασης $R$ η ένδειξη του βολτομέτρου θα είναι:

$\alpha.\ \dfrac{N\omega B\alpha^2}{2}$ $\beta.\ \dfrac{N\omega B\alpha^2}{\sqrt{2}}$ $\gamma.\ \dfrac{N\omega B\alpha^2}{2\sqrt{2}}$

**2.204** Στα άκρα ορθογωνίου πλαισίου εμβαδού $A$ έχει συνδεθεί θερμικό αμπερόμετρο. Το πλαίσιο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega$ γύρω από άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του και είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το πλαίσιο είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Το φορτίο που πέρασε από μια διατομή του αγωγού από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = T/4$ είναι $q$. Η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι:

$\alpha.\dfrac{\omega q}{2}$ $\beta.\dfrac{\omega q}{\sqrt{2}}$ $\gamma.\dfrac{\omega q}{2\sqrt{2}}$

**2.205** Δύο ίδιοι αντιστάτες $R_1 = R_2 = R$ συνδέονται σε σειρά και τα άκρα τους συνδέονται με συρμάτινο πλαίσιο αμελητέας αντίστασης το οποίο στρέφεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β με γωνιακή ταχύτητα ω. Αποσυνδέουμε τους αντιστάτες και τους ξανασυνδέουμε παράλληλα αλλάζοντας και τη συχνότητα περιστροφής του πλαισίου ώστε η συνολική θερμότητα ανά δευτερόλεπτο να είναι ίδια και στις δύο συνδεσμολογίες . Η μεταβολή της συχνότητας του πλαισίου είναι :

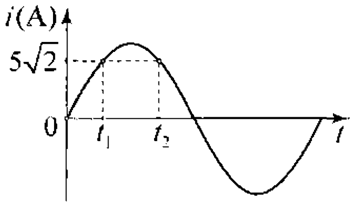
$\alpha.\ 50\%$ $\beta.-50\%$ $\gamma.-75\%$

**2.206** Ορθογώνιο μεταλλικό πλαίσιο αμελητέας αντίστασης στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, γύρω από άξονα κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Τα άκρα του πλαισίου συνδέονται με αντιστάτη αντίστασης $R$. Σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου εκλύεται στον αντιστάτη θερμότητα $Q$. Διπλασιάζουμε τη συχνότητα περιστροφής του πλαισίου και τροφοδοτούμε τον ίδιο αντιστάτη. Το ποσό θερμότητας $Q'$ σε μία περίοδο στον αντιστάτη $R$ γίνεται:

$\alpha.\ Q' = 4Q$ $\qquad$ $\beta.\ Q' = 2Q$ $\qquad$ $\gamma. Q' = Q$

**2.207** Στα άκρα ενός αντιστάτη εφαρμόζουμε εναλλασσόμενη τάση που παράγεται από στρεφόμενο πλαίσιο από το οποίο διέρχεται μαγνητική ροή:

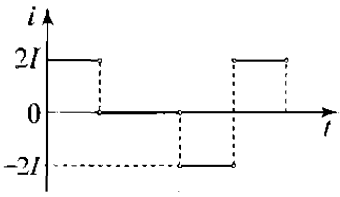
$$\Phi = BA\sigma\upsilon\nu\, 200\pi t/3$$




Το σχήμα δείχνει την ένταση του ρεύματος. Από τη στιγμή $t_1$ ως τη στιγμή $t_2$ η γωνία στροφής του πλαισίου είναι $2\pi/3$. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος

$\alpha. 5$A $\qquad$ $\beta. 5\sqrt{2}$ A $\qquad$ $\gamma.\ 10$A

**2.208** Ένας αντιστάτης διαρρέεται από περιοδικά εναλλασσόμενο ρεύμα, του οποίου η ένταση μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ενεργός ένταση είναι




$\alpha.\ I_{\varepsilon\nu} = \dfrac{I}{2}$ $\qquad$ $\beta. I_{\varepsilon\nu} = \dfrac{I}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\gamma. I_{\varepsilon\nu} = I\sqrt{2}$

**2.209** Δύο ίδιοι αντιστάτες συνδέονται παράλληλα και στα άκρα τους εφαρμόζεται συνεχής σταθερή τάση $V_\Sigma$. Συνδέουμε τους δύο αντιστάτες σε σειρά και στα άκρα τους εφαρμόζουμε εναλλασσόμενη τάση της μορφής $\upsilon = V\eta\mu\omega t$. Αν η συνολική θερμότητα στους αντιστάτες είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, για την ενεργό τιμή της εναλλασσόμενης τάσης ισχύει:

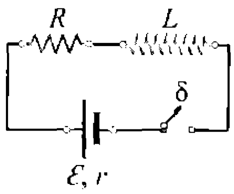
$\alpha.\ V_{\varepsilon\nu} = 2V_\Sigma$ $\qquad$ $\beta. V_{\varepsilon\nu} = V_\Sigma\sqrt{2}$ $\qquad$ $\gamma. V_{\varepsilon\nu} = V_\Sigma$

**2.210** Ένα αγώγιμο πλαίσιο αμελητέας αντίστασης στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου και είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Στα άκρα του πλαισίου συνδέεται ένας λαμπτήρας με στοιχεία κανονικής λειτουργίας $(P_\kappa, V_\kappa)$ ο οποίος καταναλώνει ενέργεια με μέσο ρυθμό $P$. Αν η συχνότητα περιστροφής ήταν διπλάσια τότε ο λαμπτήρας θα λειτουργούσε κανονικά. Η ισχύς P του λαμπτήρα είναι:

$\alpha. P = \dfrac{1}{2}P_\kappa$ $\qquad$ $\beta.\ P = \dfrac{1}{4}P_\kappa$ $\qquad$ $\gamma.\ P = \dfrac{3}{4}P_\kappa$

**2.211** Συρμάτινο πλαίσιο Ν σπειρών σχήματος ορθογωνίου και αντίστασης $r$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega$ γύρω από άξονα που συνδέει τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ . Αρχικά $(t_o = 0)$ η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα του πλαισίου είναι μέγιστη. Στα άκρα του πλαισίου συνδέεται θερμική συσκευή αντίστασης $R$ . Η μέση ένταση του ρεύματος στο χρονικό διάστημα από $t_o = 0$ μέχρι $t_1 = T/2$ είναι:

$\alpha. I_\mu = \frac{2}{\pi} I$ $\beta.\ \frac{1}{\pi} I$ $\gamma.\ I_\mu = I_{\varepsilon\nu}$

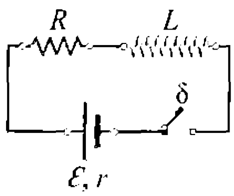


**2.212** Ιδανική ηλεκτρική πηγή $(\mathcal{E}, r = 0)$, αντίσταση R, ιδανικό πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής $L$ και διακόπτης συνδέονται σε σειρά και αρχικά ο διακόπτης είναι ανοικτός. Όταν κλείσουμε το διακόπτη μετά από κάποιο χρονικό διάστημα $\Delta t$ το ρεύμα αποκτά σταθερή τιμή. Η χρονική διάρκεια του φαινομένου της αυτεπαγωγής:

**α.** Θα αυξηθεί αν αυξήσουμε μόνο το $R$
**β.** Θα αυξηθεί αν αυξήσουμε μόνο το $L$
**γ.** Θα μειωθεί αν αυξήσουμε το $R$ και μειώσουμε το $L$

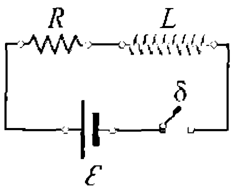
**2.213** Ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L$ το συνδέουμε στους πόλους ιδανικής ηλεκτρικής πηγής και κάποια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη , έτσι στο πηνίο αποθηκεύεται ενέργεια $U$. Αποσυνδέουμε το πηνίο , το κόβουμε στη μέση και τα δύο πηνία τα συνδέουμε και πάλι στους πόλους της ίδιας πηγής. Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο και των δύο πηνίων είναι: 102

$\alpha.\ U$ $\beta.\ 2U$ $\gamma.\ 4U$



**2.214** Στο κύκλωμα του σχήματος τη χρονική $t_o = 0$ κλείνουμε το διακόπτη και τελικά η ένταση του ρεύματος σταθεροποιείται σε κάποια τιμή $I$. Όταν η ένταση του ρεύματος έχει τιμή $i = \kappa I$ ο ρυθμός μεταβολής έχει τιμή $di/dt = \lambda\mathcal{E}/L$ όπου $L$ ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου.

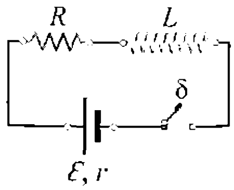
$\alpha. \kappa = \lambda$ $\beta. \kappa\lambda = 1$ $\gamma. \kappa + \lambda = 1$



**1.215** Στο κύκλωμα του σχήματος η αντίσταση του πηνίου και της πηγής είναι μηδέν (ιδανικό πηνίο και ιδανική πηγή). Τη στιγμή $t_o = 0$ κλείνουμε το διακόπτη. Όταν η ένταση του ρεύματος γίνεται ίση με το 25% της μέγιστης τιμής της, ο ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα του πηνίου είναι:

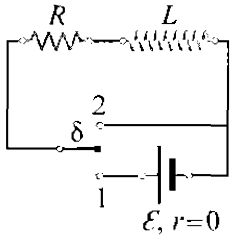
$\alpha. -\frac{\mathcal{E}}{4L} R$ $\beta. -\frac{\mathcal{E}}{2L} R$ $\gamma.\ -\frac{3\mathcal{E}}{4L} R$

**1.216** Στο κύκλωμα του σχήματος η πηγή έχει εσωτερική αντίσταση $r = R$ τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ κλείνουμε το διακόπτη και η ένταση του ρεύματος αυξάνει αρχίζοντας από την τιμή $i = 0$. Τη στιγμή $t$ που η ένταση του ρεύματος είναι ίση με το μισό της μέγιστης τιμής της ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι:




$\alpha.\ \dfrac{\mathcal{E}}{L}$ $\beta.\ \dfrac{\mathcal{E}}{2L}$ $\gamma.\ \dfrac{\mathcal{E}}{4L}$

**1.217** Στο κύκλωμα του σχήματος η πηγή είναι ιδανική και ο μεταγωγικός διακόπτης βρίσκεται για αρκετό χρόνο στην θέση (1) και η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι ίση με την τάση στα άκρα του πηνίου. Τη στιγμή $t = 0$ μεταφέρουμε το διακόπτη στη θέση (2) χωρίς να ξεσπάσει σπινθήρας. Όταν ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος υποδιπλασιαστεί σε σχέση με την αρχική τιμή του τότε



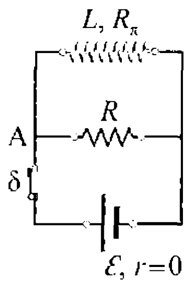

**i.** Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου έχει μειωθεί κατά :

*α. 25%* *β. 50%* *γ. 75%*

**ii.** ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου είναι:

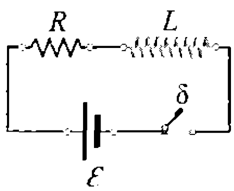
$\alpha. -\dfrac{\mathcal{E}^2}{4R}$ $\beta. -\dfrac{\mathcal{E}^2}{8R}$ $\gamma. -\dfrac{\mathcal{E}^2}{16R}$

**2.218** Στο κύκλωμα του σχήματος ο διακόπτης δ είναι αρκετό χρόνο κλειστός και η τάση στα άκρα του αντιστάτη είναι $V_{A\Gamma} = V$. Κάποια στιγμή $t = 0$ κλείνουμε το διακόπτη δ. Αν οι τάσεις στα άκρα του αντιστάτη λίγο πριν και αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη είναι αντίθετες τότε ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη είναι:




$\alpha. -\dfrac{\mathcal{E}}{L}$ $\beta. -\dfrac{\mathcal{E}}{2L}$ $\gamma. -2\dfrac{\mathcal{E}}{L}$

**2.219** Στο κύκλωμα του σχήματος η αντίσταση του πηνίου και της πηγής είναι μηδέν (ιδανικό πηνίο και ιδανική πηγή). Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ κλείνουμε το διακόπτη. Όταν ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας μαγνητικού πεδίου στο πηνίο γίνει μέγιστος ο ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα της αντίστασης $dV_R/dt$ είναι ίσος με:




$\alpha.\dfrac{\mathcal{E}}{4L}R$ $\beta.\dfrac{\mathcal{E}}{2L}R$ $\gamma.\ \dfrac{3\mathcal{E}}{4L}R$

## ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

*Σε όλα τα θέματα Β να βρείτε τη σωστή επιλογή και να την αιτιολογήσετε*

**2.220** Το ορατό φάσμα εκτείνεται από $400nm$ έως $700nm$. Ένα άστρο Α θερμοκρασίας $T = 6000K$ εκπέμπει την μέγιστη ένταση ακτινοβολίας σε μήκος κύματος 540nm. Ένα Άστρο Β έχει επιφανειακή θερμοκρασία $T' = 4800K$. Το πολύ φώς του άστρου Β εκπέμπεται σε μήκη κύματος που αντιστοιχούν στο :

***α.*** Ορατό. ***β.*** Υπεριώδες. ***γ.*** Υπέρυθρο.

**2.221** Σε ένα μέταλλο προσπίπτει μονοχρωματικό ακτινοβολία και για κάποια συχνότητα $f_1$ τα ηλεκτρόνια εξέρχονται με κινητική ενέργεια $K_1$ ενώ για κάποια άλλη μεγαλύτερη συχνότητα $f_2$ $(f_2 > f_1)$ τα ηλεκτρόνια εξέρχονται με κινητική ενέργεια $K_2$. Αν η συχνότητα της ακτινοβολίας γίνει $f = (f_1 + f_2)/2$ τότε η κινητική ενέργεια $K$ με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια θα είναι:

$\alpha.$ $2(K_2 - K_1)$ $\beta.$ $3(K_2 - K_1)$ $\gamma.$ $(K_2 + K_1)/2$

**2.222** Σε ένα μέταλλο προσπίπτει μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda$ η οποία προκαλεί έξοδο ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια $K$. Εάν μειωθεί το μήκος κύματος της ακτινοβολίας κατά 20% η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων που εκπέμπονται από αυτή αυξάνεται κατά 50%. Το έργο εξαγωγής του μετάλλου αυτού είναι ίσο με:

***α.*** $K$ $\beta.$ $1{,}25K$ ***γ.*** $2{,}5K$

**2.223** Σε ένα μέταλλο προσπίπτει μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος λ η οποία προκαλεί έξοδο ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια $K = 3eV$. Εάν το μήκος κύματος της ακτινοβολίας μειωθεί ώστε να αυξηθεί η ενέργεια των φωτονίων κατά 25% τότε τα ηλεκτρόνια θα εξέρχονται με κινητική ενέργεια ίση με το έργο εξαγωγής. Για το μέταλλο το έργο εξαγωγής του είναι:

*α.* $2{,}5eV$ *β.* $4eV$ ***γ.*** $5eV$

**2.224** Σε ένα μέταλλο $M_1$ με έργο εξαγωγής $\varphi_1$ πέφτει μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda_1$ και προκαλεί εξαγωγή ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια $K_1$. Σε ένα μέταλλο $M_2$ με έργο εξαγωγής $\varphi_2 = \varphi_1/4$ προσπίπτει ακτινοβολία με μήκος κύματος $\lambda_2$ και τα ηλεκτρόνια εξέρχονται με κινητική ενέργεια $K_2 = K_1/4$ . Για τα μήκη κύματος $\lambda_1$ και $\lambda_2$ ισχύει:

***α.*** $\lambda_2 = \lambda_1$ *β.* $\lambda_2 = 4\lambda_1$ ***γ.*** $\lambda_2 = 0{,}25\lambda_1$

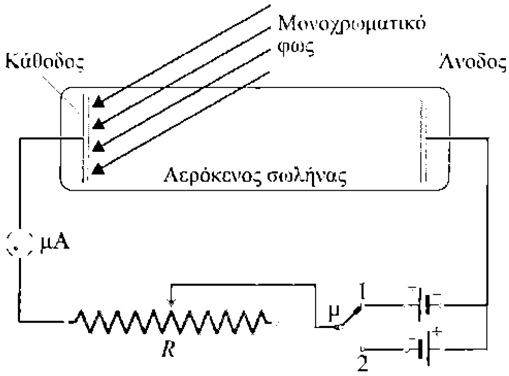
**2.225** Σε μία φωτοηλεκτρική διάταξη ο αριθμός των εξερχόμενων ηλεκτρονίων θεωρούμε ότι είναι ανάλογος του αριθμού των φωτονίων που προσπίπτουν στο μέταλλο της καθόδου και η προσπίπτουσα ακτινοβολία είναι μονοχρωματική ακτινοβολία έντασης $I$. Αν διπλασιάσουμε την ισχύ της ακτινοβολίας διπλασιάζεται:

**α.** Η τάση αποκοπής.

**β.** Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος.

**γ.** Η κινητική ενέργεια των εξερχομένων ηλεκτρονίων.

**2.226** Σε μία φωτοηλεκτρική διάταξη αρχικά το δυναμικό της ανόδου είναι μεγαλύτερο από το δυναμικό της καθόδου και η τάση μεταξύ ανόδου - καθόδου είναι $(V_A - V_K = V > 0)$. Αντιστρέφουμε την πολικότητα πηγαίνοντας τον μεταγωγικό διακόπτη στη θέση (2) και μετακινούμε το δρομέα μέχρι να μηδενιστεί η του ένταση του ρεύματος και εκεί σταθεροποιούμε το δρομέα. Η ένταση του ρεύματος θα πάψει να είναι μηδέν αν:



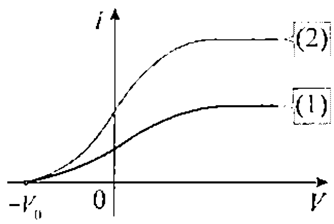

**α.** Αυξήσουμε την ένταση της ακτινοβολίας.

**β.** Μειώσουμε τη συχνότητα της ακτινοβολίας.

**γ.** Αυξήσουμε τη συχνότητα της ακτινοβολίας.



**2.227** Σε ένα φωτοηλεκτρικό πείραμα προέκυψαν οι καμπύλες (1) και (2) από τις οποίες μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής.



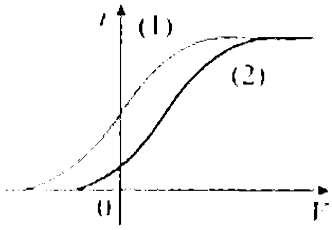

**α.** Οι καμπύλες αναφέρονται σε διαφορετικά μέταλλα στα οποία πέφτει ακτινοβολία ίδιας έντασης και ίδιας συχνότητας.

**β.** Οι καμπύλες αναφέρονται στο ίδιο μέταλλο στο οποίο πέφτει ακτινοβολία ίδιας συχνότητας αλλά διαφορετικής έντασης.

**γ.** Οι καμπύλες αναφέρονται στο ίδιο μέταλλο στο οποίο ο ρυθμός της προσπίπτουσας ενέργειας είναι ίδιος αλλά διαφορετικής συχνότητας

**2.228.** Κατά την πειραματική μελέτη φωτοηλεκτρικού φαινομένου πήραμε τις καμπύλες (1) και (2) για δύο διαφορετικές δέσμες $\Delta_1$ και $\Delta_2$ μονοχρωματικών ακτινοβολιών με μήκη κύματος $\lambda_1$ και $\lambda_2$ που χτυπάνε κάθετα στην κάθοδο.

Αν υποθέσουμε ότι σε κάθε περίπτωση ένα φωτόνιο προκαλεί την εξαγωγή ενός ηλεκτρονίου και η ακτινοβολία (1) προσβάλλει διπλάσιο εμβαδόν από την ακτινοβολία (2) και οι δύο ακτινοβολίες έχουν ίδια ένταση τότε για τα μήκη κύματος των δύο ακτινοβολιών ισχύει:




**i.** Για τα μήκη κύματος των δύο ακτινοβολιών ισχύει:

**α.** $\lambda_2 = 0{,}5\lambda_1$ **β.** $\lambda_2 = 1{,}5\lambda_1$ **γ.** $\lambda_2 = 2\lambda_1$

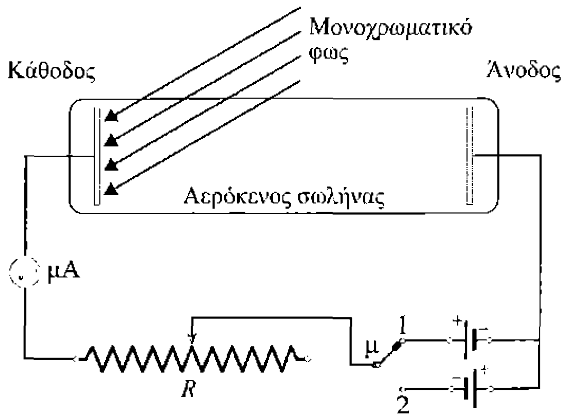
**ii.** Για τις κινητικές ενέργειες $K_1, K_2$ με τις οποίες εξέρχονται τα ηλεκτρόνια από το μέταλλο της καθόδου ισχύει:

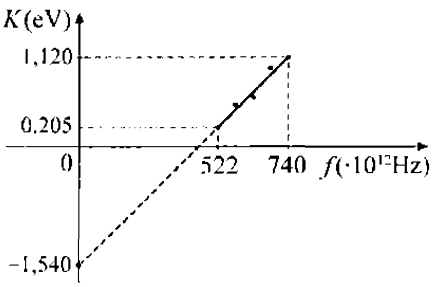
**α** $K_1 = K_2$ **β.** $K_1 < K_2$ γ. $K_1 > K_2$

**2.229** Σε μία φωτοηλεκτρική διάταξη μονοχρωματική ακτινοβολία με ένταση *I* συχνότητα μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου και ισχύ πέφτει κάθετα σε μεταλλική κάθοδο εμβαδού. Αν στην ίδια επιφάνεια της καθόδου πέσει μονοχρωματική ακτινοβολία διπλάσιας έντασης και διπλάσιας συχνότητας η μέγιστη ένταση $i_{max}$ του ρεύματος που διέρχεται από το αμπερόμετρο γίνεται $i'_{max}$ και είναι:

**α.** $i'_{max} = 4i_{max}$ **β.** $i'_{max} = 2i_{max}$ γ. $i'_{max} = i_{max}$

**2.230** Η πειραματική διάταξη του σχήματος χρησιμοποιήθηκε για την μέτρηση της σταθεράς του Planck. Μετρήσαμε την τάση αποκοπής $V_o$ για διάφορες τιμές της συχνότητας και στη συνέχεια με τη σχέση $K = eV_o$ υπολογίσαμε την κινητική ενέργεια εξόδου των ηλεκτρονίων από την κάθοδο. Με τα ζεύγη τιμών $(K, f)$ χαράξαμε το διάγραμμα του δεύτερου σχήματος.



**i.** Σύμφωνα με τις μετρήσεις μας η ελάχιστη ενέργεια των φωτονίων που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

*α.* $1{,}540eV$ *β.* $0{,}205eV$ *γ.* $1{,}120eV$

**ii.** Αν γνωρίζετε ότι $(h = 6{,}6 \cdot 10^{-34} js)$ το σφάλμα που κάναμε στη μέτρηση της σταθεράς του planck είναι:

*α.* $5\%$ *β.* $6{,}6\%$ *γ.* $10\%$

**3.231** Σε μία σκέδαση Compton φωτόνιο μήκους κύματος λ προσπίπτει σε ελεύθερο και σχεδόν ακίνητο ηλεκτρόνιο. Το ποσοστό της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου που έγινε κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι 50%. Το μήκος κύματος $\lambda'$ του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι:

***α.*** $\lambda' = 2\lambda$ ***β.*** $\lambda' = 1{,}5\lambda$ *γ.* $\lambda' = 4\lambda$

**3.232** Φωτόνια ακτίνων Χ μήκους κύματος $\lambda = 121{,}5 \cdot 10^{-12} m$ σκεδάζονται λόγω φαινομένου Compton και σε κάποια κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\varphi$ με την αρχική κατεύθυνση της ακτινοβολίας παρατηρούμε ότι το μήκος κύματος των σκεδαζόμενων φωτονίων μεταβάλλεται κατά 1%. Αν $\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2{,}43 \cdot 10^{-12} m$ τότε η γωνία $\varphi$ είναι:

***α.*** $30^o$ ***β.*** $45^o$ *γ.* $60^o$

**3.233** Φωτόνιο μήκους κύματος $\lambda_1$ σκεδάζεται σε ένα αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο. Το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει μήκος κύματος $\lambda$ και κινείται σε διεύθυνση κάθετη προς την αρχική του διεύθυνση. Το φωτόνιο μήκους κύματος λ σκεδάζεται ξανά σε ελεύθερο και ακίνητο ηλεκτρόνιο και έτσι το τελικό φωτόνιο μήκους κύματος $\lambda_2$ που προκύπτει κινείται στην ίδια διεύθυνση με το αρχικό φωτόνιο. Το μήκος κύματος λ του φωτονίου μετά την πρώτη σκέδαση είναι:

*α.* $\lambda = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$ *β.* $\lambda = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ *γ.* $\dfrac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

**3.234** Φωτόνιο ακτίνων Χ με μήκος κύματος $\lambda = 4\lambda_c$ όπου $\lambda_c = h/mc$ σκεδάζεται από ακίνητο και σχεδόν ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Αν γωνία σκέδασης είναι $\varphi = 90^o$ το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του φωτονίου που γίνεται κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

*α.* $50\%$ *β.* $40\%$ *γ.* $20\%$

**3.235** Δύο φωτόνια ίδιου μήκους κύματος λ σκεδάζονται σε διαφορετικές οξείες γωνίες $\varphi_1$ και $\varphi_2$ πάνω σε ακίνητα και ελεύθερα ηλεκτρόνια. Αν $\varphi_2 > \varphi_1$ και $K_1, K_2$ οι κινητικές ενέργειες των ηλεκτρονίων τότε ισχύει:

*α.* $K_1 = K_2$ *β.* $K_1 > K_2$ *γ.* $K_2 > K_1$

**3.236** Δέσμη ακτινών Χ μήκους κύματος $\lambda$ προσπίπτει σε κάποια επιφάνεια και σκεδάζεται σε ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η σκεδαζόμενη ακτινοβολία σε γωνία $\varphi_1 = 60^o$ έχει μήκος κύματος $\lambda_1$ ενώ η σκεδαζόμενη σε γωνία $\varphi_2 = 90^o$ έχει μήκος κύματος $\lambda_2$. Αν $\lambda_1/\lambda_2 = 3/4$ και είναι γνωστή η σχέση $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$ τότε η σκεδαζόμενη ακτινοβολία σε γωνία $\varphi_3 = 180^o$ έχει μήκος $\lambda_3$ για το οποίο ισχύει:

*α.* $\lambda_3 = 2\lambda$ *β.* $\lambda_3 = 3\lambda$ *γ.* $\lambda_3 = 4\lambda$

**2.237** Φωτόνιο σκεδάζεται κατά γωνία $\varphi = 180^o$ σε ελεύθερο ηλεκτρόνιο μάζας $m$. Αν η ενέργεια του φωτονίου είναι $E = 0{,}125mc^2$ όπου $m$ είναι η μάζα του ηλεκτρονίου τότε το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου $\lambda_e$ μετά τη σκέδαση είναι:

*α.* $\lambda_e = \frac{2}{3}\lambda$ *β.* $\lambda_e = \frac{4}{5}\lambda$ *γ.* $\lambda_e = \frac{5}{9}\lambda$

**2.238** Ακτίνες Χ με και ορμή μέτρου $p = 3mc$ ( $m$ η μάζα του ηλεκτρονίου και $c$ η ταχύτητα του φωτός) σκεδάζονται λόγω φαινομένου Compton σε σχεδόν ακίνητα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Για γωνία σκέδασης $\varphi = 60^o$ το ποσοστό της ενέργειας του φωτονίου που μεταβιβάστηκε στο ηλεκτρόνιο είναι.

*α.* 50% *β.* 60% *γ.* 75%

**2.239** Πρωτόνιο και σωματίδιο άλφα επιταχύνονται από την ηρεμία με την ίδια τάση $V$ και έτσι αποκτούν μήκη κύματος $\lambda_p$ και $\lambda_\alpha$. Αν $q_\alpha = 2q_p$ και $m_\alpha = 4m_p$ ο λόγος $\lambda_p/\lambda_\alpha$ ίσο με :

*α.* $2\sqrt{2}$ *β.* 2 *γ.* $\sqrt{2}$

**2.240** Φωτόνιο μήκους κύματος λ σκεδάζεται κατά γωνία $90^o$ σε ένα ελεύθερο και αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο. Το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι $\lambda' = 4/3\,\lambda$ Το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση του φωτονίου είναι:

*α.* $\lambda_e = \frac{2}{3}\lambda$ *β.* $\lambda_e = \frac{3}{4}\lambda$ *γ.* $\lambda_e = \frac{4}{5}\lambda$

**2.241** Το μήκος κύματος ενός φωτονίου μεταβάλλεται κατά 50% όταν σκεδάζεται κατά γωνία $180^o$ σε ελεύθερο και ακίνητο ηλεκτρόνιο. Το ηλεκτρόνιο μετά την σκέδαση μπορεί να θεωρηθεί ως κύμα de Broglie με μήκος κύματος $\lambda_e$ ίσο με :

α. $\frac{3}{2}\lambda$ β. $\frac{5}{3}\lambda$ γ. $\frac{3}{5}\lambda$

**2.242** Στην κάθοδο μιας φωτοηλεκτρικής διάταξης προσπίπτει μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda$ και τα εξερχόμενα ηλεκτρόνια έχουν μήκος κύματος de Broglie ίσο με $\lambda_e$. Αν στην κάθοδο πέσει μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda' = 2\lambda$ τότε τα εξερχόμενα ηλεκτρόνια έχουν μήκος κύματος de Broglie ίσο με $\lambda_e' = 2\lambda_e$. Το έργο εξαγωγής $\varphi$ του μετάλλου της καθόδου είναι:

α. $h\frac{c}{2\lambda}$ β. $h\frac{c}{3\lambda}$ γ. $h\frac{c}{4\lambda}$

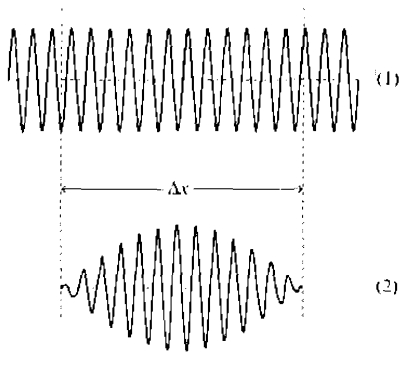
**2.243** Ένα πρωτόνιο έχει κινητική ενέργεια $K$ και μήκος κύματος $\lambda$. Αν το επιταχύνουμε με τάση η κινητική του ενέργεια αυξάνει κατά 75%.Αν επιβραδύνουμε το πρωτόνιο με την ίδια τάση $V$ το μήκος κύματος θα αυξηθεί κατά:

α. 50% β. 25% γ. 100%

**4.244** Μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda_\varphi$ και ενέργειας $E_\varphi$ προσπίπτει σε μέταλλο και προκαλεί φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται έχουν μήκος κύματος $\lambda_e$,ταχύτητα $\upsilon$ και κινητική ενέργεια $K$. Αν $\lambda_\varphi/\lambda_e = c/\upsilon = 200$ ο λόγος της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου προς το έργο εξαγωγής φ του μετάλλου είναι:

α. $\frac{K}{\varphi} = 1$ β. $\frac{K}{\varphi} = 10$ γ. $\frac{K}{\varphi} = 100$

**2.245** Τα διαγράμματα (1) και (2) απεικονίζουν γραφικά τις κανονικοποιημένες κυματοσυναρήσεις για δύο ηλεκτρόνια τα οποία κινούνται στον άξονα $xx'$. Η κυματοσυνάρτηση (2) έχει τιμή μηδέν έξω από μία περιοχή μήκους $\Delta x$. Θεωρούμε και στο σχήμα (1) μια περιοχή μήκους $\Delta x$. Αν $P_1, P_2$ είναι οι πιθανότητες να βρεθούν τα ηλεκτρόνια στην ίδια περιοχή μήκους $\Delta x$ θα ισχύει:




α. $P_1 = P_2$ β. $P_1 > P_2$ γ. $P_1 < P_2$

## ΘΕΜΑΤΑ Γ & Δ

## ΚΡΟΥΣΕΙΣ

**4.1** Ένας κύβος από ξύλο μάζας $M = 1{,}8kg$ ισορροπεί δεμένος στο κάτω άκρο νήματος μήκους $l = 1{,}6m$ του οποίου το άλλο άκρο Ο είναι στερεωμένο στην οροφή. Ένα βλήμα μάζας $m = 0{,}2kg$ συγκρούεται κεντρικά με τον κύβο έχοντας λίγο πριν την κρούση οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_o$.
**α.** Αν η κρούση είναι πλαστική τότε η μέγιστη γωνία που θα σχηματίσει το νήμα με την κατακόρυφο που διέρχεται από το Ο είναι $\varphi = 60^o$, βρείτε:
**i.** Την αρχική ταχύτητα του βλήματος.
**ii.** Το ποσοστό μείωσης της κινητικής ενέργειας του βλήματος κατά την κρούση
**β.** Αν το βλήμα πριν την κρούση είχε αρχικά διπλάσια κινητική ενέργεια βρείτε.
**i.** Την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση.
**ii.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος όταν το νήμα γίνει οριζόντιο.
**γ.** Αν η κρούση μεταξύ βλήματος και κύβου ήταν ελαστική και το βλήμα πριν την κρούση κινείται με ταχύτητα $\upsilon_o$ , βρείτε:
**i.** Αν ο κύβος θα κάνει ανακύκλωση.
**ii.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κύβου όταν το νήμα γίνει οριζόντιο.

Απ. [**α.**i. $4m/s$ ii. 99% **β.** i.60N ii. 20N **γ.** i. οχι ii. $-72\sqrt{2}j/s$]

**Η απώλεια κινητικής** ή μηχανικής ενέργειας είναι ίση με $|\Delta K|$

**Ποσοστό μείωσης κινητικής ενέργειας σώματος:** $|\Delta K|/K$

**Τάση του νήματος σε κυκλική κίνηση.**
Την τάση του νήματος στο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα που εκτελεί κυκλική τροχιά την υπολογίζουμε από τη σχέση:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau\iota\nu\iota\kappa\acute{\omega}\nu} = m\frac{\upsilon^2}{l} \quad (1)$$

Αν το νήμα είναι κατακόρυφο: η τάση του νήματος βάρος είναι ακτινικές δυνάμεις.

**Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής** έχει μέτρο.

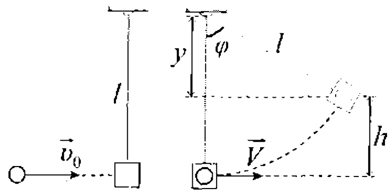
$$\frac{|d\vec{p}|}{dt} = \left|\Sigma\vec{F}\right| = \sqrt{\Sigma F_{\alpha\kappa\tau}^2 + \Sigma F_{\varepsilon\varphi}^2} \quad (2)$$

**Ρυθμός μεταβολής Κινητικής Ενέργειας**

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{dW_W + dW_T}{dt} = \frac{dW_W}{dt} = \frac{dW_{W\varepsilon\varphi} + dW_{W\alpha\kappa\tau}}{dt} = \frac{dW_{W\varepsilon\varphi}}{dt} = \pm w_{\varepsilon\varphi}\upsilon$$

**4.1 Λύση**

**α. i.** Την ταχύτητα $V$ του συσσωματώματος την βρίσκουμε εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ. Το ύψος που φτάνει το συσσωμάτωμα είναι : $h = l - l\sigma\upsilon\nu\varphi = l/2$




$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh \Rightarrow V = \sqrt{gl} = \boldsymbol{4m/s}$$

$$mv_o = (M+m)V \Rightarrow v_o = \frac{(M+m)}{m}V = 40m/s$$

**ii.** $$\frac{|\Delta K|}{K_{\pi\rho}} = \frac{K_{\pi\rho} - K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\rho}} = 1 - \frac{mV^2}{mv^2} = 1 - \frac{V^2}{v^2} = 1 - \frac{1}{100} = \boldsymbol{99\%}$$

**β. i.** Διπλάσια κινητική ενέργεια βλήματος ⇒ αρχική ταχύτητα $u_o = v_o\sqrt{2}$ και

$$V' = \frac{u_o}{10} = 4\sqrt{2}\ m/s$$

Όταν το νήμα σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο ισχύει:

$$T - (M+m)g\sigma\upsilon\nu\varphi = (M+m)\frac{v^2}{l} \Rightarrow T = (M+m)\left(g\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{v^2}{l}\right) \quad (1)$$

$$\text{για } \varphi = 0 \text{ και } \upsilon = V' \Rightarrow T_{max} = (M+m)\left(g + \frac{V'^2}{l}\right) = 2\cdot\left(10 + \frac{32}{1{,}6}\right) = \boldsymbol{60N}$$

**ii.** Όταν το νήμα γίνει οριζόντιο με ΑΔΜΕ ή ΘΜΚΕ βρίσκουμε: $v = \sqrt{V^2 - 2gl} = 0$

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau\iota\nu\iota\kappa\acute{\omega}\nu} = m\frac{v^2}{l} \Rightarrow T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|dp|}{dt} = |\Sigma F| = (M+m)g = \boldsymbol{20N}$$

**γ. Ελαστική κρούση:** Το σώμα μάζας Μ αποκτά μετά την κρούση ταχύτητα $V$

$$V = \frac{2m}{M+m}v_o = \frac{0{,}4}{2}40 = 8m/s$$

$$\text{Από την (1) για } m = 0 : \quad T = M\left(g\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{v^2}{l}\right)$$

Η τάση γίνεται ελάχιστη για $\varphi = 180^o$ (ανώτερη θέση) και είναι: $T_{\varepsilon\lambda} = M\left(-g + \frac{v^2}{l}\right)$

Το νήμα είναι συνεχώς τεντωμένο αν η ελάχιστη τιμή της τάσης να είναι: $T_{\varepsilon\lambda} \geq 0$

$$T_{\varepsilon\lambda} \geq 0 \Rightarrow M\left(-g + \frac{v^2}{l}\right) \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq gl \Rightarrow v \geq \sqrt{16} \Rightarrow v \geq 4m/s$$

Στο μέγιστο ύψος με ΑΔΜΕ ή ΘΜΚΕ: $v = \sqrt{V^2 - 2gh} = \sqrt{64-64} = 0$

Άρα το σώμα **δεν** κάνει ανακύκλωση.

**ii.** Όταν το νήμα γίνει οριζόντιο το σώμα έχει: $v = \sqrt{V^2 - 2gl} = \sqrt{64-32}4\sqrt{2}m/s$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{dW_T}{dt} + \frac{dW_w}{dt} = \frac{-Mgdh}{dt} = -Mgv = \boldsymbol{-72\sqrt{2}j/s}$$

**4.2** Δύο σφαίρες Σ1 και Σ2 με μάζες $m_1 = 2kg$ και $m_2 = 3kg$ κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο στην ίδια ευθεία με ταχύτητες που έχουν αλγεβρικές τιμές $\upsilon_1 = 12\,m/s$ και $\upsilon_2$ αντίστοιχα. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν η μεταβολή ορμής της σφαίρας Σ2 εξ αιτίας της κρούσης έχει αλγεβρική τιμή ίση με $\Delta p_2 = 48kgm/s$ , βρείτε:

**α.** Την ταχύτητα της σφαίρας Σ1 μετά την κρούση.

**β.** Την μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας εξ αιτίας της κρούσης.

**γ.** Την ταχύτητα της σφαίρας Σ2 πριν και μετά την κρούση.

**δ.** Το λόγο των ορμών των δύο σφαιρών πριν και μετά την κρούση.

**ε.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε περίπτωση κεντρικής ελαστικής κρούσης δύο σωμάτων που οι αρχικές τους ορμές είναι αντίθετες, η ταχύτητα κάθε σώματος μετά την κρούση είναι αντίθετη της ταχύτητας του ίδιου σώματος πριν την κρούση.

Απ.[ α. $\upsilon_1' = -12\,m/s$, β.0 γ. $\upsilon_1' = -\upsilon_1, \upsilon_2' = -\upsilon_2$ ,δ. $-1$]

**Μεταβολή Ορμής Σωμάτων σε κρούση**

Σε κάθε κρούση σωμάτων που αποτελούν μονωμένο σύστημα ισχύει:

$$\Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

Στην κεντρική κρούση χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές και γράφουμε.

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2$$

112

**Μεταβολή Κινητικών Ενεργειών σε ελαστική κρούση**

$$\Delta K = 0 \Rightarrow \Delta K_1 = -\Delta K_2$$

**Αντίθετες Ορμές πριν την κρούση**

Κάθε σώμα μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα αντίθετη της αρχικής του

$$p_1 = -p_2 \Rightarrow p_1' = -p_2' \Rightarrow p_1^2 = p_2^2 \;\; και \;\; p_1'^2 = p_2'^2$$

$$K_{\pi\rho} = K_{\mu\varepsilon\tau} \Rightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \Rightarrow$$

$$p_1^2\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = p_1'^2\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) \Rightarrow p_1' = \pm p_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \pm\upsilon_1$$

**Ή διαφορετικά**

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης στους οποίους θα ενσωματώσουμε τη σχέση:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 0 \Leftrightarrow m_1\upsilon_1 = -m_2\upsilon_2$$

## 4.2 Λύση

Θεωρούμε ως θετική φορά την φορά κίνησης της σφαίρας (Α) πριν την κρούση

**α.** Η μεταβολή ορμής της σφαίρας (Α) θα είναι: $\Delta p_1 = -48kgm/s$

$$\Delta p_1 = m_1(v_1' - v_1) \Rightarrow v_1' - v_1 = -24 \Rightarrow v_1' = -24 + 12 \Rightarrow v_1' = \boldsymbol{-12m/s}$$

**β.** Παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες $v_1'$ και $v_1$ είναι αντίθετες , άρα η σφαίρα (Α) πριν και μετά την κρούση έχει την ίδια κινητική ενέργεια.

$$\Delta K_1 = \mathbf{0}$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0 \Rightarrow \Delta K_2 = \mathbf{0} \Rightarrow K_2' = K_2$$

**γ.** Αφού η σφαίρα Β διατηρεί την κινητική της ενέργεια θα ισχύει:

$$|v_2'| = |v_2| \Rightarrow \boldsymbol{v_2' = -v_2}$$

$$\Delta p_2 = m_2(v_2' - v_2) \Rightarrow v_2' - v_2 = \frac{48}{3} \Rightarrow v_2' - v_2 = 16 \Rightarrow$$

$$-v_2 - v_2 = 16 \Rightarrow -2v_2 = 16 \Rightarrow$$

$$v_2 = \boldsymbol{-8\frac{m}{s}} \quad \text{και } v_2' = \boldsymbol{8m/s}$$

**δ.** Οι ορμές των σφαιρών πριν την κρούση είναι:

$$p_1 = m_1 \cdot v_1 = 2 \cdot 12 = 24kgm/s$$

$$p_2 = m_2 \cdot v_2 = -3 \cdot 8 = -24kgm/s$$

Παρατηρούμε ότι οι ορμές των σφαιρών πριν την κρούση είναι αντίθετες άρα και μετά την κρούση θα είναι αντίθετες.

$$\boldsymbol{\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1'}{p_2'} = -1}$$

**ε.** Πριν την κρούση είναι :

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2$$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 = \frac{m_1v_1 - m_2v_1 + m_2 \cdot v_2 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$v'_1 = \frac{-m_2v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_2v_1 - m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}v_1 = -v_1$$

Από την εξίσωση: $v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2 \Rightarrow 0 = v'_2 + v_2 \Rightarrow v'_2 = -v_2$

**4.3** Δύο σφαίρες $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ με μάζες $m_1$ και $m_2 = 4kg$ κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο προς την θετική κατεύθυνση και έχουν ίσες ορμές. Κάποια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση η σφαίρα $\Sigma_1$ έχει χάσει το $96\%$ της κινητικής της ενέργειας ενώ η ορμή της έχει μέτρο $4\,kgm/s$ και κατεύθυνση αντίθετη της αρχικής. Βρείτε:

**α.** Το λόγο των μαζών των δύο σφαιρών.

**β.** Τις ταχύτητες των σφαιρών πριν και μετά την κρούση.

**γ.** Την κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση.

**δ.** Το ποσοστό αύξησης της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ2 εξ αιτίας της κρούσης.

**ε.** Την ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος στη διάρκεια της κρούσης.

Απ[ α. $m_2 = 4m_1$ , β. $4\,m/s$ , $5\,m/s$ , $20m/s$ $11m/s$ , γ. $250j$ , δ. 384% , ε. $160j$]

**Σχέση μαζών σε μία κρούση**

Όταν θέλουμε να βρούμε σχέση μαζών σε μία κρούση τότε προσπαθούμε να εκφράσουμε όλες τις ταχύτητες ως συνάρτηση μιας ταχύτητας πχ της $\upsilon_1$ αξιοποιώντας τα δεδομένα αλλά και τύπους που γνωρίζουμε από τη θεωρία.

**Προσοχή!** Τα σύμβολα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_1', \upsilon_2'$

**Στις κεντρικές κρούσεις** αναφέρονται σε αλγεβρικές τιμές

**Στις πλάγιες-έκκεντρες** κρούσεις αναφέρονται στα μέτρα των ταχυτήτων.

**Ποσοστό μεταβολής** κινητικής ενέργειας ενός σώματος είναι το κλάσμα

$$\kappa = \frac{\Delta K}{K} \cdot 100\%$$

Σε όλη την διάρκεια της κρούσης διατηρούνται:

**Η ορμή και η μηχανική ενέργεια του συστήματος.**

$$K + U_{\varepsilon\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

$U_{\varepsilon\lambda}$ = δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην ελαστική παραμόρφωση των σφαιρών.

**Μέγιστη Δυναμική Ενέργεια Ελαστικής Παραμόρφωσης**

Η $U_{\varepsilon\lambda}$ γίνεται μέγιστη όταν η παραμόρφωση των σφαιρών γίνει μέγιστη , δηλαδή όταν η απόσταση των κέντρων των δύο σφαιρών γίνει ελάχιστη και αυτό συμβαίνει όταν οι σφαίρες αποκτήσουν ίσες ταχύτητες.

$$U_{\varepsilon\lambda} = max \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \quad u_1 = u_2 = u$$

Η κινητική ενέργεια δεν είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κρούσης διότι μετασχηματίζεται σε δυναμική ενέργεια η οποία ξαναγίνεται κινητική ενέργεια.

**4.3 Λύση**

**α.** Πριν την κρούση ισχύει:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow m_1 \upsilon_1 = m_2 \upsilon_2 \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 \quad (1)$$

$$K_1' = K_1 - \frac{96}{100}K_1 = \frac{4}{100}K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \frac{1}{25}\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1'^2 = \frac{1}{25}\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1' = \pm\frac{1}{5}\upsilon_1$$

Επειδή η τελική ορμή της σφαίρας $\Sigma_1$ έχει κατεύθυνση αντίθετη της αρχικής θα είναι:

$$\upsilon_1' = -\frac{1}{5}\upsilon_1 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = -\frac{1}{5}\upsilon_1 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 = -\frac{1}{5}\upsilon_1 \Rightarrow \boldsymbol{m_2 = 4m_1}$$

**β.** Από $m_2 = 4m_1$ προκύπτει ότι: $m_1 = 1kg$

$$P_1' = m_1\upsilon_1' \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{P_1'}{m_1} = -\mathbf{4}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}} \Rightarrow \upsilon_1 = -5\upsilon_1' \Rightarrow \upsilon_1 = \mathbf{20}\boldsymbol{m/s}$$

$$\upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 = \mathbf{5}\boldsymbol{m/s}$$

Από την σχέση: $\upsilon_2 + \upsilon'_2 = \upsilon_1 + \upsilon'_1 \Rightarrow 5 + \upsilon'_2 = 20 - 4 \Rightarrow \upsilon'_2 = \mathbf{11}\boldsymbol{m/s}$

**γ.** $K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}1\cdot 400 = 200j \quad \kappa\alpha\iota \quad K_2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}4\cdot 25 = 50j$

$$K_{\mu\varepsilon\tau} = K_{\pi\rho} = 200 + 50 = \mathbf{250}\boldsymbol{j}$$

**δ.**

$$K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}4\cdot 121 = 242j$$

$$\frac{\Delta K_2}{K_2} = \frac{242 - 50}{50} = \frac{192}{50} = \frac{384}{100} = \mathbf{384\%}$$

**ε.** Η μηχανική ενέργεια διατηρείται σε όλη τη διάρκεια μιας ελαστικής κρούσης.

$$K + U_{\varepsilon\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$$

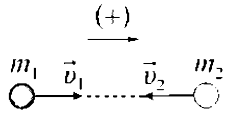
Η κινητική ενέργεια $K$ του συστήματος γίνεται ελάχιστη όταν $U_{\varepsilon\lambda} = max$ δηλαδή όταν η παραμόρφωση των σωμάτων γίνει μέγιστη και τότε είναι:

$$u_2 = u_1 = u$$

Από διατήρηση ορμής : $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \xrightarrow{\upsilon_1 = \upsilon_2 = u}$

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u + m_2u \Rightarrow u = \frac{20 + 20}{5} = 8m/s$$

$$K_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}5\cdot 64 = \mathbf{160}\boldsymbol{j}$$




**4.4** Δύο μικρές μεταλλικές σφαίρες $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ με μάζες $m_1 = 3\,kg$ και $m_2 = 1\,kg$ κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες ίδιου μέτρου $\upsilon_o$ και κάποια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Η σφαίρα $\Sigma_1$ κινείται προς την θετική κατεύθυνση και η μεταβολή της ορμής της σφαίρας $\Sigma_2$ εξ αιτίας της κρούσης είναι $+30kgm/s$ .

**α.** Βρείτε:

**i.** Τις ταχύτητες των σφαιρών πριν και μετά την κρούση.

**ii.** Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας ώσπου οι σφαίρες να αποκτήσουν το αρχικό τους σχήμα.

**β.** Κάποια στιγμή $t$ κατά την διάρκεια της κρούσης η ταχύτητα της σφαίρας Σ1 έχει μέτρο $5m/s$. Τη στιγμή $t$ βρείτε:

**i.** Την ταχύτητα της σφαίρας Σ2.

**ii.** Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας των σφαιρών που έχει μετατραπεί σε ελαστική δυναμική ενέργεια μέχρι τη στιγμή $t$.

Απ. [α. i. $(10\,m/s\,, -10\,m/s\,), (0{,}20\,m/s)$ ii. $(-100\%, +300\%)$ , β. i $u_2 = 5m/s$ ii75%]

**Εφαρμογή τύπων Ελαστικής Κρούσης**

Τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης.

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \ , \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2$$

Τους εφαρμόζουμε όταν δίδεται ότι η κρούση είναι **«κεντρική ελαστική κρούση»**
Αν μας δίνουν το μέτρο κάποιας ταχύτητας την αλγεβρική της τιμή θα την βρίσκουμε εμείς σύμφωνα με την θετική φορά που έχουμε επιλέξει.

**Επαλήθευση αποτελεσμάτων ταχυτήτων**

Χρήσιμο είναι μετά τους υπολογισμούς των αλγεβρικών τιμών των ταχυτήτων να κάνουμε επαλήθευση χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\upsilon_1' + \upsilon_1 = \upsilon_2' + \upsilon_2$$

Κάποια τυχαία στιγμή $t$ κατά την διάρκεια της κρούσης τα σώματα είναι παραμορφωμένα και έχουν ταχύτητες $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ με αλγεβρικές τιμές $u_1, u_2$.

**Όσο διαρκεί η κρούση**

Η ορμή του συστήματος διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της κρούσης.
Η δυναμική ενέργεια λόγω ελαστικής παραμόρφωσης κάποια στιγμή υπολογίζεται από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος η οποία ισχύει σε όλη την διάρκεια της κρούσης.

$$K_{\pi\rho} = K + U_{\varepsilon\lambda}$$

**4.4 Λύση**

**α. i.** Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση έχουν αλγεβρικές τιμές

$$\upsilon_1 = \upsilon_o \,, \upsilon_2 = -\boldsymbol{\upsilon_o}$$

Θα υπολογίσουμε τις αλγεβρικές τιμές $\upsilon'_1, \upsilon'_2$ με την βοήθεια των τύπων της κεντρικής ελαστικής κρούσης.

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{2}{4}\upsilon_o + \frac{2}{4}(-\upsilon_o) = \mathbf{0}$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{6}{4}\upsilon_o + \frac{-2}{4}(-\upsilon_o) = \frac{6}{4}\upsilon_o + \frac{2}{4}\upsilon_o = \boldsymbol{2\upsilon_o}$$

$p_2, p'_2$ είναι οι αλγεβρικές τιμές της ορμής της σφαίρας Σ2 πριν και μετά την κρούση:

$$p_2 = m_2\upsilon_2 = -m_2\upsilon_o \quad \kappa\alpha\iota \quad p'_2 = m_2\upsilon'_2 = m_2 2\upsilon_o$$

$$\Delta p_2 = m_2\upsilon'_2 — m_2\upsilon_o \Rightarrow \Delta p_2 = 2m_2\upsilon_o + m_2\upsilon_o \Rightarrow \Delta p_2 = 3m_2\upsilon_o \Rightarrow$$

$$\upsilon_o = \frac{\Delta p_2}{3m_2} \Rightarrow \upsilon_o = \mathbf{10\frac{m}{s}} \Rightarrow \upsilon'_2 = \mathbf{20m/s}$$

**ii.** Αφού η ταχύτητα της σφαίρας Σ1 μηδενίζεται σημαίνει πως

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} = \frac{K'_1 - K_1}{K_1} = -1 = \mathbf{-100\%}$$

$$\frac{\Delta K_2}{K_2} = \frac{K'_2 - K_2}{K_2} = \frac{4K_2 - K_2}{K_2} = \frac{3}{1} = \mathbf{300\%}$$

**β. i.** Η ορμή του συστήματος είναι σταθερή. Αρκεί να βρούμε την ορμή πριν την κρούση

$$p = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 3 \cdot 10 - 1 \cdot 10 = 20kg\frac{m}{s}$$

Η ταχύτητα της σφαίρας Σ1 κατά την διάρκεια της κρούσης μειώνεται συνεχώς από την τιμή $\upsilon_1 = 10\,m/s$ μέχρι να αποκτήσει την τελική της τιμή την τιμή $\upsilon'_1 = 0$. Έτσι κάποια στιγμή θα έχει τιμή $u_1 = 5m/s$ ,τότε η ταχύτητα της Σ2 έχει αλγεβρική τιμή $u_2$. Σε όλη τη διάρκεια της κρούσης η ορμή του συστήματος διατηρείται.

$$m_1u_1 + m_2u_2 = P \Rightarrow 3 \cdot 5 + 1 \cdot u_2 = 20 \Rightarrow u_2 = \mathbf{5m/s}$$

Όταν $u_1 = u_2 = u = 5m/s$ : $\quad K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = 50j$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των σφαιρών πριν την κρούση είναι:

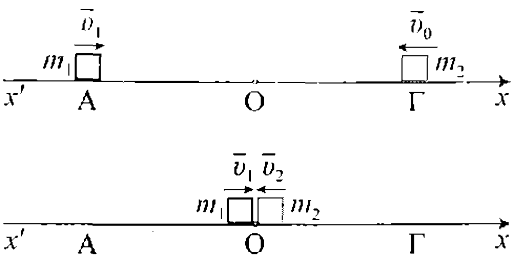
$$K_{\pi\rho} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_o^2 = 200j$$

Σε όλη την διάρκεια της κρούσης ισχύει η ΑΔΜΕ

$$K_{\pi\rho} + U_{\varepsilon\lambda(o)} = K + U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow 200 + 0 = 50 + U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = 150j$$

$$\frac{U_{\varepsilon\lambda}}{K_{\pi\rho}} = \frac{150}{200} = \mathbf{75\%}$$

**4.5** Δύο σώματα Σ1 με και Σ2 με μάζες $m_1$ και $m_2$ κινούνται στην ίδια ευθεία $x'x$ οριζόντιου επιπέδου. Ο συντελεστής τριβής είναι:




$$\mu = \begin{cases} 0 \ \gamma\iota\alpha \ x < 0 \\ \\ 0{,}6 \ \gamma\iota\alpha \ x > 0 \end{cases}$$

Τη στιγμή $t_o = 0$ τα σώματα διέρχονται από τα σημεία Α και Γ με ταχύτητες με κατεύθυνση προς την αρχή Ο του άξονα $x'x$ και μέτρα $\upsilon_1 = 9m/s$ και $\upsilon_o = 12m/s$ . Τη στιγμή $t = 1s$ τα σώματα φτάνουν στο Ο όπου συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Άν μετά την κρούση το σώμα Σ1 διανύει διάστημα $9{,}75m$ ώσπου να σταματήσει, βρείτε:

**α.** Τις ταχύτητες των σωμάτων λίγο πριν την κρούση.

**β.** Την αρχική απόσταση $d$ των σωμάτων.

**γ.** Το λόγο των μαζών των δύο σωμάτων.

**δ** Την τελική απόσταση των δύο σωμάτων.

**ε.** Δείξτε γραφικά πως μεταβάλλονται οι ταχύτητες των σωμάτων σαν συνάρτηση του χρόνου θεωρώντας ασήμαντη τη χρονική διάρκεια της κρούσης.

Απ.[ α. $9m/s, -6m/s$, β. $18m$ γ. $m_1/m_2 = 4/1$ δ. $26{,}25m$]



**Όταν σε ευθύγραμμη κίνηση εμπλέκεται ο χρόνος**

Όταν σε μία ευθύγραμμη κίνηση εμπλέκεται χρόνος ως δεδομένο ή ως ζητούμενο θα χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδη νόμο.

$$\Sigma F = ma$$

Σε συνδυασμό με τις εξισώσεις κίνησης $\upsilon = f(t)$ , $x = f(t)$

**Επιτάχυνση ανεξάρτητη της μάζας**

Η επιτάχυνση που αποκτά ένα σώμα είναι ανεξάρτητη της μάζας του όταν οι δυνάμεις στην διεύθυνση της κίνησης είναι:

- Μόνο το βάρος
- Μόνο η τριβή ολίσθησης
- Μόνο η συνιστώσα του βάρους και η τριβή ολίσθησης ( Κεκλιμένο επίπεδο)

**Μέγιστη μετατόπιση σε ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση**

Η μέγιστης μετατόπιση είναι:

$$s = \frac{\upsilon_o^2}{2|\alpha|}$$

Μπορεί να προκύψει και με εφαρμογή του ΘΜΚΕ.

Στη συγκεκριμένη άσκηση η πληροφορία ότι το σώμα Σ1 σταματάει κάποια στιγμή μετά την κρούση είναι πολύ σημαντική και πρέπει να την αξιοποιήσουμε.

**4.5 Λύση**

**α.** Το σώμα Σ1 κινείται με σταθερή ταχύτητα, πριν την κρούση έχει ταχύτητα $\upsilon_1$.
Σε χρόνο $t = 0{,}5s$ το σώμα Α έχει διανύσει απόσταση $d_1 = |\upsilon_1|t = 9 \cdot 1 = \boldsymbol{9m}$.
Θεωρούμε ως θετική την φορά της ταχύτητας του Σ1
Το σώμα Β κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου:

$$|\alpha| = \mu g = 6m/s^2$$

Η εξίσωση ταχύτητας είναι: $\upsilon = \upsilon_o + \alpha t \xrightarrow{t=1s} \upsilon_2 = -12 + 6 \cdot 1 = \boldsymbol{-6m/s}$

**β.** Την αρχική θέση $x_{o(2)}$του Σ2 πριν την κρούση την βρίσκουμε από τη σχέση:

$$\Delta x = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow x - x_{o(2)} = -12 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \Rightarrow 0 - x_{o(2)} = -9 \Rightarrow x_{o(2)} = -9m$$

Η αρχική απόσταση των σωμάτων είναι :

$$d = |x_{o(2)} - x_{o(2)}| = |9 - (-9)| = \boldsymbol{18m}$$

**γ.** Το $\Sigma_1$ σταματάει μετά την κρούση διότι μετά την κρούση κινείται σε περιοχή με τριβή.
Άρα η ταχύτητα του $\Sigma_1$ μετά την κρούση έχει θετική φορά.

$$s_1 = d_1 + d_1' \Rightarrow d_1' = 9{,}75 - 9 \Rightarrow d_1' = 0{,}75m$$

Με ΘΜΚΕ για την επιβραδυνόμενη κίνηση του $\Sigma_1$ καταλήγουμε στο γνωστό τύπο:

$$\upsilon_1'^2 = 2\mu g d_1' \Rightarrow \upsilon'_1 = \sqrt{2\mu g d_1'} \Rightarrow \upsilon'_1 = 3m/s$$

Μπορούμε να βρούμε το λόγο των μαζών από τους τύπους της ελαστικής κρούσης

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (1), \qquad \upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow 3 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}9 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(-6) \Rightarrow m_1 = 4m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \boldsymbol{\frac{4}{1}}$$

**δ.** Από τον τύπο (2) θα υπολογίσουμε την $\upsilon'_2$

$$\upsilon'_2 = \frac{8m_2}{5m_2}9 + \frac{-3m_2}{5m_2}(-6) = \frac{90}{5} = 18m/s$$

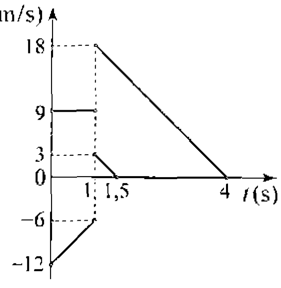
Το Σ2 κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και σταματάει αφού διανύσει απόσταση $d_1'$ που την υπολογίζουμε με ΘΜΚΕ ή με τις εξισώσεις κίνησης.

$$d'_2 = \frac{\upsilon_2'^2}{2\mu g} = \frac{324}{12} = 27m$$

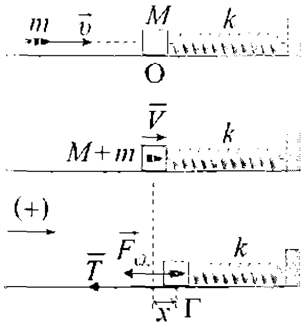
Η απόσταση των σωμάτων είναι τότε: $d' = 27 - 0{,}75 = \boldsymbol{26{,}25m}$

**ε.** Οι ταχύτητες των σωμάτων μηδενίζονται μετά από χρόνο $\Delta t$.

$$\Delta t = \frac{\upsilon_o}{\mu g} \Rightarrow \begin{cases} \Delta t_1 = 0{,}5 \\ \Delta t_2 = 3s \end{cases}$$



**4.6** Σώμα μάζας $M = 9Kg$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 160N/m$ και ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu = 0{,}3$. Βλήμα μάζας $m = 1kg$ κινείται οριζόντια στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και σφηνώνεται στο σώμα με ταχύτητα $\upsilon = 10m/s$.




**α.** Την μεταβολή της ορμής του βλήματος εξ αιτίας της κρούσης.(αλγεβρική τιμή)
**β.** Να υπολογίσετε την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.
**γ.** Εξετάστε αν το σώμα επιστρέφει στην θέση που έγινε η κρούση.
**δ.** Την τιμή του συντελεστή τριβής ώστε το σώμα να διανύει διπλάσιο διάστημα ώσπου να μηδενιστεί η ταχύτητα του.
**ε.** Αν η κρούση ήταν ελαστική και ο συντελεστής τριβής $\mu = 0{,}2$ βρείτε το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας όταν το σώμα μάζας Μ θα έχει διανύσει διάστημα $s = 0{,}75m$.

Απ. [ α. $V = 1\frac{m}{s}$, β.$0{,}125m$ ,γ. όχι δ. δ.0 ε. $-18j/s$]

**Σε μία κρούση ελεύθερων σωμάτων:**

- Δεν μεταβάλλεται η ορμή του συστήματος
- Μεταβάλλεται η ορμή κάθε σώματος.
- Οι μεταβολές ορμής των δύο σωμάτων είναι αντίθετες $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$

Σε κεντρική κρούση χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές διανυσμάτων.

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2$$

**Έργο Ελατηριακής Δύναμης**

$$W_{F\varepsilon\lambda} = U_{\varepsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\varepsilon\lambda(\tau\varepsilon\lambda)}$$

**Έργο Τριβής:**

Το έργο τριβής μετρά την ποσότητα μηχανικής ενέργειας που γίνεται θερμότητα

$$|W_T| = Q$$

**Δύναμη Στατικής τριβής**

Εμφανίζεται όταν κάποια δύναμη προσπαθεί να κινήσει ένα σώμα αλλά το σώμα παραμένει ακίνητο. Η στατική τριβή παίρνει τιμές: $0 \le T_s \le T_{o\rho}$

Συνθήκη μη ολίσθησης σώματος:

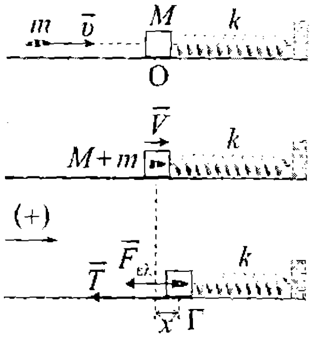
$$T_s \le T_{o\rho} \Rightarrow T_s \le \mu_s N$$

Πολλές φορές θεωρούμε τον συντελεστή στατικής τριβής ίσο με το συντελεστή τριβής ολίσθησης.

**4.6 Λύση**

**α.** ΑΔΟ για την πλαστική κρούση (αλγεβρικά): $mv = (M+m)V \Rightarrow V = \mathbf{1\,m/s}$

$$\Delta p_m = mV - mv = 1 - 10 = \mathbf{-9kgm/s}$$




**β.** ΘΜΚΕ για την κίνηση συσσωματώματος.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F_{ελ}} + W_T \Rightarrow$$

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)} + W_T$$

$$-\frac{1}{2}(M+m)V^2 = -\frac{1}{2}kx^2 - \mu(M+m)gx \Rightarrow$$

$$16x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm 10}{32} \Rightarrow \begin{cases} x = -0{,}5 \\ x = \mathbf{0{,}125\ m} \end{cases}$$

**γ.** Όταν γίνει $v = 0$ η ελατηριακή δύναμη έχει μέτρο: $F_{ελ} = k\Delta l = kx = 20N$

Η δύναμη τριβής έχει μέτρο περίπου: $T = \mu(M+m)g = 0{,}3 \cdot 100 = 30N$

Άρα το συσσωμάτωμα **θα παραμείνει ακίνητο**.

**δ.** Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$K = 1/2\,(M+m)V^2 = 5j$$

Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου θα γίνει $\Delta l' = 2 \cdot 0{,}125 = 0{,}25m$

$$U'_{ελ(τελ)} = \frac{1}{2}k\Delta l'^2 = \frac{1}{2}160 \cdot 0{,}25^2 = 5j$$

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F_{ελ}} + W_T \Rightarrow -5 = 0 - 5 + W_T \Rightarrow W_T = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\mu = 0}$$

**ε. Ελαστική κρούση:** Μετά την κρούση το σώμα μάζας Μ θα αποκτήσει ταχύτητα

$$V = \frac{2m}{M+m}v = \frac{2 \cdot 1}{10} \cdot 10 = 2m/s$$

Και κινητική ενέργεια: $K = 1/2\,MV^2 = 18j$

**ΑΔΕ:** $K = Tx + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow 18 = 0{,}2 \cdot 9 \cdot 10x + 80x^2 \Rightarrow 40x^2 + 9x - 9 = 0$

$$\Delta = 81 + 1440 = 1521 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm 39}{80} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}m$$

Το σώμα επιστρέφει προς τα πίσω και το διάστημα s είναι:

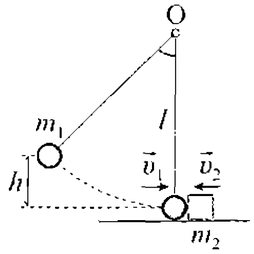
$$s = 3/4 = 2 \cdot (3/8)$$

Άρα το σώμα βρίσκεται στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

ΘΜΚΕ για την κλειστή διαδρομή ( το έργο της συντηρητικής δύναμης είναι μηδέν)

$$K' - K = W_T \Rightarrow K' - 18 = -18 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow K' = 4{,}5 \Rightarrow \frac{1}{2}9u^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow u = 1m/s$$

$$\frac{dE_{μηχ}}{dt} = -Tv = -18 \cdot 1 = \mathbf{-18j/s}$$




**4.7** Μικρή σφαίρα μάζας $m_1 = 1kg$ είναι δεμένη στο άκρο ιδανικού νήματος μήκους $l = 0{,}8m$ του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο Ο. Αρχικά η σφαίρα ισορροπεί με το νήμα κατακόρυφο. Κρατώντας τεντωμένο το νήμα πάμε τη σφαίρα σε μια θέση Α η οποία βρίσκεται σε ύψος $h = 0{,}2m$ και εκεί αφήνουμε ελεύθερη τη σφαίρα να κινηθεί. Όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο η σφαίρα συγκρούεται μετωπικά με κύβο μάζας $m_2 = 3kg$ ο οποίος κινείται στο λείο οριζόντιο δάπεδο και λίγο πριν την κρούση έχει ταχύτητα μέτρου $2m/s$ και αντίθετης φοράς από την ταχύτητα της σφαίρας. Εξ αιτίας της κρούσης η σφαίρα ανεβαίνει μέχρι εκείνο το ύψος στο οποίο η τάση του νήματος γίνεται μηδέν $(T = 0)$. Βρείτε:

**α.** Τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
**β.** Το είδος της κρούσης.
γ. Την τελική ταχύτητα του κύβου.
**δ.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος και το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής όταν το νήμα σχηματίζει την μέγιστη γωνία με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σταθερό άκρο του.

Δίδεται $g = 10m/s^2$

Απ. [α. $\upsilon_1' = -4m/s$ ,0, β. Ελαστική γ. $2m/s$ δ. $10m/s^2$, $8Nm$ ]



**Τάση νήματος**

Σε τυχαία θέση κυκλικής τροχιάς η συνισταμένη των ακτινικών δυνάμεων αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη

$$T - mg\sigma\upsilon\nu\theta = m\frac{\upsilon^2}{l} \Rightarrow$$

Αν γνωρίζουμε $T$ και $\upsilon$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία $\theta$

**Έργα Δυνάμεων**

- Το έργο της τάσης είναι $W_T = 0$ διότι η $\vec{T}$ είναι κάθετη στην ταχύτητα.
- Το έργο του βάρους για κατακόρυφη μετατόπιση μέτρου $h$ είναι:

$$W_{\beta\alpha\rho o\upsilon\varsigma} = \pm mgh$$

Σε ανοδική κίνηση: $W_{\beta\alpha\rho o\upsilon\varsigma} = -mgh$

Σε καθοδική κίνηση: $W_{\beta\alpha\rho o\upsilon\varsigma} = +mgh$

Ο **ρυθμός μεταβολής στροφορμής** είναι ίσος τη συνισταμένη των ροπών.

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau$$

**4.7 Λύση**

**α.** ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας και βρίσκουμε την ταχύτητα $\upsilon_1$ πριν την κρούση.

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{4} = 2m/s$$

Σε τυχαία θέση το νήμα σχηματίζει γωνία $\theta$ με την κατακόρυφη, αναλύουμε το βάρος σε ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα που έχουν μέτρα:

$$mg\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{και} \quad mg\eta\mu\theta.$$

Για τις ακτινικές δυνάμεις γράφουμε:

$$T - mg\sigma\upsilon\nu\theta = m\frac{\upsilon^2}{l} \xrightarrow{\upsilon=0 \text{ και } T=0} \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας μετά την κρούση και βρίσκουμε την ταχύτητα $\upsilon_1'$.

$$|\upsilon_1'| = \sqrt{2gl} = 4m/s$$

ΑΔΟ. Για την κρούση: $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$

Αν $\boldsymbol{\upsilon_1' = -4m/s} \Rightarrow \upsilon_2' = 0$

$A\nu \quad \upsilon_1' = 4m/s \Rightarrow \upsilon_2' < 0$ **άτοπο**

Άρα είναι $\boldsymbol{\upsilon_2' = 0}$

**β.** Η κρούση είναι **ελαστική** αφού ισχύει:

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2' \Leftrightarrow 2 + (-4) = -2 + 0 \Leftrightarrow -2 = -2 \ (\text{Αληθής})$$

**γ.** Αφού ο κύβος μένει ακίνητος τα σώματα θα συγκρουστούν ξανά (δύο κρούσεις).
Η σφαίρα θα επιστέψει στην θέση της κρούσης με ταχύτητα $u_1 = 4m/s$ και τα σώματα μετά την κρούση θα αποκτήσουν ταχύτητες $u_1'$ και $u_2'$.

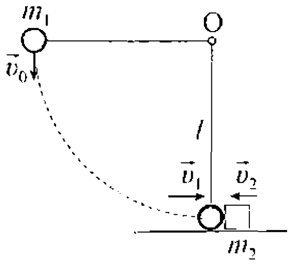
$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 = -2m/s$$

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 = \boldsymbol{2m/s}$$

**δ.** Η μέγιστη γωνία είναι όταν το νήμα γίνει οριζόντιο.

$$\Sigma F = ma \Rightarrow m_1 g = ma \Rightarrow a = g \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \boldsymbol{g = 10m/s^2}$$

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = m_1 gl = 1 \cdot 10 \cdot 0{,}8 = \boldsymbol{8Nm}$$




**4.8** Το σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 1kg$ του διπλανού σχήματος είναι δεμένο με αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους $\ell = 2\,m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο Ο. Εκτρέπουμε το σώμα ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και το εκτοξεύουμε από τη θέση αυτή με κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0$. Τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο, το σώμα $\Sigma_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2 = 3kg$ , το οποίο κινείται στο λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$, αντίθετης φοράς από αυτή που έχει το σώμα μάζας $m_1$ ελάχιστα πριν την κρούση. Αν η τάση του νήματος λίγο πριν την κρούση έχει μέτρο $T = 34{,}5N$ και εξ αιτίας της κρούσης, η μεταβολή της ορμής του σώματος $\Sigma_2$ έχει μέτρο $|\Delta P_2| = 21kgm/s$, βρείτε:

**α.** Την ταχύτητα $\upsilon_o$ που δώσαμε αρχικά στο σώμα Σ1.

**β.** Την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση.

**γ.** Την ταχύτητα του σώματος Σ2 πριν και μετά την κρούση.

**δ.** Το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας Σ1 εξαιτίας της κρούσης.

**ε.** Να εξετάσετε αν το σώμα Σ1 μετά την κρούση εκτελεί ανακύκλωση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,m/s^2$. Θεωρήστε αμελητέες τις τριβές κατά την κίνηση του σώματος μάζας $m_2$.

Απ.[ α. $\upsilon_o = 3m/s$ β. $T' = 108N$ γ. $\upsilon_2 = -21\,m/s\,, \upsilon_2' = 14m/s$ δ. 300% ε. ΝΑΙ]

**Πως υπολογίζουμε ποσοστά**

Το ποσοστό είναι ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100. Για τον υπολογισμό του πρέπει να κατανοήσουμε και να γράψουμε το κλάσμα που μας ζητάνε.

Ποσοστό μεταβολής κινητικής ενέργειας σώματος με αρχική κινητική ενέργεια $K$

$$\pi = \frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta K}{K} \cdot 100\%$$

**Ανακύκλωση σώματος που είναι δεμένο στο άκρο νήματος**

Πρέπει το νήμα να είναι συνέχεια τεντωμένο άρα πρέπει για το μέτρο της τάσης του νήματος να ισχύει σε όλες τις θέσεις.

$$T \geq 0$$

Αρκεί η τελευταία σχέση να ισχύει και για την ελάχιστη τιμή της τάσης. Αποδείξαμε πως το μέτρο της τάσης γίνεται ελάχιστο στο ανώτερο σημείο Δ της τροχιάς.

$$\sigma\tau o\ \Delta :\quad \Sigma F_{\alpha\kappa\tau\iota\nu\iota\kappa\acute{\omega}\nu} = m\frac{\upsilon_\Delta^2}{l} \Rightarrow T - mg = m\frac{\upsilon_\Delta^2}{l} \Rightarrow T = m(\frac{\upsilon_\Delta^2}{l} - g)$$

$$T \geq 0 \Rightarrow \frac{\upsilon_\Delta^2}{l} - g \Rightarrow\ \upsilon_\Delta\ \geq \sqrt{gl}$$

**4.8 Λύση**

**α.** Λίγο πριν την κρούση το Σ1 έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ της οποίας το μέτρο $\upsilon_1$ το βρίσκουμε αφού γνωρίζουμε την τάση του νήματος για την οποία ισχύει:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = m_1\frac{\upsilon_1^2}{l} \Rightarrow T - m_1 g = m_1\frac{\upsilon_1^2}{l} \Rightarrow$$

$$34{,}5 - 10 = \frac{\upsilon_1^2}{l} \Rightarrow 24{,}5 = \frac{\upsilon_1^2}{2} \Rightarrow \upsilon_1^2 = 49 \Rightarrow \upsilon_1 = 7m/s$$

ΑΔΜΕ ή ΘΜΚΕ από την θέση Α(νήμα οριζόντιο) ως την θέση Γ της κρούσης.

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 + m_1 g l = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_o^2 = \upsilon_1^2 - 2gl \Rightarrow \upsilon_o = \sqrt{49-40} \Rightarrow \upsilon_o = \boldsymbol{3m/s}$$

**β.** Η μεταβολή της ορμής του σώματος $\Sigma_2$ έχει αλγεβρική τιμή: $\Delta p_2 = 21kgm/s$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ1 θα είναι:

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 = -21kgm/s$$

$$\Delta p_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 \Rightarrow -21 = \upsilon_1' - 7 \Rightarrow \upsilon_1' = -14m/s$$

Για τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = m_1\frac{\upsilon_1'^2}{l} \Rightarrow T' - m_1 g = m_1\frac{\upsilon_1'^2}{l} \Rightarrow$$

$$T' = m_1 g + m_1\frac{\upsilon_1'^2}{l} = m_1\left(g + \frac{\upsilon_1'^2}{l}\right) = \boldsymbol{108N}$$

**γ.** Εφαρμόζουμε τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης.

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \Rightarrow$$

$$-14 = \frac{-1}{2}7 + \frac{1}{2}\upsilon_2 \Rightarrow -28 = -7 + \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \boldsymbol{-21m/s}$$

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2' \Rightarrow 7 - 14 = -21 + \upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_2' = \boldsymbol{14m/s}$$

**δ.** Θα υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος $\Sigma_1$ πριν και μετά:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}1\cdot 49 = 24{,}5j \quad \kappa\alpha\iota \quad K_1' = 4K_1 = 98j$$

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} = \frac{3K_1}{K_1} = \boldsymbol{300\%}$$

**ε.** Έστω ότι το σώμα φτάνει στην ανώτερη θέση Γ. Με ΘΜΚΕ θα βρούμε την ταχύτητα του στο ψηλότερο σημείο Δ και θα τη συγκρίνουμε με την ελάχιστη ταχύτητα που απαιτείται για ανακύκλωση: $\upsilon_{\varepsilon\lambda} = \sqrt{gl} = \sqrt{20}m/s$

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_2'^2 - 2g2l} = \sqrt{196-80} = \sqrt{110} > \sqrt{20} \Rightarrow \textbf{Ανακύκλωση}$$

125

**4.9** Δύο σφαίρες Σ1 και Σ2 με μάζες $m_1 = 1kg$ και $m_2 = 3kg$ κρέμονται στα κάτω άκρα δύο κατακόρυφων νημάτων που έχουν ίδιο μήκος $\ell = 0{,}8\,m$ και ισορροπούν έτσι ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους . Εκτρέπουμε τη σφαίρα Σ1 από την αρχική της θέση ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία $\varphi$ με την αρχική του θέση και το αφήνουμε ελεύθερο. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά χωρίς να δημιουργείται συσσωμάτωμα και το 75% της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ1 μεταβιβάζεται στο σώμα Σ2. Αν λίγο πριν την κρούση οι τάσεις στα νήματα είναι ίσες , βρείτε:

**α.** Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ1 πριν την κρούση.

**β.** Τη γωνιακή μετατόπιση του σώματος ως τη στιγμή της κρούσης.

**γ.** Αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική.

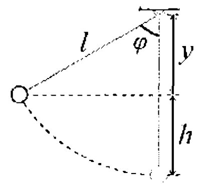
**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της σφαίρας Σ2 όταν το μέτρο της τάσης γίνει ίσο με το 60% της τιμής που είχε αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,m/s^2$.

Απ.[α. $4m/s$. β. $\pi'/2$γ. ελαστική, δ.0 ]

**Υπολογισμός γωνίας φ**

Με το Θεώρημα έργου-ενέργειας (ΘΜΚΕ) ή την Αρχή διατήρηση ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος $h$ που βρίσκεται αρχικά το σώμα. Με τη βοήθεια του σχήματος θα υπολογίσουμε το συνημίτονο της γωνίας




$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{y}{l} = \frac{l-h}{l}$$

**Είδος κρούσης**

Όταν δεν γνωρίζουμε το είδος της κρούσης (ελαστική ή ανελαστική) τότε θα εφαρμόζουμε μόνο την διατήρηση της ορμής.

**Κριτήριο Ελαστικής Κρούσης**

$$\text{Ελαστική Κρούση όταν} \begin{cases} K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \\ \text{ή} \\ \upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2' \quad \text{μόνο για κεντρική κρούση} \end{cases}$$

**Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας**

Σε ένα ενεργειακό ρυθμό μεταβολής πριν αρχίσουμε να τον υπολογίζουμε προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε το πρόσημο του με απλές φυσικές σκέψεις.

Αν το σώμα ανεβαίνει θα προκύψει $dU/dt > 0$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\frac{dW_{o\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{w\varepsilon\varphi}}{dt} = \pm mg\eta\mu\theta \cdot \upsilon$$

**4.9 Λύση**

**α.** Η τάση κάθε νήματος υπολογίζεται από τη σχέση

$$T - mg = m\frac{\upsilon^2}{l} \Rightarrow T = mg + m\frac{\upsilon^2}{l}$$

Από την εκφώνηση έχουμε τη σχέση των τάσεων :

$$T_1 = T_2 \Rightarrow m_1 g + m_1\frac{\upsilon_1^2}{l} = m_2 g \Rightarrow m_1 g + m_1\frac{\upsilon_1^2}{l} = 3m_1 g \Rightarrow$$

$$m_1\frac{\upsilon_1^2}{l} = 2m_1 g \Rightarrow \upsilon_1^2 = 2gl \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gl} = \mathbf{4m/s}$$

**β.** Από ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας Σ1 πριν την κρούση

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gl(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)} \Rightarrow 1-\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\upsilon_1^2}{2gl} = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = 90^o}$$

**γ.** $K_2' = \frac{3}{4}K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}3m_1\upsilon_2'^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{1}{2}\upsilon_1 = 2m/s$

ΑΔΟ για την κρούση: $m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Rightarrow m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + 3m_1\upsilon_2' \Rightarrow$

$$\upsilon_1 = \upsilon_1' + 3\upsilon_2' \Rightarrow 4 = \upsilon_1' + 3\cdot 2 \Rightarrow \upsilon_1' = -2m/s$$

$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2' \Rightarrow 4 + (-2) = 0 + 2$ Άρα η κρούση είναι **ελαστική**

127

**δ.** Η τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T - mg\sigma\upsilon\nu\theta = m\frac{\upsilon^2}{l} \Rightarrow T = mg\sigma\upsilon\nu\theta + m\frac{\upsilon^2}{l} \quad (1)$$

ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας Σ2

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -mgl(1-\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_o^2 - 2gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta) \quad (2)$$

$$(1)\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ (2) \Rightarrow \quad T = mg\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{m}{l}\left(\upsilon_o^2 - 2gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)\right) \Rightarrow$$

$$T = mg\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{m\upsilon_o^2}{l} - 2\,mg(1-\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow T = m\left[\frac{\upsilon_o^2}{l} - g(2-3\sigma\upsilon\nu\theta)\right] \quad (3)$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \quad T = \frac{m\upsilon_o^2}{l} - mg(2-3) = \frac{m\upsilon_o^2}{l} + mg$$

$$\Gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ \Sigma_2 \Rightarrow \quad T = m_2\left(\frac{\upsilon_2'^2}{l} + g\right) = 3\left(\frac{4}{0{,}8} + 10\right) = 3\cdot 15 = 45N$$

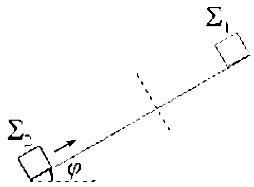
Όταν το μέτρο της τάσης είναι $T' = 0{,}6T = 27N$ τότε η (3) γράφεται:

$$27 = 3\left[\frac{\upsilon_o^2}{l} - g(2-3\sigma\upsilon\nu\theta)\right] \Rightarrow 9 = (5 - 20 + 30\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow \text{συνθ} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 - 2gl(1-\sigma\upsilon\nu\theta)} = \sqrt{4 - 20(1-0{,}8)} = 0$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\frac{dW_{o\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{w\varepsilon\varphi}}{dt} = -mg\eta\mu\theta\cdot\upsilon \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \mathbf{0}$$

**4.10** Δύο σώματα Σ1 και Σ2 με μάζες $m_1 = 0{,}1kg$ και $m_2 = 0{,}9kg$ ,συγκρατούνται ακίνητα με το $\Sigma_1$ στην κορυφή και το $\Sigma_2$ στην βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\varphi = 30^o$ και μήκους $s = 4m$. Τη στιγμή $t_o = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το $\Sigma_1$ ενώ ταυτόχρονα εκτοξεύουμε το σώμα $\Sigma_2$ προς τα πάνω με ταχύτητα $\upsilon_o = 5m/s$. Κάποια στιγμή τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και μετά την κρούση το Σ2 επιστρέφει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου με κινητική ενέργεια η οποία είναι κατά $0{,}45j$ μικρότερη της αρχικής του κινητικής ενέργειας. Βρείτε:

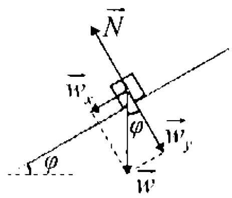



**α.** Το ύψος από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου στο οποίο γίνεται η κρούση.
**β.** Τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σωμάτων μετά την κρούση.
**γ.** Αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική.
**δ.** Την απόσταση των σωμάτων όταν το Σ1 επιστρέφει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου.
**ε.** Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας των σωμάτων τη στιγμή μετά την κρούση που έχουν αντίθετες ταχύτητες.

Απ. [ $\alpha.\ 1{,}2m$, β. $5m/s$, 0 , γ. Ελαστική , δ. 2m, ε. $-2j/s$, $18j/s$]

**Υπολογισμός επιτάχυνσης Σωμάτων**

Η επιτάχυνση υπολογίζεται με το θεμελιώδη νόμο στον άξονα του κεκλιμένου επιπέδου $x'x$ και δεν εξαρτάται από την μάζα του σώματος.




Αν πάρουμε θετική φορά προς τα πάνω τότε η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι:

$$\alpha = -g\eta\mu\varphi$$

**Εξισώσεις ταχύτητας -Θέσης Σωμάτων**

$$\Sigma 1: \begin{cases} \upsilon_1 = \alpha t = g\eta\mu\varphi t \\ x_1 = -\frac{1}{2} g\eta\mu\varphi t^2 \end{cases} \qquad \Sigma 2: \begin{cases} \upsilon_2 = \upsilon_o - g\eta\mu\varphi t \\ x_2 = \upsilon_o t - \frac{1}{2} g\eta\mu\varphi t^2 \end{cases}$$

**Συνάντηση σωμάτων**

Όταν τα σώματα συναντηθούν θα βρίσκονται στην ίδια θέση

$$x_1 = x_2$$

και έτσι θα βρούμε τη στιγμή $t$ της συνάντησης και στη συνέχεια τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων λίγο πριν την κρούση.

**4.10 Λύση**

**α.** $\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow -mg\eta\mu\varphi = m\alpha \Rightarrow a = -g\eta\mu\varphi \Rightarrow \alpha = -5m/s^2$

$$\Sigma\acute{\omega}\mu\alpha\ \Sigma_1 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -g\eta\mu\varphi t \\ x_1 = s - \frac{1}{2}g\eta\mu\varphi t^2 \end{cases} \qquad \Sigma\acute{\omega}\mu\alpha\ \Sigma_2 \Rightarrow \begin{cases} v_2 = v_o - g\eta\mu\varphi t \\ x_2 = v_o t - \frac{1}{2}g\eta\mu\varphi t^2 \end{cases}$$

$$\Sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\nu\tau\eta\sigma\eta: x_1 = x_2 \Rightarrow s - \frac{1}{2}g\eta\mu\varphi t^2 = v_o t - \frac{1}{2}g\eta\mu\varphi t^2 \Rightarrow s = v_o t \Rightarrow t = \frac{s}{v_o} = 0{,}8s$$

$$x_1 = 4 - \frac{1}{2}5 \cdot 0{,}8^2 = 4 - 1{,}6 = 2{,}4m \Rightarrow h = \frac{x_1}{2} = \mathbf{1{,}2m}$$

**β.** Τη στιγμή συνάντησης ( $t = 0{,}8s$ )τα σώματα έχουν ταχύτητες με αλγεβρικές τιμές.

$$v_1 = -10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = -4\,m/s \qquad \kappa\alpha\iota \qquad v_2 = 5 - 5 \cdot 0{,}8 = 1m/s$$

Όταν το $\Sigma_2$ επιστρέφει στην αρχική του θέση θα έχει κινητική ενέργεια $K$.

$$K = K_o - 0{,}45 \Rightarrow K = 11{,}25 - 0{,}45 = 10{,}8j$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ κατά την επιστροφή του σώματος Σ2

$$K - K_2' = m_2 g\eta\mu\varphi x_2 \Rightarrow 10{,}8j - K_2' = 10{,}8j \Rightarrow K_2' = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v_2' = 0}$$

ΑΔΟ για την κρούση: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow$

$$0{,}1 \cdot (-4) + 0{,}9 \cdot 1 = 0{,}1 \cdot v_1' + 0{,}9 \cdot 0 \Rightarrow \boldsymbol{v_1' = 5m/s}$$

**γ.** Οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση είναι:

$$K_2 = 1/2\, m_2 v_2^2 = 0{,}45j, K_2' = 0 \Rightarrow \Delta K_2 = -0{,}45j$$

$$K_1 = 1/2\, m_1 v_1^2 = 0{,}8j \quad \kappa\alpha\iota \quad K_1' = 1/2\, m_1 v_1'^2 = 1{,}25j \Rightarrow \Delta K_1 = 0{,}45j$$

$\Delta K = 0 \Rightarrow$ **Ελαστική κρούση**

**δ.** Συμβολίζω με $u_1$ του σώματος Σ1 στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου.

$$\Theta MKE \Rightarrow u_1 = \sqrt{v_1'^2 - 2g\eta\mu\varphi s_1} = 3\frac{m}{s}$$

$$u_1 = v_1' - g\eta\mu\varphi\Delta t \Rightarrow 3 = 5 - 5\Delta t \Rightarrow \Delta t = 0{,}4s$$

Οι θέσεις των σωμάτων θα είναι τότε: $x_1 = 4m$ και $x_2 = 2{,}4 - \frac{1}{2}5\frac{16}{100} = 2m$

Η απόσταση των σωμάτων θα είναι: $d = 4 - 2 = \mathbf{2m}$

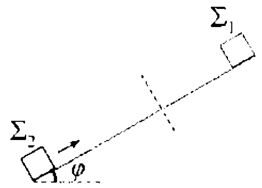
**ε.** Αντίθετες ταχύτητες: $v_2 = -v_1 \Rightarrow -g\eta\mu\varphi\Delta t = -(v_1' - g\eta\mu\varphi\Delta t) \Rightarrow v_1' = 2g\eta\mu\varphi\Delta t \Rightarrow$

$$\Delta t = \frac{v_1'}{2g\eta\mu\varphi} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_1'}{2g\eta\mu\varphi} = \frac{5}{10} = 0{,}5s$$

Οι ταχύτητες των σωμάτων θα είναι: $u_2 = -g\eta\mu\varphi t = -4\,m/s$ $\kappa\alpha\iota$ $u_1 = 4m/s$

$$\frac{dK_1}{dt} = -m_1 g\eta\mu\varphi u_1 = -0{,}1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \mathbf{-2j/s}$$

$$\frac{dK_2}{dt} = -m_2 g\eta\mu\varphi u_2 = -0{,}9 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) = \mathbf{18j/s}$$




**4.11** Σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 1kg$ αφήνεται ελεύθερο τη στιγμή $t_o = 0$ στην κορυφή Α κεκλιμένου γωνίας $\varphi = 30^o$ και ύψους $h$, ταυτόχρονα από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου βάλλεται δεύτερο σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2$ με ταχύτητα $\upsilon_o = 10m/s$ . Τα σώματα τη στιγμή $t_1 = 1s$ συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση το σώμα $\Sigma_1$ φτάνει στην κορυφή Α του κεκλιμένου επιπέδου με μηδενική ταχύτητα. Αν ο συντελεστής τριβής που εμφανίζουν τα σώματα με το κεκλιμένο επίπεδο είναι $\mu = \sqrt{3}/5$ , βρείτε:

**α.** Τις ταχύτητες των σωμάτων λίγο πριν την κρούση και το ύψος του κεκλιμένου επιπέδου

**β.** Την ταχύτητα του σώματος $\Sigma_1$ αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων και την μάζα του σώματος $\Sigma_2$.

**γ.** Την απόσταση των σωμάτων τη στιγμή $t_2$ που το σώμα $\Sigma_1$ φτάσει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου

**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων λίγο πριν την κρούση και αμέσως μετά την κρούση.

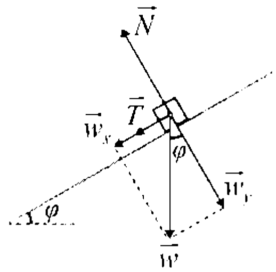
Απ.[α. $-2m/s, 2m/s$, $3{,}75m$ β. $4m/s$, $3kg$ γ. $106{,}25cm$, δ. $-24j/s$ , $-12j/s$]

**Επιτάχυνση Σωμάτων όταν υπάρχει και τριβή**

Η δύναμη τριβής έχει μέτρο:

$$T = \mu m g \sigma\upsilon\nu\varphi$$

Μπορεί να έχει κατεύθυνση προς τα πάνω ή προς τα κάτω




$$\Sigma F = ma \ \Rightarrow mg \pm \mu m g \sigma\upsilon\nu\varphi = ma \ \Rightarrow$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 = -g(\eta\mu\varphi - \mu g \sigma\upsilon\nu\varphi) \\ \\ \alpha_2 = -g(\eta\mu\varphi + \mu g \sigma\upsilon\nu\varphi) \end{cases}$$

**Απόσταση Σωμάτων (υλικών σημείων)**

Η απόσταση δύο σημείων στο επίπεδο υπολογίζεται με τη σχέση:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Αν τα σημεία βρίσκονται στον άξονα $x'x$ : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$

**Ρυθμός μεταβολής μηχανικής ενέργειας**

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad \acute{\eta} \quad \frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = \frac{dW_{\mu\eta\ \sigma\upsilon\nu\tau\eta\rho\eta\tau\iota\kappa\acute{\omega}\nu}}{dt}$$

**4.11 Λύση**

**α.** Το Σ1 κινείται με επιτάχυνση $\alpha_1$ που την βρίσκουμε εφαρμόζοντας θεμελιώδη νόμο.

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Rightarrow -mg\eta\mu\varphi + \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = m\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -g(\eta\mu\varphi - \mu g\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = -10\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{-2m/s^2}$$

$$\Sigma_1 \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_1 = \alpha_1 t \\ x_1 = x_o + \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \end{cases} (t = t_1 = 1s) \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_1 = -2m/s \\ x_1 = l + \frac{1}{2}(-2) \cdot 1^2 = l - 1 \end{cases}$$

Για το Σ2: $\Sigma F_x = ma_2 \Rightarrow -mg\eta\mu\varphi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = m\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -g(\eta\mu\varphi + \mu g\sigma\upsilon\nu\varphi)$

$$\alpha_2 = -10\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8m/s^2$$

$$\Sigma_2 \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_2 = \upsilon_o + \alpha_2 t \\ x_2 = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 \end{cases} (t = t_1 = 1s) \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_2 = 10 - 8 \cdot 1 = \boldsymbol{2m/s} \\ x_2 = 10 \cdot 1 - \frac{1}{2}8 \cdot 1^2 = 6m \end{cases}$$

Τη στιγμή της σύγκρουσης είναι: $x_1 = x_2 \Rightarrow l - 1 = 6 \Rightarrow l = 7m$

Το ύψος είναι: $h = l\eta\mu\varphi = 7 \cdot 1/2 = \boldsymbol{3,75m}$

**β.** Το $\Sigma_1$ μετά την κρούση έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_1'$ με φορά αντίθετη της $\upsilon_1$
ΘΜΚΕ για την κίνηση του $\Sigma_1$ μετά την κρούση :

$$0 - \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 = -Ts_1 - mg\eta\mu\varphi s_1 \Rightarrow \upsilon'_1 = \sqrt{2g(\mu\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi)s_1} = \sqrt{16} = \boldsymbol{4m/s}$$

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \Rightarrow 4 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot (-2) + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$4m_1 + 4m_2 = -2m_1 + 2m_2 + 4m_2 \Rightarrow 2m_2 = 6m_1 \Rightarrow m_2 = 3m_1 = \boldsymbol{3kg}$$

*γ.* $\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = 0$

Μετά την κρούση είναι $\upsilon'_2 = 0$. Τα σώματα ανταλλάσσουν επιταχύνσεις.
Το σώμα $\Sigma_1$ φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου σε χρόνο $\Delta t$
$\Delta t = \upsilon'_1/2|a'_1| = 4/16 = 0{,}25s$ αφού διανύσει διάστημα $s_1' = 1m$
Τότε το Σ2 έχει διανύσει διάστημα $s_2'$: $s_2' = \frac{1}{2}|a_1'|\Delta t^2 = 0{,}0625m = 6{,}25cm$
Η απόσταση των σωμάτων είναι: $d = s'_1 + s'_2 = 1{,}0625m = \boldsymbol{106,25cm}$

**δ.** $\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} - \frac{dW_{wx}}{dt} = \frac{dW_{wx}}{dt} + \frac{dW_T}{dt} - \frac{dW_{wx}}{dt} = \frac{dW_T}{dt} = T \cdot \upsilon$

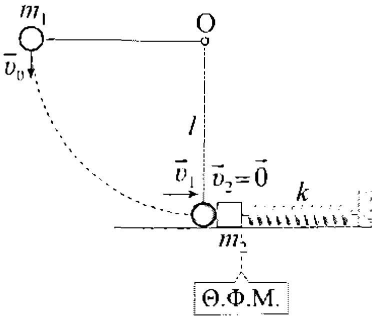
$\vec{T}, \vec{\upsilon}$ είναι αντίρροπα και άρα το γινόμενο $T \cdot \upsilon$ είναι αρνητικό. Λίγο πριν την κρούση:

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = T_1 \cdot \upsilon_1 + T_2 \cdot \upsilon_2 = -6 - 18 = \boldsymbol{-24\frac{j}{s}}$$

Λίγο μετά την κρούση:

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = T'_1 \cdot \upsilon'_1 + T'_2 \cdot \upsilon'_2 = \boldsymbol{-12j/s}$$

**4.12.** Μια σφαίρα μάζας $m_1 = 2kg$ είναι δεμένη σε αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους $l = 1{,}25m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο Ο. Εκτρέπουμε τη σφαίρα ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και κάποια στιγμή την αφήνουμε ελεύθερη. Όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο, η σφαίρα συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 3kg$. Το σώμα μάζας $m_2$ μπορεί να κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}5$ και είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς $k = 18N/m$ το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ελατήριο αρχικά έχει το φυσικό του μήκος.




**α.** Να υπολογίσετε την ταχύτητα του $m_1$ καθώς και την τάση του νήματος ελάχιστα πριν συγκρουστεί με το $m_2$.

**β.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποκτά το ελατήριο μετά την κρούση των δύο σωμάτων, αν έως τη στιγμή εκείνη η θερμότητα που εκλύεται λόγω της τριβής ολίσθησης είναι $15j$.

**γ.** Να υπολογίσετε την ταχύτητα του $m_2$ αμέσως μετά την κρούση και να δικαιολογήσετε αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική ή ανελαστική.

**δ.** Αν αντικαταστήσουμε τη σφαίρα με άλλη μάζας $1Kg$ και το είδος της κρούσης δεν αλλάξει να βρείτε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας που μεταφέρεται στο σώμα και το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του σώματος αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

Απ. [α. $5m/s$ , 30N β. 9j, γ. $4m/s$, ελαστική , δ. 75%, $-37{,}5j/s$]

**Θερμότητα Λόγω τριβής ($Q_{\tau\rho}$) και λόγω κρούσης ($Q_{\kappa\rho}$)**

$$Q_{\tau\rho} = |W_T|$$

$$Q_{\kappa\rho} = |\Delta K| = K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau}$$

**Έργο Ελατηριακής Δύναμης.**

Η δύναμη που δέχεται ένα σώμα από κάποιο ιδανικό ελατήριο είναι μεταβλητή δύναμη και έτσι το έργο της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{F\varepsilon\lambda} = U_{\varepsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\varepsilon\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{1}{2}k\Delta l_{\alpha\rho\chi}^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_{\tau\varepsilon\lambda}^2$$

**Μεταβολή μηχανικής Ενέργειας**:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \Delta K + \Delta U = \Delta K$$

**4.12 Λύση**

**α.** ΘΜΚΕ για την κίνηση του $m_1$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gl} = \boldsymbol{5m/s}$$

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = m_1\frac{\upsilon^2}{l} \Rightarrow T - m_1 g = m_1\frac{\upsilon^2}{l} \Rightarrow T = m_1 g + m_1\frac{2gl}{l} = 3m_1 g = \boldsymbol{30N}$$

**β.** Η θερμότητα λόγω τριβής ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής

$$Q = |W_T| = \mu m_2 g s \Rightarrow s = \frac{Q}{\mu m_2 g} = \frac{15}{15} = 1m$$

Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta l = s = 1m$

$$U_{\varepsilon\lambda(max)} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}18\cdot 1 = \boldsymbol{9j}$$

**γ.** ΘΜΚΕ ή ΑΔΕ για την κίνηση του $m_2$

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = Q + \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Rightarrow \frac{1}{2}3\upsilon_2'^2 = 24 \Rightarrow \upsilon_2'^2 = 16 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2' = 4m/s}$$



ΑΔΟ για την κρούση:

$$m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Rightarrow 2\cdot 5 = 2\cdot\upsilon_1' + 3\cdot 4 \Rightarrow \upsilon_1' = -1$$

$$K_{\pi\rho} = m_1 g l = 25j \qquad \kappa\alpha\iota \qquad K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = 1 + 24 = 25j$$

Άρα πρόκειται **για ελαστική κρούση**

**δ.** Η νέα σφαίρα λίγο πριν την κρούση θα έχει πάλι ταχύτητα $\upsilon_1 = 5m/s$
Από τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε:

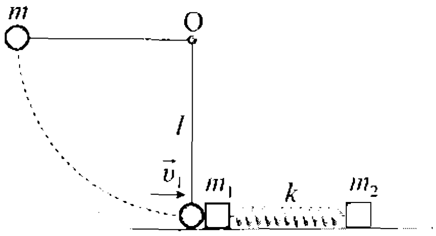
$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{\upsilon_1}{2} - 2{,}5m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{\upsilon_1}{2} = 2{,}5m/s$$

$$\frac{K_2'}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} = \frac{3}{4} = \boldsymbol{75\%}$$

$$\frac{dK}{dt} = -T\upsilon_2' = -\mu m_2 g\upsilon_2' = \boldsymbol{-37{,}5j/s}$$

**4.13** Σφαίρα Σ μάζας $m$ είναι δεμένη στο άκρο αβαρούς μη ελαστικού νήματος μήκους $l = 1{,}8m$ του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στην οροφή. Η σφαίρα βρίσκεται πολύ κοντά σε σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1$ το οποίο βρίσκεται σε επαφή με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 300N/m$ στο άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2 = 3kg$. Με το νήμα τεντωμένο ανυψώνουμε τη σφαίρα σε ύψος ίσο με το μήκος του νήματος και την αφήνουμε ελεύθερη. Κάποια στιγμή η σφαίρα και το σώμα $\Sigma_1$ συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και έτσι το σώμα $\Sigma_1$ αποκτά ταχύτητα $\upsilon_1$ αμέσως μετά την κρούση. Η μέγιστη συσπείρωση ελατηρίου είναι $\Delta l_{max} = 0{,}3m$ και όταν το ελατήριο αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος τα σώματα κινούνται με ταχύτητες ίδιου μέτρου. Βρείτε:




**α.** Ποιες ποσότητες διατηρούνται όσο τα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ είναι σε επαφή με το ελατήριο , γράψτε τις εξισώσεις που τις εκφράζουν.
**β.** Την μάζα του σώματος $\Sigma_1$.
**γ.** Τις ταχύτητες των σωμάτων όταν η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι μέγιστη.
**δ.** Το μέγιστος ύψος που θα ανέβει η σφαίρα μετά την δεύτερη κρούση της.

Απ. [ α. Ορμή και μηχανική Ενέργεια, β.$m_1 = 1kg$, γ. $1{,}5m/s$, δ. $0{,}45m$]

**Δυνάμεις από ελατήριο.**
Ένα παραμορφωμένο ελατήριο ασκεί αντίθετες δυνάμεις στα δύο σώματα που συνδέει. Οι δυνάμεις αυτές συμβολίζονται με ( $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}, \vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ ) και ισχύει: $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$.
**Προσοχή!** Οι δυνάμεις $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}, \vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ δεν είναι «Δράση-Αντίδραση»

**Ποσότητες που διατηρούνται στο σύστημα « Σώμα $\Sigma_1$ -Σώμα $\Sigma_2$ -Ελατήριο»**

- Η μηχανική ενέργεια διότι οι δυνάμεις είναι συντηρητικές: $K + U_{\varepsilon\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta$
- Η ορμή του συστήματος διότι: $\Sigma F_{\varepsilon\xi} = 0$

**Μέγιστη παραμόρφωση ελατηρίου**

$\Delta l = max$ όταν οι ταχύτητες $u_1, u_2$ των σωμάτων γίνουν ίσες.

Όταν το ελατήριο αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος τα σώματα θα έχουν ταχύτητες $\upsilon'_1, \upsilon'_2$

$A\Delta O$: $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2$ (1) και $K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2$ (2)

Από τις (1) και (20 προκύπτουν οι τύποι της κεντρικής ελαστικής κρούσης από τους οποίους θα υπολογίσουμε την μάζα $m_2$

**4.13 Λύση**

**α.** Στη διάρκεια της κρούσης διατηρείται η **ορμή και η μηχανική ενέργεια** των σωμάτων. Αν $u_1, u_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ σε κάποια τυχαία θέση και $\upsilon_1', \upsilon_2'$ οι ταχύτητες των $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ όταν το ελατήριο αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος.

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + U_{\varepsilon\lambda} \quad (2)$$

Όταν το ελατήριο αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος οι (1) και (2) γράφονται:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \quad (1')$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad (2')$$

**β.** Για το σύστημα των $(1')$ και $(2')$ γνωρίζουμε την λύση του η οποία είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2$$

Και επειδή είναι $\upsilon_2 = 0$ παίρνουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Από την εκφώνηση έχουμε: $\upsilon_1' = \pm\upsilon_2'$

$$\upsilon_1' = -\upsilon_2' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow\Rightarrow m_2 = 3m_1 \Rightarrow \boldsymbol{m_1 = 1kg}$$

**γ.** Στη μέγιστη συσπείρωση ελατηρίου οι ταχύτητες σωμάτων είναι ίσες $u_1 = u_2 = u$.

$$A\Delta O: \; m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \xrightarrow{u_1 = u_1 = u} m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)u \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 4u}$$

$$A\Delta ME: \; \frac{1}{2}m_1(4u)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}1 \cdot 16u^2 = \frac{1}{2}4u^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Rightarrow 6u^2 = \frac{1}{2}300\frac{9}{100} \Rightarrow u^2 = 2{,}25 \Rightarrow \boldsymbol{u = 1{,}5m/s}$$

Άρα: $\upsilon_1 = 4u = 6m/s$

**δ.** Η σφαίρα πριν την κρούση έχει ταχύτητα : $\upsilon = \sqrt{2gl} = 6m/s$

Το σώμα $\Sigma_1$ αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 4u = 6m/s$

Έγινε ανταλλαγή ταχυτήτων , άρα η σφαίρα $\Sigma$ έχει μάζα: $m = m_1 = 1kg$

Λίγο πριν την δεύτερη κρούση το σώμα $\Sigma_1$ έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -3m/s$$

Μετά την δεύτερη κρούση η σφαίρα αποκτά ταχύτητα: $\upsilon' = -3m/s$

$$h' = \frac{\upsilon'^2}{2g} = \frac{9}{20} = \boldsymbol{0{,}45m}$$

**4.14** Το ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 800N/m$ είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο, στο άλλο άκρο έχουμε δέσει ένα σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 2kg$ το οποίο βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο και το συγκρατούμε ακίνητο σε μία θέση Α με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F = 320N$ έτσι ώστε το ελατήριο να είναι συσπειρωμένο. Κάποια στιγμή καταργούμε την δύναμη $F$ και το σώμα κινείται στο οριζόντιο επίπεδο, στην ευθεία $x'x$. Τη στιγμή που το σώμα αποκτά την μέγιστη ταχύτητα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2 = 3kg$ το οποίο κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $\upsilon_2$ που έχει μέτρο $\upsilon_2 = 2m/s$. Μετά την κρούση το σώμα μάζας $m_2$ συνεχίζει να κινείται στο λείο οριζόντιο δάπεδο και κάποια στιγμή συγκρούεται πλαστικά με σώμα $\Sigma_3$ μάζας $m_3 = 2kg$ το οποίο κινείται στο ίδιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_3$ που έχει μέτρο $\upsilon_3 = 12m/s$ σε ευθεία $y'y$ που είναι κάθετη στην $x'x$ . Βρείτε:

**α.** Την ταχύτητα του σώματος $\Sigma_1$ λίγο πριν την κρούση με το $\Sigma_2$.

**β.** Το διάστημα που θα διανύσει το σώμα $\Sigma_1$ ώσπου να σταματήσει στιγμιαία και το ποσοστό αύξησης της κινητικής ενέργειας του σώματος $\Sigma_2$ εξ αιτίας της κρούσης.

**γ.** Την ταχύτητα του συσσωματώματος των $\Sigma_2$ και $\Sigma_3$.

**δ.** Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του του σώματος $\Sigma_2$ καθώς και την μεταβολή του μέτρου της ορμής του.

Απ. [α. $8m/s$, β. $0{,}2m$, 800%, γ. $6m/s$, δ. $7{,}2\sqrt{5}\,kgm/s$, 0] 136

**Μέγιστη ταχύτητα σε ευθύγραμμη κίνηση:**

$$\upsilon = (max) \;\; όταν \; \Sigma F = 0$$

**ΑΔΟ και πλάγια κρούση**

Η μαθηματική έκφραση της ΑΔΟ είναι : $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \;\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ (1)

**Α τρόπος:** Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}, \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ και υπολογίζουμε τα μέτρα τους.

$$p_{\alpha\rho\chi} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\sigma\upsilon\nu\varphi}, \qquad p_{\alpha\rho\chi} = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'2p_2'\sigma\upsilon\nu\varphi'}$$

Και τα μέτρα των $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}, \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ θα είναι ίσα και γράφουμε: $\boldsymbol{p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda}}$

**Β τρόπος:** Παίρνουμε δύο κάθετους άξονες και αναλύουμε τις ταχύτητες. Και στη συνέχεια η (1) δίνει δύο εξισώσεις:

$$p_{1x} + p_{2x} = p_{1x}' + p_{2x}' \quad (1x) \quad και \quad p_{1y} + p_{2y} = p_{1y}' + p_{2y}' \quad (1y)$$

**Μεταβολή Ορμής Σώματος ($\Delta\vec{p}$)**

Αν η αρχική και τελική ορμή του σώματος είναι στην ίδια ευθεία βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\Delta\vec{p}$: $\Delta p = p' - p$

Αν η αρχική και τελική ορμή του σώματος δεν είναι στην ίδια ευθεία τότε βρίσκουμε την μεταβολή ορμής του σώματος σε κάθε άξονα.

$$\Delta p_x = p_x' - p_x \quad και \quad \Delta p_y = p_y' - p_y$$

**4.14 Λύση**

**α.** Ισορροπία σώματος με την επίδραση της δύναμης $F$

$$F = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F}{k} = \frac{320}{800} = 0{,}4m$$

Το σώμα $\Sigma_1$ αποκτά μέγιστη ταχύτητα όταν $\Sigma F = 0$ δηλαδή όταν διέρχεται από την θέση ισορροπίας που είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου:
Για την κίνηση του σώματος στο λείο δάπεδο ισχύει η ΑΔΜΕ:

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\Delta l = 20 \cdot 0{,}4 = \boldsymbol{8m/s}$$

**β.** Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση υπολογίζονται με τους τύπους

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = -4m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = 6m/s$$

Όταν το σώμα $\Sigma_1$ θα σταματήσει η κινητική του ενέργεια θα γίνει δυναμική ενέργεια λόγω ελατηριακής δύναμης.

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1'^2 \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m_1}{k}}\upsilon_1' = \frac{1}{20}4 = \boldsymbol{0,2m}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του Σ2 τριπλασιάστηκε άρα η κινητική του ενέργεια εννεαπλασιάστηκε

$$\frac{\Delta K_2}{K_2} = \frac{8K_2}{K_2} = 8 = \boldsymbol{800\%}$$

**γ.** Για την πλαστική κρούση θα εφαρμόσουμε την ΑΔΟ σε άξονες:
Έστω $V$ η ταχύτητα του συσσωματώματος η οποία αναλύεται σε συνιστώσες $V_x, V_y$

$$m_2\upsilon_2' = (m_2 + m_3)V_x \Rightarrow V_x = \frac{3}{5}6 = 3{,}6m/s$$

$$m_3\upsilon_3 = (m_2 + m_3)V_y \Rightarrow V_y = \frac{2}{5}12 = 4{,}8$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \boldsymbol{6m/s}$$

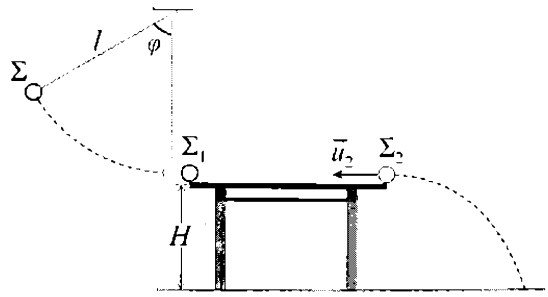
**δ.** Στον άξονα $x'x$: $\Delta p_x = m_2V_x - m_2\upsilon_2' = m_2(V_x - \upsilon_2') = 3(3{,}6 - 6) = -7{,}2kgm/s$

Στον άξονα $y'y$: $\Delta p_y = m_2V_x - 0 = m_2V_y = 3 \cdot 4{,}8 = 14{,}4kgm/s$

$$|\Delta p_2| = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2} = \boldsymbol{7,2\sqrt{5}\frac{kgm}{s}}$$

Η μεταβολή του μέτρου της ορμής είναι:

$$\Delta|p| = m_2V - m_2\upsilon_2' = m_2(6 - 6) = \boldsymbol{0}$$




**4.15** Μία λεία δοκός $ΑΓ$ ισορροπεί οριζόντια σε ύψος $H = 1{,}4m$ από το οριζόντιο δάπεδο. Στα άκρα της δοκού στα άκρα $Α$ και $Γ$ της δοκού ισορροπούν ακίνητα δύο σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες $m_1 = m = 1{,}5kg$ και $m_2 = 0{,}5kg$. Μία σφαίρα $Σ$ μάζας $m$ είναι δεμένη στο άκρο μη εκτατού νήματος μήκους $l = 0{,}9m$ και ισορροπεί σε επαφή με το σώμα $Σ_1$. Απομακρύνουμε τη σφαίρα $Σ$ από την θέση ισορροπίας ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία $φ$ με την αρχική του θέση και κάποια στιγμή την αφήνουμε ελεύθερη ενώ την ίδια στιγμή εκτοξεύουμε τη σφαίρα $Σ_2$ με ταχύτητα μέτρου $3m/s$ και οι σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ συγκρούονται. Αν η τάση του νήματος λίγο πριν την κρούση έχει μέτρο διπλάσιο του βάρους της σφαίρας $Σ$ και οι κρούσεις μεταξύ σφαιρών είναι κεντρικές και ελαστικές βρείτε:

**α.** Την γωνία φ και την μεταβολή της τάσης του νήματος εξ αιτίας της κρούσης.

**β.** Τις ταχύτητες των σφαιρών $Σ_1$ και $Σ_2$ μετά την κρούση.

Η σφαίρα $Σ_2$ κάποια στιγμή συναντά το οριζόντιο δάπεδο το οποίο είναι λείο σε κάποιο σημείο $Δ$ και αμέσως μετά την κρούση με το δάπεδο το διάνυσμα της ταχύτητα της σχηματίζει γωνία $θ$ με την κατακόρυφο . Αν $ημθ = 0{,}75$ να βρείτε:

**γ.** Το είδος της κρούσης της σφαίρας $Σ_2$ με το οριζόντιο δάπεδο.

**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση με το οριζόντιο δάπεδο.

Δίδεται $g = 10m/s^2$ και $ημ30^o = 0{,}5$ $και\ συν30^o = 0{,}5\sqrt{3}$

Απ. [ α. $φ = π/3, -10N$, β. 0 ,$6m/s$, γ. ελαστική, δ. $-10\sqrt{7}j/s$]

**Οριζόντια Βολή**

Η ορμή του σώματος Σ2 διατηρείται στον οριζόντιο άξονα. Αν το σώμα συγκρουστεί με το λείο οριζόντιο δάπεδο τότε η ορμή στον οριζόντιο άξονα είναι ίδια και μετά την κρούση του σώματος με το δάπεδο.

**Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας**

Είναι ίσος με το ρυθμό παραγωγής έργου από τη συνισταμένη δύναμη, η οποία στην οριζόντια βολή είναι το βάρος της σφαίρας.

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_W}{dt} = \pm\frac{mgdh}{dt} = \pm mg|v_y|$$

**Πλάγια κρούση σφαίρας -τοίχου**

**Ελαστική κρούση** ⇒ Γωνία πρόσπτωσης= Γωνία ανάκλασης

**4.15 Λύση**

**α.** Λίγο πριν την κρούση η σφαίρα Σ έχει ταχύτητα $\upsilon$

$$T - mg = m\frac{\upsilon^2}{l} \Rightarrow 2mg - mg = m\frac{\upsilon^2}{l} \Rightarrow \upsilon^2 = gl \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gl} = 3m/s$$

$$\upsilon = \sqrt{2gl(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)}$$

$$\sqrt{2gl(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)} = \sqrt{gl} \Rightarrow 2 - 2\sigma\upsilon\nu\varphi = 1 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu\varphi = 1 \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = \pi/3}$$

Πριν την κρούση η τάση του νήματος έχει μέτρο: $T_o = 2mg$

Μετά την κρούση γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων: $T = mg$

$$\Delta T = mg - 2mg = -mg = \boldsymbol{-10N}$$

**β.** Η σφαίρα $\Sigma_1$ λίγο πριν την κρούση με την $\Sigma_2$ έχει ταχύτητα $u_1 = 3m/s$ , ενώ η σφαίρα $\Sigma_2$ έχει ταχύτητα $u_2 = -3m/s$

Μετά την κρούση οι ταχύτητες των σωμάτων είναι:

$$\boldsymbol{u_1' = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ u_2' = 6m/s}$$

**γ.** Η σφαίρα $\Sigma_2$ φτάνει στο άκρο Γ του τραπεζιού με ταχύτητα

$$\upsilon_o = u_2' = 6m/s$$

Στη συνέχεια κάνει οριζόντια βολή .

Για την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ισχύει:

$$\upsilon_x = \sigma\tau\alpha\theta = 6m/s$$

$$\upsilon_y = gt = 10t$$

Η ταχύτητα της σφαίρας $\Sigma_2$ λίγο πριν την κρούση με το οριζόντιο δάπεδο είναι $\vec{\upsilon}$ και αμέσως μετά την κρούση είναι $\vec{V}$.

Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ δεν ασκούνται δυνάμεις έτσι θα είναι

$$V_x = \upsilon_x = \upsilon_o = 6m/s$$

Το μέτρο ταχύτητας πριν την κρούση είναι υ

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2gh} = \sqrt{36 + 28} = \sqrt{64} = 8m/s$$

Το μέτρο ταχύτητας μετά την κρούση είναι

$$V = \frac{V_x}{\eta\mu\theta} = \frac{6}{0{,}75} = 8m/s$$

Άρα η κρούση είναι **ελαστική**

**δ.** Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας μετά την κρούση είναι

$$V_y = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\ m/s$$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} = -\frac{mgdh}{dt} = -mgV_y = -0{,}5 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} = \boldsymbol{-10\sqrt{7}j/s}$$

## ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

**4.16** Σώμα κάνει ΑΑΤ. Οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης απέχουν κατά $d = 40cm$ και το σώμα σε χρόνο $\Delta t = \pi s$ διέρχεται από την θέση ισορροπίας του 10 φορές. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με $+2m/s$ . Βρείτε:
**α.** Το ρυθμό μεταβολής της φάσης της ταλάντωσης και την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης.
**β.** Την μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος.
**γ.** Την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = \pi/60\,s$ και $t_1 = \pi/12\,s$.
**δ.** Για πόσο χρόνο Δt το σώμα έχει απομάκρυνση μεγαλύτερη από 10cm στην διάρκεια της πρώτης περιόδου.
**ε.** Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η επιτάχυνση του είναι ίσο με το μισό της μέγιστης τιμής της

Απ.[α. $10rad/s$, $2m/s$ β. $20m/s^2$, γ. $0{,}1m$, $0{,}1m$, $\pm\sqrt{3}$ δ. $\pi/15\,s$, ε. $\sqrt{3}m/s$]

**Φάση Αρμονικής Ταλάντωσης ($\varphi$)**

Η φάση αρμονικής ταλάντωσης είναι:

$$\varphi = \omega t + \varphi_o$$

Είναι πρώτου βαθμού ως προς $t$ και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία.

Η **μεταβολή της φάσης** συμβολίζεται με $\Delta\varphi$ και είναι πάντα θετική.

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

Η **αρχική φάση** μιας αρμονικής ταλάντωσης παίρνει τιμές: $0 \le \varphi_o < 2\pi$

$$\varphi_o = 0 \text{ όταν για } t = 0 \text{ είναι } x = 0 \text{ και } \upsilon > 0$$

$$\varphi_o = \pi/2 \text{ όταν για } t = 0 \text{ είναι } x = +A$$

Ο **ρυθμός μεταβολής της φάσης** είναι σταθερός και ίσος με τη γωνιακή συχνότητα.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

**Χρονικό διάστημα που είναι $x \ge d$**

Αν το σώμα διέρχεται από την θέση $x = d$ δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές $t_1, t_2$ με ταχύτητες $\upsilon_1, \upsilon_2$ ($\upsilon_1 > 0$ και $\upsilon_2 < 0$) τότε είναι:

$$x \ge d$$

στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ η απομάκρυνση του σώματος είναι:
Από την $x = d$ υπολογίζουμε τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2$.

**4.16 Λύση**

**α.** Σε χρόνο $\Delta t = \pi$ το σώμα κάνει $N = 5 ταλαντώσεις$

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{5}{\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi f = \boldsymbol{10 rad/s}$$

$$d = 2A \Rightarrow A = 20cm = 0{,}2m$$

$$\upsilon_{max} = \omega A = 10 \cdot 0{,}2 = \boldsymbol{2m/s}$$

**β.** Ο ρυθμός μεταβολής της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας είναι η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = a \Rightarrow (\frac{d\upsilon}{dt})_{max} = \alpha_{max} = \omega^2 A = \boldsymbol{20m/s^2}$$

**γ.** Για $t = 0$ είναι η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$\upsilon = 2\frac{m}{s} = \upsilon_{max}$$

άρα η αρχική φάση είναι $\varphi_o = 0$ και η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$y = A\eta\omega t = 0{,}2\eta\mu 10t$$

$$t_1 = \frac{\pi}{60}s \Rightarrow x = 0{,}2\eta\mu 10\frac{\pi}{60} = 0{,}2\eta\mu\frac{\pi}{6} = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{0,1m}$$

$$t_2 = \frac{\pi}{12}s \Rightarrow x = A\eta\mu\omega t = 0{,}2\eta\mu 10\frac{\pi}{12} = 0{,}2\eta\mu\frac{5\pi}{6} = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{0,1m}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{60}s \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{60}s \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{-\sqrt{3}}$$

**δ.** Από τη στιγμή $t_1$ ως τη στιγμή $t_2$ είναι $x \geq 0{,}1m$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{4\pi}{60} = \boldsymbol{\frac{\pi}{15}s}$$

**ε.** $\alpha = \frac{\alpha_{max}}{2} \Rightarrow x = -\frac{A}{2} \Rightarrow \upsilon = \pm\omega A\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\omega A\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$

$$|\upsilon| = \boldsymbol{\sqrt{3}m/s}$$

**4.17** Στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k$ κρεμάμε σώμα μάζας $m$ και το αφήνουμε να κινηθεί. Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $0,2m$ και η μεταβολή της ορμής του σώματος μεταξύ 2 διαδοχικών διελεύσεων από την θέση ισορροπίας έχει μέτρο $|\Delta P\ | = 2kgm/s$ .Βρείτε:

**α.** Την μέγιστη επιτάχυνση του σώματος και το πλάτος ταλάντωσης.

**β.** Την εξίσωση της απομάκρυνσης θεωρώντας ως θετική φορά προς τα πάνω.

**γ.** Τη σταθερά του ελατηρίου.

**δ.** Την αλγεβρική τιμή της δύναμης του ελατηρίου ως συνάρτηση του χρόνου.

**ε.** Την ταχύτητα του σώματος όταν η δύναμη που δέχεται από το ελατήριο είναι διπλάσια από την δύναμη επαναφοράς.

Απ. [α. 0,1m, β. $0,1\eta\mu(10t+\pi/2)$, γ. $100N/m$, δ. $10 - 10\eta\mu(10t+\pi/2)$, ε. 0]

**Μέγιστη επιτάχυνση:**

$$\alpha = -\omega^2 x$$

Η μέγιστη επιτάχυνσης είναι $\alpha_{max} = \omega^2 A$

Το σώμα είναι σε ακραία θέση με απομάκρυνση $x = -A$

**Μέγιστη επιμήκυνση ελατηρίου**

Το ελατήριο έχει μέγιστη επιμήκυνση όταν το σώμα φτάνει στην κατώτερη θέση:

Η επιμήκυνση του ελατηρίου στην θέση ισορροπίας είναι: $\Delta l_o$

Σε μία τυχαία θέση η παραμόρφωση $\Delta l$ θα είναι:

$$\Delta l_{max} = \Delta l_o \pm |x|$$

**Πλάτος ταλάντωσης** είναι η απόσταση μιας ακραίας θέσης από θέση ισορροπίας.

**Επιμήκυνση ελατηρίου στην θέση ισορροπίας ($\Delta l_o$) και γωνιακή συχνότητα**

$$\Theta.I.: \quad \Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l_o = mg \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta l_o}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l_o}}$$

**Δύο διαδοχικές διελεύσεις από την θέση ισορροπίας**

Ο χρόνος που απαιτείται είναι: $\Delta t = T/2$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής είναι: $|\Delta p| = 2mv_{max} = 2m\omega A$

Η μεταβολή του μέτρου της ορμής είναι: $\Delta|p| = 0$

**Αλγεβρική τιμή ελατηριακής δύναμης**

$$F_{\varepsilon\lambda} = mg - kx$$

**4.17 Λύση**

**α.** Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι μέγιστο σε μια από τις ακραίες θέσεις. Τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερο το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα άρα είναι σε ακραία θέση και η μόνη δύναμη είναι το βάρος, έτσι η επιτάχυνση έχει μέτρο ίσο με $\vec{g}$. Με θετική φορά προς τα πάνω θα είναι:

$$\alpha_{max} = g$$

Στη θέση ισορροπίας η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι

$$mg = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} = A$$

Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου είναι:

$$\Delta l_{max} = \Delta l_o + A = A + A = 2A \Rightarrow \boldsymbol{A = 0,1m}$$

**β.** Στην θέση ισορροπίας:

$$mg = k\Delta l \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta l} \quad άρα \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = 10rad/s$$

Η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2$

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})}$$

**γ.**

$$\upsilon_{max} = \omega A = 10 \cdot 0,1 = 1m/s$$

$$|\Delta P| = 2m\upsilon_{max} \Rightarrow m = \frac{|\Delta P|}{2\upsilon_{max}} = \frac{2}{2} = 1kg$$

$$\boldsymbol{k = m\omega^2 = 100N/m}$$

**δ.** Την ελατηριακή δύναμη μπορούμε να την υπολογίσουμε με δύο τρόπους:
**Α τρόπος:** Θεωρούμε το σώμα σε τυχαία θέση με θετική απομάκρυνση $x$ από τη θέση ισορροπίας στην οποία η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι $\Delta l$

$$\Delta l = \Delta l_o - x$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l = k(\Delta l_o - x) = k\Delta l_o - kx = mg - kx$$

**Β τρόπος:** Να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση: $\Sigma F = -kx$

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg - kx \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = 10 - 100 \cdot 0,1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F_{\varepsilon\lambda} = 10 - 10\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})}$$

**ε.**

$$F_{\varepsilon\lambda} = 2(-kx) \Rightarrow mg - kx = -2kx \Rightarrow mg = -kx \Rightarrow$$

$$x = -mg/k = -A \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 0}$$

**4.18** Σώμα μάζας $m = 2{,}5kg$ ισορροπεί κρεμασμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K = 250\,N/m$. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω με την επίδραση μιας δύναμης $F$ έτσι ώστε το σώμα να φτάσει με μηδενική ταχύτητα σε μια θέση $\Delta$ που βρίσκεται κάτω από τη θέση ισορροπίας κατά $d = 20cm$. Κάποια στιγμή $t_o = 0$ αφήνουμε το σώμα ελεύθερο στο Δ.

**α.** Αποδείξτε ότι το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση μετά την κατάργηση της δύναμης $F$.

**β.** Υπολογίστε το έργο της δύναμης $F$ και εξηγείστε τη φυσική του σημασία.

**γ.** Υπολογίστε το διάστημα που διάνυσε το σώμα από τη χρονική στιγμή $t_1 = \pi/30\,s$ ως τη χρονική στιγμή $t_2 = 2\pi/15\,s$

**δ.** Υπολογίστε το μέτρο της μεταβολή της ορμής και την μεταβολή του μέτρου της ορμής του σώματος στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$

**δ.** Υπολογίστε το χρονικό διάστημα της πρώτης περιόδου στο οποίο το ελατήριο είναι συσπειρωμένο.

Απ. [β. $W_F = 5j$ γ. $0{,}4m$ δ. $5\sqrt{3}\,kgm/s$, 0 ε. $\pi/15$ ]

**Επιλογή θετικής φοράς**

Επειδή το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του από την κάτω ακραία θέση , μπορούμε να πάρουμε θετική φορά προς τα κάτω για να προκύψει αρχική φάση $\varphi_o = \pi/2$.

**Ενέργεια ταλάντωσης**

- Καθορίζει το πλάτος της ταλάντωσης.
- Είναι η ενέργεια που προσφέραμε στο σώμα για να κάνει ταλάντωση.
- Είναι σταθερή.

$$E = σταθερή = \frac{1}{2}\,DA^2$$

$$E = K + U$$

**Συσπειρωμένο ελατήριο**

Στην θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta l_o$

$$\Delta l_o = \frac{mg}{k}$$

Όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος τότε η απομάκρυνση του σώματος είναι:

$$x = -\Delta l_o$$

Αν βρούμε τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2$ που το σώμα διέρχεται από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για πρώτη και δεύτερη φορά τότε το χρονικό διάστημα $\Delta t$ της πρώτης περιόδου που το ελατήριο είναι συσπειρωμένο είναι:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

**4.18 Λύση**

**α.** Στην θέση ισορροπίας ασκούνται στο σώμα το βάρος του και η ελατηριακή δύναμη $w = mg$ και $F_{ελ} = kΔl_o$ και με θετική φορά προς τα κάτω ισχύει:

$$ΣF = 0 \Rightarrow -F_{ελ} + w = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w \Rightarrow kΔl_o = mg \Rightarrow Δl_o = \frac{mg}{k} = 0{,}1m$$

Στην τυχαία θέση με $x > 0$ η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι: $Δl = Δl_o + x$

$$ΣF = w - kΔl = mg - k(Δl_o + x) = mg - kΔl_o - kx \Rightarrow ΣF = -kx$$

Άρα το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$ και πλάτος $A = d = 0{,}2m$

$$ω = \sqrt{k/m} = 10\,rad/s \Rightarrow\ T = π/5 \quad και \quad φ_o = π/2$$

**β.** Το έργο της δύναμης $F$ μπορούμε να το υπολογίσουμε με δύο τρόπους.

**Α. Τρόπος:** Με το Θεώρημα έργου-ενέργειας.

$$ΔK = W_F + W_w + W_{Fελ} \Rightarrow 0 = W_F + mgx + \frac{1}{2}kΔl_o^2 - \frac{1}{2}k(Δl_o + d)^2 \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}kd^2$$

**Β τρόπος:** Με Αρχή Διατήρησης ενέργειας. Το έργο της δύναμης $F$ **είναι ίσο με την ενέργεια της ταλάντωσης που κάνει το σώμα μετά την κατάργηση της.**

$$W_F = E_{πρ} = E_{ταλ} = 1/2\,DA^2 = 1/2\,kd^2 = \boldsymbol{5j}$$

**γ.**

$$x = Aημ\left(ωt + \frac{π}{2}\right) = 0{,}2ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right)$$

$$t_1 = \frac{π}{30}s \Rightarrow x_1 = 0{,}2ημ\left(10\frac{π}{30} + \frac{π}{2}\right) = 0{,}2ημ\frac{5π}{6} = 0{,}1m = \frac{A}{2}$$

$$t_2 = 2\frac{π}{15}s \Rightarrow x_2 = 0{,}2ημ\left(10 \cdot 2\frac{π}{15} + \frac{π}{2}\right) = 0{,}2ημ\frac{11π}{6} = -0{,}1m = \frac{A}{2}$$

Τη στιγμές $t_1$, $t_2$ το σώμα έχει ταχύτητες:

$$υ_1 = υ_{max}συν\frac{5π}{6} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}m}{s} \quad και \quad υ_2 = υ_{max}συν\frac{11π}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}m/s$$

$$Δt = t_2 - t_1 = \frac{2π}{15} - \frac{π}{30} = \frac{4π}{30} - \frac{π}{30} = \frac{3π}{30} = \frac{π}{10} = \frac{T}{2}$$

Σε χρόνο $Δt = T/2$ το σώμα διανύει διάστημα $\boldsymbol{s = 2A = 0,4m}$

**δ.** $Δp = mυ_2 - mυ_1 = 2{,}5\sqrt{3} - -2{,}5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\frac{kgm}{s} \Rightarrow \boldsymbol{|Δp| = 5\sqrt{3}\frac{kgm}{s}}$

$$Δ|p| = \boldsymbol{0}$$

**ε.** Σώμα στη θέση φυσικού μήκους → $x = x_o = -Δl_o = -0{,}1m = -A/2$

Το σώμα φτάνει στην ανώτερη θέση του τη χρονική στιγμή $τ = T/2 = π/10\,s$

Από τη στιγμή $τ$ ως την $t_2 = 2(π/15)$ το ελατήριο είναι συσπειρωμένο για χρόνο:

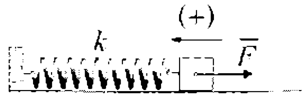
$$Δt = 2\frac{π}{15} - \frac{π}{10} = \frac{π}{30}s$$

Τον ίδιο χρόνο έκανε το σώμα να πάει από την θέση φυσικού μήκους ως την ανώτερη θέση. Έτσι ο ολικός χρόνος σε μια περίοδο που το ελατήριο είναι συσπειρωμένο είναι:

$$Δt_{συσπ} = 2Δt = \boldsymbol{π/15}$$

Μία άλλη πιο γρήγορη λύση είναι με το στρεφόμενο διάνυσμα

**4.19** Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $m = 1\ kg$ και είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ N/m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Αρχικά ($t_o = 0$) το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 20\ N$ προς τα δεξιά.




**α.** Να αποδείξετε ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

**β.** Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = f(t)$.

**γ.** Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ($U$) και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ($U_{ελ}$) όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας.

**δ.** Την ισχύ της δύναμης $F$ όταν η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνει για πρώτη φορά ίση με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

**ε.** Τη χρονική στιγμή $t = \pi\ s$ η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται. Τι κίνηση θα κάνει στη συνέχεια το σώμα;

**Απ.**[ β. $0{,}2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$ γ. $U = 0$, $U_{ελ} = 2\ J$, δ. $20\sqrt{3}\ W$,ε. ακίνητο]

**Απόδειξη ότι η κίνηση σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση**

Θεωρούμε το σώμα σε τυχαία θέση.

Το σώμα ξεκινά από ηρεμία σημαίνει πως η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\pi/2$ αν πάρουμε τη θετική φορά αντίθετη της δύναμης.

Βρίσκουμε την επιμήκυνση του ελατηρίου στην θέση ισορροπίας από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = \frac{F}{k}$$

Σε τυχαία θέση με απομάκρυνση $x$ σχεδιάζουμε τις δυνάμεις και εκφράζουμε τα μέτρα τους ως συνάρτηση του $x$,στη συνέχεια βρίσκουμε το αλγεβρικό τους άθροισμα $\Sigma F$ σαν συνάρτηση του $x$. Αν προκύψει:

$$\Sigma F = -Dx$$

Τότε η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

**Στιγμιαία ισχύς δύναμης που έχει την διεύθυνση της κίνησης**

Η στιγμιαία ισχύς δύναμης ονομάζεται και ρυθμός παραγωγής έργου ή ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας και ορίζεται με τη σχέση:

$$p = \frac{dW_F}{dt}$$

Το έργο είναι: $dW_F = Fdx$ και από τον ορισμό προκύπτει:

$$p = \frac{Fdx}{dt} = Fv$$

Τα σύμβολα $F, v$ είναι αλγεβρικές τιμών των αντίστοιχων διανυσμάτων.

**4.19 Λύση**

**α.** Παίρνουμε ως θετική φορά αντίθετη από την φορά της δύναμης.

Σε τυχαία θέση οι οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ και έχουν μέτρα: $F$ και $F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l$

Και αλγεβρικές τιμές: $-F$ και $F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l$

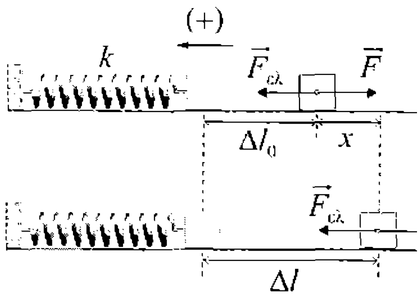
Επειδή το μέτρο της ελατηριακής δύναμης αυξάνει , κάποια στιγμή θα συμβεί:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l - F = 0 \Rightarrow k\Delta l = F \Rightarrow \Delta l = F/k = 0{,}2m$$

Βλέπουμε ότι υπάρχει θέση ισορροπίας (θέση Ο)

Για να αποδείξουμε ότι το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση θεωρούμε το σώμα σε τυχαία θέση με απομάκρυνση x και θα αποδείξουμε ότι

$$\Sigma F = -Dx.$$




Έστω τυχαία θέση Γ δεξιά της θέσης Ο. Η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση Γ είναι:

$$\Delta l' = \Delta l + |x|$$

Είναι $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \ \Delta l' = \Delta l - x$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα έχουν μέτρα $F$ και $F'_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l = k(\Delta l - x)$

$$\Sigma F = F'_{\varepsilon\lambda} - F = k(\Delta l - x) - F = k\Delta l - kx - F = -kx$$

Άρα το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$

**β.** Όταν ξεκινάει το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα και θετική απομάκρυνση

$$A = \Delta l = 0{,}2m$$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_o = \pi/2$

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10\,rad/s \quad \text{και} \quad \boldsymbol{x = 0{,}2\eta\mu(10t + \pi/2)}$$

**γ.** Στην θέση ισορροπίας η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι $\boldsymbol{U = 0}$

Η παραμόρφωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας είναι $\Delta l = 0{,}2m$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}100\frac{4}{100} = \boldsymbol{2j}$$

**δ.** Η ισχύς της δύναμης είναι $p = F \cdot \upsilon$

$$U_{\varepsilon\lambda} = U_{\tau\alpha\lambda} \Rightarrow U_{\tau\alpha\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \Delta l = |x| \Rightarrow$$

$$A - x = x \Rightarrow A = 2x \Rightarrow x = \frac{A}{2} = 0{,}1m \ \text{ ή } \ A - x = -x \Rightarrow A = 0$$

$$x = \frac{A}{2} = 0{,}1m \ \text{για πρώτη φορά} \Rightarrow \upsilon = -\frac{\omega A\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

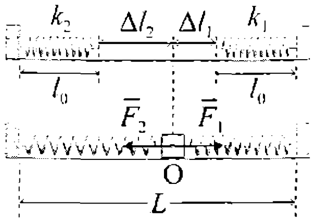
$$P_F = F\upsilon = -20(-\sqrt{3}) = \boldsymbol{20\sqrt{3}\ W}$$

**ε.** Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}2\pi$$

Η χρονική στιγμή $t = \pi\ s$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου $t = 5T$

Το σώμα βρίσκεται στην αρχική του θέση με μηδενική ταχύτητα και **θα παραμείνει ακίνητο.**




**4.20** Πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο του σχήματος ισορροπεί μικρός κύβος μάζας $m = 1kg$ δεμένος στα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων που έχουν σταθερές $k_1 = 75N/m$ και $k_2 = 25N/m$ και ίδιο φυσικό μήκος $l_0 = 80cm$. Τα άκρα των ελατηρίων είναι στερεωμένα σε κατακόρυφα τοιχώματα τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση $L = 2m$. Βρείτε :

**α.** Την επιμήκυνση κάθε ελατηρίου στην θέση ισορροπίας του κύβου.

**β.** Εκτρέπουμε οριζόντια το σώμα από τη θέση ισορροπίας του προς τα δεξιά ώστε το ελατήριο σταθεράς $k_1$ να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Κάποια στιγμή που το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τα αριστερά αποσυνδέουμε ακαριαία το ελατήριο σταθεράς $k_1$. Βρείτε :

**γ.** Την μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα μετά την απομάκρυνση του ελατηρίου σταθεράς $k_1$.

**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος αμέσως μετά την απομάκρυνση του ελατηρίου $k_1$.

Απ. [α.$0{,}1m$, $0{,}3m$, β. $x = 0{,}1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$, γ. $1{,}625j$, δ. $7{,}5j/s$]



**Σώμα ανάμεσα σε δύο ελατήρια**

Στην **θέση ισορροπίας** δεν είναι υποχρεωτικό τα ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος. Πρέπει οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα να έχουν συνισταμένη μηδέν.

Η σταθερά επαναφοράς προκύπτει:

$$D = k_1 + k_2$$

**Αποσύνδεση του ενός Ελατηρίου**

Το σώμα μετά την αποσύνδεση του ενός ελατηρίου θα κάνει νέα ταλάντωση με

- Διαφορετικό πλάτος
- Διαφορετική σταθερά επαναφοράς
- Διαφορετική γωνιακή συχνότητα
- Διαφορετική θέση ισορροπίας

Τη στιγμή της αποσύνδεσης η ταχύτητα του σώματος της παλιάς και της νέας ταλάντωσης είναι ίδια.

Η απομάκρυνση της νέας ταλάντωσης είναι $x = \Delta l_2$

**Ρυθμός μεταβολής κινητικής Ενέργειας**

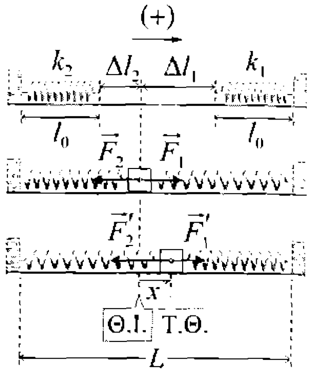
$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon$$

**4.20 Λύση**

**α.** Στην θέση ισορροπίας τα ελατήρια έχουν επιμηκύνσεις $\Delta l_1, \Delta l_2$ και είναι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{k_1}{k_2} \Rightarrow \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = 3 \Rightarrow \Delta l_2 = 3\Delta l_1$$




Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$2l_o + \Delta l_1 + \Delta l_2 = L \Rightarrow \Delta l_1 + \Delta l_2 = L - 2l_o \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 + 3\Delta l_1 = L - 2l_o \Rightarrow 4\Delta l_1 = L - 2l_o \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{L - 2l_o}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta l_1 = 0,1m} \quad \boldsymbol{\Delta l_2 = 0,3m}$$

**β.** Σε μία τυχαία θέση με θετική απομάκρυνση $x$ από την θέση ισορροπίας οι επιμηκύνσεις των ελατηρίων είναι: $\Delta l_1' = \Delta l_1 - x$ και $\Delta l_2' = \Delta l_2 + x$ και οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα από τα ελατήρια θα έχουν μέτρα:

$$F_1' = k_1(\Delta l_1 - x) \quad \text{και} \quad F_2' = k_2(\Delta l_2 + x)$$

$$\Sigma F = F_1' - F_2' = k_1(\Delta l_1 - x) - k_2(\Delta l_2 + x)$$

$$\Sigma F = k_1\Delta l_1 - k_2\Delta l_2 - k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$

Άρα το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με: $D = k_1 + k_2 = 100N/m$

Θέση ισορροπίας (Ο) , πλάτος $A = \Delta l_1 = 0,1m$, $\omega = \sqrt{D/m} = 10rad/s$

αρχική φάση $\pi/2$ και εξίσωση απομάκρυνσης:

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (SI)$$

**γ.** Τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας το σώμα έχει: $\upsilon = \omega A = 1m/s$

Μόλις αποσυνδέσουμε το ελατήριο σταθεράς $k_1$ το σώμα συνεχίζει να κινείται και κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A'$ και με θέση ισορροπίας την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου $k_2$ και σταθερά επαναφοράς $D' = k_2 = 25N/m$ και γωνιακή συχνότητα $\omega'$.

$$\omega' = \sqrt{k_2/m} = 5rad/s$$

Τη στιγμή που αρχίζει η νέα ταλάντωση το σώμα έχει $x' = \Delta l_2$ , $|\upsilon'| = 1m/s$.

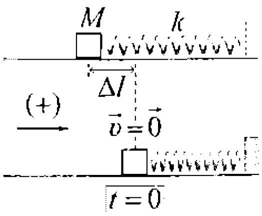
$$E' = K' + U' \Rightarrow E' = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta l_2^2 \Rightarrow$$

$$E' = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}25 \cdot 0,09 = 0,5 + 1,125 = 1,625j$$

$$\boldsymbol{K'_{max} = E' = 1,625j}$$

**δ.** Το σώμα κινείται προς την νέα θέση ισορροπίας και έτσι η κινητική ενέργεια θα αυξάνει και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα είναι θετικός.

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon = -k_2\Delta l_2\upsilon = -25 \cdot 0,3 \cdot (-1) = \boldsymbol{7,5j/s}$$




**4.21** Σώμα μάζας $M = 3kg$ είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k$ το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Απομακρύνουμε το σώμα από την θέση ισορροπίας του συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $\Delta l = 0{,}4m$ και κάποια στιγμή $t_o = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Όταν το σώμα μάζας $M$ διανύσει διάστημα $s = 0{,}2m$ συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας $m = 1kg$ το οποίο κινείται με ταχύτητα μέτρου $12\,m/s$ αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση από το σώμα $M$. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει ΑΑΤ με πλάτος $A' = 0{,}2m$. Αν πάρουμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου την στιγμή που δημιουργείται το συσσωμάτωμα και θεωρήσουμε ως θετική φορά την φορά της αρχικής εκτροπής του σώματος να υπολογίσετε:

**α.** Την ταχύτητα του σώματος μάζας M πριν την κρούση.
**β.** Την σταθερά του ελατηρίου.
**γ.** Την εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος μετά την κρούση.
**δ.** Την χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργεια του συσσωματώματος και να κάνετε την γραφική της παράσταση μέχρι το συσσωμάτωμα να επιστρέψει στην αρχική του θέση.

Απ. [ α. $-4m/s$, β $k = 400N/m$, γ. $\alpha = -20\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$, δ.$8\eta\mu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$]



**Πριν και μετά την κρούση**

**Πριν** την κρούση το σώμα μάζας M κάνει απλή αρμονική ταλάντωση

- Θέση ισορροπίας την θέση φυσικού μήκους
- Πλάτος $A = 0{,}4m$ και γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{k/M}$

**Μετά** την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει αρμονική ταλάντωση

- ίδια θέση ισορροπίας
- $\omega' = \sqrt{k/(M+m)}$
- $A' = 0{,}2m$

**Κινητική ενέεργεια Συσσωματώματος**

$$K = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega' t + \varphi_o)$$

Η συνάρτηση $K = f(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο $T'$

$$T' = \frac{T}{2} \Rightarrow f' = 2f$$

Η αρχική φάση υπολογίζεται εύκολα αν υπολογίσουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

**4.21 Λύση**

**α.** Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει ΑΑΤ με $D = k$

Τη στιγμή $t_o = 0$ που αρχίζει την ταλάντωση του το συσσωμάτωμα έχει απομάκρυνση $x = 0{,}2m$ και ταχύτητα $V$.

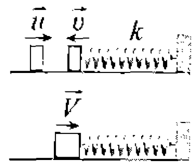
Η ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι σταθερή άρα θα την υπολογίσουμε όποια στιγμή θέλουμε [π.χ.τη στιγμή που δημιουργήθηκε].

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(M+m)V^2 \Rightarrow \frac{1}{2}k\mathrm{A}'^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(M+m)V^2 \Rightarrow V = 0$$

Από την διατήρηση ορμής για την κρούση:

$$Mv + mu = (M+m)\mathrm{V} \Rightarrow v = -4m/s$$

**β.** Η ταλάντωση του Μ έχει γωνιακή συχνότητα ω που μπορούμε να την υπολογίσουμε: Όταν το σώμα διανύσει $s = 0{,}2m$ θα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = A/2$ και θα έχει αρνητική ταχύτητα αλγεβρικής τιμής:




$$\upsilon = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \omega A\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4 = \omega \cdot 0{,}4\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$4 = \omega \cdot 0{,}4\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \omega = \frac{20}{\sqrt{3}}\ rad/s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow k = M\omega^2 = 3\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow k = 400N/m$$

151

**γ.** Μετά την κρούση το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με ίδια θέση ισορροπίας με γωνιακή συχνότητα $\omega'$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10rad/s$$

Πλάτος $A' = 0{,}2m$ και αρχική φάση $\pi/2$ και εξίσωση απομάκρυνσης:

$$\boldsymbol{x = 0{,}2\eta\mu(10t + \pi/2)}$$

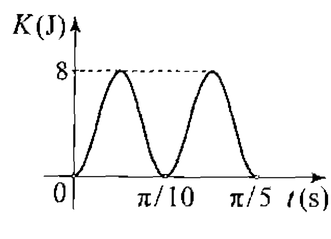
$$\alpha = -\omega'^2 x = -100 \cdot 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{-20\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

**δ.** Η εξίσωση ταχύτητας είναι: $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2)$ Η κινητική ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}(M+m)v^2 = \frac{1}{2}(M+m)\omega^2 A^2 \sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$K = 8\sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$K = 8\eta\mu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$



**4.22** Μία σφαίρα $\Sigma_1$ $m = 1kg$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένη στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $K = 100N/m$, που το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Μετακινούμε τη σφαίρα $\Sigma_1$ προς την θετική κατεύθυνση ώστε να συμπιέσει το ελατήριο και τη στιγμή $t_0 = 0$ την αφήνουμε ελεύθερη από την ηρεμία. Τη χρονική στιγμή $t = \pi/15\, s$ η σφαίρα $\Sigma_1$ έχει διανύσει διάστημα $s = 30cm$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σφαίρα $\Sigma_2$ ίδιας μάζας. Βρείτε:

**α.** Την εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας της ταλάντωσης.

**β.** Το ρυθμό μεταβολής δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης λίγο πριν την κρούση.

**γ.** Τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση, καθώς και το νέο πλάτος ταλάντωσης του $\Sigma_1$ μετά την κρούση.

Η σφαίρα $\Sigma_2$ μετά την κρούση συνεχίζει να κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη σφαίρα $\Sigma_3$ ίδιας ακτίνας. Το Κέντρο της $\Sigma_3$ απέχει από την ευθεία κίνησης του $\Sigma_2$ απόσταση ίση με την ακτίνα των σφαιρών. Αν μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις βρείτε:

**δ.** Το λόγο των μαζών των 2 σφαιρών $\Sigma_2$ και $\Sigma_3$

**ε.** Τα μέτρα των ταχυτήτων των 2 σφαιρών μετά την κρούση

$$\Delta \acute{\iota} \delta \varepsilon \tau \alpha \iota:\ \eta\mu 30 = \frac{1}{2}\ \ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Απ.[α. $0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$, β. $20\sqrt{3}\, j/s$, γ. 0 , $\sqrt{3}\ \frac{m}{s}$ δ. $m_2 = m_3$, ε. $\upsilon_2' = \sqrt{3}/2$]



**Υπολογισμός πλάτους – απομάκρυνσης από το διάστημα**

Για ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και η ταχύτητα του έχει συνέχεια την ίδια κατεύθυνση το διάστημα που διανύει είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της μετατόπισης.

$$s = |\Delta x|$$

Ένα σώμα που κάνει ταλάντωση και τη στιγμή $t_o = 0$ βρίσκεται σε ακραία θέση μέχρι τη στιγμή $T/2$ θα κινείται συνέχεια προς την ίδια κατεύθυνση.
Η αρχική απομάκρυνση του σώματος είναι $x_o = +A$

**Τη χρονική $t = \pi/15\, s$**

- Θα εξετάσουμε αν είναι μικρότερη της $T/2$
- Θα υπολογίσουμε την απομάκρυνση $x$ ως συνάρτηση του πλάτους
- Θα υπολογίσουμε την μετατόπιση $\Delta x = x - x_o$

**Πρόσημο του ρυθμού μεταβολής $dU/dt$**

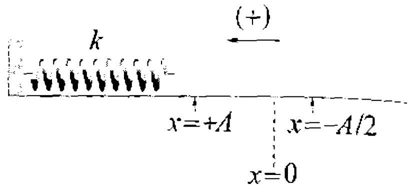
Πριν υπολογίσουμε έναν ενεργειακό ρυθμό μεταβολής πρέπει να βρούμε το πρόσημο του. Αν το σώμα κινείται προς ακραία θέση είναι

$$\frac{dU}{dt} > 0$$

**4.22 Λύση**

**α.** Η σφαίρα Σ1 κάνει αατ με πλάτος $A$. Σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Γωνιακή συχνότητα $\omega = 10rad/s$




$$f = \frac{5}{\pi} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}$$

Αρχική φάση $\varphi o = \pi/2$ και: $x = A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$t = \frac{\pi}{15}s \Rightarrow x = A\eta\mu\left(10\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{2}\right) = A\eta\mu\left(2\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = A\eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{A}{2}$$

$$\frac{T}{4} < \frac{\pi}{15} < \frac{T}{2} \Rightarrow s = A + \frac{A}{2} \Rightarrow s = 3\frac{A}{2} \Rightarrow A = 20cm = 0{,}2m$$

$$x = \mathbf{0{,}2\eta\mu}\left(\mathbf{10t} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right) \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = \mathbf{2\sigma\upsilon\nu(10t} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}})$$

$$\Gamma\iota\alpha\ t = \frac{\pi}{15} \Rightarrow \quad x = -0{,}1m \ \ \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F\varepsilon\pi}}{dt} = -(-Dx\upsilon) = 100 \cdot (-0{,}2) \cdot (-\sqrt{3}) = \mathbf{20\sqrt{3}\, j/s}$$

**γ.** Μετά την κρούση οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες: $\upsilon'_1 = \mathbf{0}$ $\kappa\alpha\iota\ \upsilon'_2 = -\mathbf{\sqrt{3}}\ \frac{m}{s}$

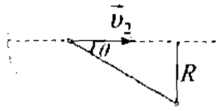
Η νέα ταλάντωση έχει πλάτος $A' = A/2 = 0{,}1$m

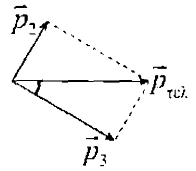
**Δ. i.** Η κρούση $m_2$ και $m_3$ είναι ελαστική: $\quad A\Delta O: p'^2_2 + p'^2_3 = P^2_2$

$$K'_2 + K'_3 = K_2 + K_3 \Rightarrow \frac{p'^2_2}{2m_2} + \frac{p'^2_3}{2m_3} = \frac{p^2_2}{2m_2} \Rightarrow \frac{p'^2_2}{2m_2} + \frac{p'^2_3}{2m_3} = \frac{p'^2_2 + p'^2_3}{2m_2} \Rightarrow$$

$$\frac{p'^2_2}{2m_2} + \frac{p'^2_3}{2m_3} = \frac{p'^2_2}{2m_2} + \frac{p'^2_3}{2m_2} \Rightarrow \frac{p'^2_3}{2m_3} = \frac{p'^2_3}{2m_2} \Rightarrow m_2 = m_3$$

**ii.** Στο σχήμα βλέπουμε τις σφαίρες λίγο πριν την κρούση τους. Η γωνία θ προκύπτει:



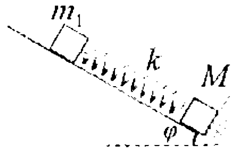




$$\eta\mu\theta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^o$$

Η δύναμη μεταξύ των σφαιρών έχει την διεύθυνση της διακέντρου των σφαιρών και έτσι η σφαίρα Σ3 μετά την κρούση θα κινηθεί σε γωνία θ ως προς την αρχική διεύθυνση κίνησης της Σ2. Οπότε η σφαίρα Σ2 θα κινηθεί σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^o$ με την ταχύτητα που είχε πριν την κρούση.

$$p'_2 = p_2\sigma\upsilon\nu 60 \Rightarrow m\upsilon'_2 = m\upsilon_2\frac{1}{2} \Rightarrow \upsilon'_2 = \sqrt{3}\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$p'_3 = p_2\sigma\upsilon\nu 60 \Rightarrow m\upsilon'_3 = m\upsilon_2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \upsilon'_3 = \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\frac{m}{s}$$




**4.23** Τα δύο σώματα του Σ1 και Σ του διπλανού σχήματος έχουν μάζε $m_1 = m = 1\,kg$ και $M = 3\,kg$ και είναι δεμένα στα ελεύθερα άκρα ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,N/m$ το οποίο βρίσκεται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^o$. Το σώμα μάζας $M$ στηρίζεται σε τοίχο που είναι κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα Σ1 δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο ώστε να αυξηθεί το μήκος του ελατηρίου και το σώμα να φτάσει με μηδενική ταχύτητα σε μία θέση Γ η οποία απέχει κατά $d$ από την αρχική του θέση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα μάζας $m$ να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική επιτάχυνση $\alpha = -10 m/s^2$.

**α.** Γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος.

**β.** Βρείτε το έργο της δύναμης $\vec{F}$.

**γ.** Υπολογίστε το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ από το τοίχο, ως συνάρτηση της απομάκρυνσης $x$ της ταλάντωσης.

**δ.** Τη χρονική στιγμή $t = 3\pi/20$ το σώμα Σ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ2 μάζας $m_2 = M$ και λίγο πριν την κρούση τα σώματα έχουν αντίθετες ταχύτητες. Αν μετά την κρούση απομακρύνουμε το σώμα μάζας $m_2$. Βρείτε:

**i.** Το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος μάζας $m$.

**ii.** Να εξετάσετε αν το σώμα Σ2 αποχωρίζεται από το τοίχωμα.

Δίνεται: $g = 10\,m/s^2$

Απ. Απ.[α. $x = 0{,}1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$, β. 0,5j, γ. $N = -100x + 20$, δ.i $0{,}2m$ ii.όχι]

**Αρχική Φάση**

Αν το σώμα ξεκινάει από την ακραία θέση $x = +A$ η αρχική φάση είναι $\pi/2$

Η **ενέργεια ταλάντωσης**

Είναι η ενέργεια που προσφέραμε στο σώμα για να αρχίσει να ταλαντώνεται.

**Ελατηριακές δυνάμεις**

Το ελατήριο ασκεί αντίθετες δυνάμεις $F_{\varepsilon\lambda}, F'_{\varepsilon\lambda}$ στα δύο σώματα που συνδέει.

Την αλγεβρική τιμή της $F_{\varepsilon\lambda}$ που δέχεται το σώμα Σ1 μάζας $m$ την βρίσκουμε από

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg\eta\mu\varphi = -kx \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = mg\eta\mu\varphi - kx$$

**Απώλεια επαφής δύο σωμάτων**

Όσο τα σώματα είναι σε επαφή θα υπάρχει δύναμη επαφής($\vec{N}$) την οποία μπορούμε να σχεδιάσουμε και έτσι το σύμβολο Ν αναφέρεται στο μέτρο της.

Απώλεια επαφής συμβαίνει όταν: $N = 0$

**4.23 Λύση**

**α.** Αρχικά το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση $\upsilon = 0$

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow x = -\frac{-10}{100} = +0{,}1m$$

Αρχικά είναι $x = +A = 0{,}1m$ και αρα η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2$

$$\boldsymbol{x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})}$$

**β.** Το έργο της δύναμης F εκφράζει την ενέργεια που προσφέραμε στο σώμα και η οποία έγινε ενέργεια ταλάντωσης.

$$\boldsymbol{W_F = E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,5j}$$

**γ.** Θα υπολογίσουμε αρχικά την δύναμη που δέχεται το σώμα μάζας Μ σαν συνάρτηση της απομάκρυνσης. Η θετική φορά είναι η φορά της αρχικής εκτροπής.

Αφού το σώμα κάνει ααт θα είναι:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg\eta\mu\varphi = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg\eta\mu\varphi - kx$$

Το σώμα μάζας $M$ δέχεται αντίθετη δύναμη από το ελατήριο

$$F'_{\varepsilon\lambda} = kx - mg\eta\mu\varphi$$

Αφού το σώμα μάζας Μ μένει ακίνητο θα είναι:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N + F'_{\varepsilon\lambda} - Mg\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow N + kx - mg\eta\mu\varphi - Mg\eta\mu\varphi = 0$$

$$N = -kx + mg\eta\mu\varphi + Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow N = -kx + (M+m)g\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N = -100x + 20}$$

Η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης Ν προκύπτει για $x = A$ και είναι :

$$N_{\varepsilon\lambda} = -100 \cdot (0{,}1) + 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = -10 + 20 = 10N$$

**δ. i.** Τη χρονική στιγμή $3\pi/20$

$$x = A\eta\mu\left(10\frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{2}\right) = A\eta\mu 2\pi = 0$$

$$\upsilon_1 = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi = \omega A = 1m/s$$

Η ταχύτητα του σώματος Σ2 πριν την κρούση θα είναι: $\upsilon_2 = -1m/s$

Από τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης προκύπτει

$$\upsilon'_1 = -2\frac{m}{s}$$

Και η νέα ταλάντωση θα έχει διπλάσιο πλάτος $\boldsymbol{A' = 0,2m}$

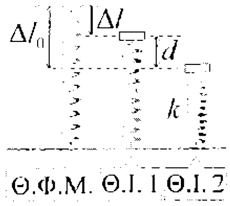
**ii.** Υπολογίζουμε και πάλι την δύναμη Ν που δέχεται το σώμα Σ από το τοίχωμα.

$$N = -kx + (M+m)g\eta\mu\varphi$$

Απώλεια επαφής σημαίνει ότι $N = 0$

$$kx + (M+m)g\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow x = -\frac{(M+m)g\eta\mu\varphi}{k} = -0{,}2 = -A$$

Άρα το σώμα **μόλις που δεν αποχωρίζεται** από το κάθετο τοίχωμα.




**4.24** Σώμα μάζας $M = 4kg$ ισορροπεί στο άνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k$. Προκαλούμε πρόσθετη συσπείρωση του ελατηρίου κατά $d = 0{,}2m$ ώστε το σώμα να φτάσει με μηδενική ταχύτητα σε κάποια θέση Γ στην οποία για να παραμένει ακίνητο του ασκούμε κατακόρυφη δύναμη $F = 20N$. Κάποια στιγμή $t_o = 0$ καταργούμε τη δύναμη $F$ και το σώμα αρχίζει να κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση. Όταν το σώμα μάζας $M$ έχει διανύσει διάστημα μικρότερο του $\Delta l$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με κατερχόμενο σώμα μάζας $m = 1kg$ το οποίο αφέθηκε ελεύθερο από κάποιο ύψος χωρίς αρχική ταχύτητα. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα παραμένει ακίνητο . Βρείτε:

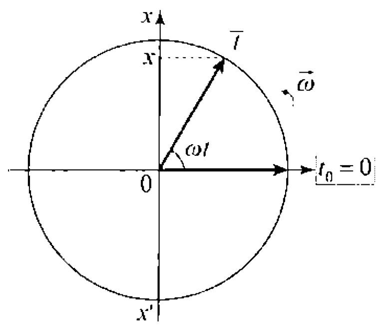
**α.** Την ενέργεια που δαπανήσαμε για να πάμε το σώμα στη θέση Γ.
**β.** Την χρονική στιγμή που έγινε η κρούση.
**γ.** Το λόγο κινητικής προς δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης λίγο πριν την κρούση.
**δ.** Τις ταχύτητες των σωμάτων πριν την κρούση.
**ε.** Το διάστημα που διάνυσε το σώμα μάζας $m$ από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο ως τη στιγμή της κρούσης.

Απ. [α. $2j$, β. $t = \pi/15\, s$, γ. 3 , δ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}m/s$ $2\sqrt{3}m/s$ ε. 0,6m]

156

**Υπολογισμοί χρόνου με στρεφόμενο διάνυσμα**

**Στρεφόμενο διάνυσμα μέτρου Α**




- Έχει γωνιακή ταχύτητα σταθερή ίση κατά μέτρο με την γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης.
- Κάθε στιγμή η προβολή του στον κατακόρυφο άξονα ισούται με την απομάκρυνση $x$ της ταλάντωσης.
- Η φάση κάθε στιγμή είναι η γωνία του διανύσματος με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα.

Για να σχεδιάσουμε το διάνυσμα στη σωστή θέση
πρέπει να γνωρίζουμε την απομάκρυνση $x$ αλλά και το πρόσημο της ταχύτητας.
Από το σχήμα μπορούμε υπολογίσουμε την αύξηση της φάσης $\Delta\varphi$.
Στη συνέχεια με τη σχέση:

$$\boldsymbol{\Delta\varphi = \omega\Delta t}$$

Μπορούμε να κάνουμε υπολογισμό του χρόνου $\Delta t$ που μας ενδιαφέρει.

Στο σχήμα μπορούμε να δείξουμε και την αρχική φάση $\boldsymbol{\varphi_o}$ της ταλάντωσης και να την υπολογίσουμε. Είναι η γωνία $\boldsymbol{\varphi_o}$ που σχηματίζει το στρεφόμενο διάνυσμα με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα τη στιγμή $t_o = 0$

**4.24 Λύση**

**α.** Έστω $d$ η αρχική συσπείρωση του ελατηρίου στην Θ.Ι.

$$Mg = k\Delta l_o$$

Όταν προκαλέσουμε πρόσθετη συσπείρωση το σώμα ισορροπεί με την επίδραση της $F$

$$F + Mg = k(\Delta l_o + d) \Rightarrow F + Mg = k\Delta l_o + \;\; kd + \Rightarrow F = kd \Rightarrow$$

$$k = \frac{F}{d} = 100N/m$$

Το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}2m$

$$E_{\delta\alpha\pi} = E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}kA^2 = \mathbf{2j}$$

**β.** Η ταλάντωση του Μ έχει αρχική φάση $\pi/2$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = 5rad/s$$

Η κρούση γίνεται στην ΘΙ του συσσωματώματος η οποία βρίσκεται πιο κάτω από την ΘΙ του Μ κατά $x$

$$d = \frac{mg}{k} = 0{,}1m = \frac{A}{2}$$

Λίγο πριν την κρούση το Μ έχει απομάκρυνση $x = A/2$ και αρνητική ταχύτητα $V < 0$

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \omega t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{15} \Rightarrow 10t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{15}}\boldsymbol{s}$$

**γ.**

$$\frac{K}{U} = \frac{E - U}{U} = \frac{E}{U} - 1 = 4 - 1 = \mathbf{3}$$

**δ.** Η ταχύτητα του Μ είναι

$$V = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} = -\omega A\frac{\sqrt{3}}{2} = -5 \cdot 0{,}2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{m/s}$$

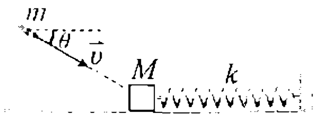
Επειδή το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο μετά την κρούση τα σώματα λίγο πριν την κρούση έχουν αντίθετες ορμές

$$MV + mv = 0 \Rightarrow v = -\frac{M}{m}V = \mathbf{2\sqrt{3}}\boldsymbol{m/s}$$

ε.

$$v = \sqrt{2gs} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2g} = \frac{12}{20} = \mathbf{0,6}\boldsymbol{m}$$

**4.25** Βλήμα μάζας $m = 50g$ κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μέτρου $\upsilon = 50\,m/s$ η οποία σχηματίζει γωνία $\theta$ με την οριζόντια διεύθυνση συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας $M = 950g$ το οποίο βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο όπως στο σχήμα. Βρείτε:




**α.** Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

**β.** Την μεταβολή της ορμής του συστήματος κατά την κρούση και το ποσοστό μείωσης της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων.

**γ.** Τη χρονική στιγμή $\tau$ που το συσσωμάτωμα έχει διανύσει διάστημα $0{,}4m$ ,θεωρώντας ως αρχή μέτρησης του χρόνου τη στιγμή που τελειώνει η κρούση.

**δ.** Το μέτρο της μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος από τη στιγμή $t_o = 0$ ως τη στιγμή τ καθώς και την μεταβολή του μέτρου της ορμής.

**ε.** Το χρονικό διάστημα στο οποίο η δυναμική ενέργεια είναι μεγαλύτερη της κινητικής ενέργειας πριν το συσσωμάτωμα επιστρέψει στην αρχική του θέση.

Δίδεται $\eta\mu\theta = 0{,}6$ , $\sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}8$

Απ. [ α. $2\,m/s$, β. $|\Delta\vec{p}| = 1{,}5kgm/s$, γ. $0{,}1\pi$, δ. $4kgm/s$,0 , ε. $0{,}2\pi$ ]

**Μεταβολή ορμής συστήματος σωμάτων σε μια κρούση:**

Αν τα σώματα μετά την κρούση είναι ελεύθερα να κινηθούν τότε η ορμή του συστήματος διατηρείται και η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι μηδέν.

Αν η ορμή του συστήματος διατηρείται μόνο στον άξονα $xx$ τότε θα είναι:

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_y$$

**Χρονικοί υπολογισμοί σε μια αρμονική ταλάντωση**

Οι υπολογισμοί χρόνου σε μία ταλάντωση μπορούν να γίνουν αν βρούμε την εξίσωση απομάκρυνσης και στη συνέχεια λύσουμε την τριγωνομετρική εξίσωση.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το **στρεφόμενο διάνυσμα**.

**Μεταβολή Ορμής**

Όταν η αρχική και τελική ορμή είναι στην ίδια ευθεία χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές. Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής συμβολίζεται με $\Delta p$ και είναι:

$$\Delta p = p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής συμβολίζεται με $|\Delta p|$

**Μεταβολή του μέτρου ορμής**

Η μεταβολή του μέτρου της ορμής συμβολίζεται με $\Delta|p|$ και είναι:

$$\Delta|p| = |p|_{\tau\varepsilon\lambda} - |p|_{\alpha\rho\chi}$$

**4.25 Λύση**

**α.** Η ταχύτητα του βλήματος αναλύεται σε

$$\upsilon_x = \upsilon\sigma\upsilon\nu\theta = 50 \cdot 0{,}8 = 40\,m/s \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_y = \upsilon\eta\mu\theta = 50 \cdot 0{,}6 = 30m/s$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται οριζόντια με ταχύτητα $V$

Η ορμή του συστήματος διατηρείται στον οριζόντιο άξονα

$$m\upsilon_x = (M+m)V \Rightarrow V = \frac{m}{M+m}\upsilon_x = \frac{50}{1000}40 = 2\,m/s$$

**β.** Θα βρούμε τις συνιστώσες του διανύσματος $\Delta\vec{p}$

$$\Delta P_x = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Delta\vec{p}_y = 0 - m\upsilon_y = -\frac{50}{1000}30 = -1{,}5\frac{kgm}{s} \quad \Rightarrow |\Delta\vec{p}| = 1{,}5kgm/s$$

$$\left.\begin{aligned} K_{\pi\rho} &= \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 62{,}5j \\ K_{\mu\varepsilon\tau} &= \frac{1}{2}(M+m)V^2 = 2joule \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\Delta K| = 60{,}5joule \Rightarrow \frac{|\Delta K|}{K_{\pi\rho}} = \frac{60{,}5}{62{,}5} = 96{,}8\%$$

**γ.** Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$

$$\omega = \sqrt{k/M+m} = 10rad/s$$

Μέγιστη ταχύτητα $V_{max} = 2m/s$ και πλάτος $A \Rightarrow A = V_{max}/\omega = 0{,}2m$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι μηδέν. Όταν το σώμα διανύσει $s = 0{,}4m = 2A$ θα επιστρέψει στην αρχική θέση που είναι η θέση ισορροπίας και έχει περάσει χρόνος $T/2$

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10} = 0{,}1\pi$$

**δ.** Τη στιγμή τ το σώμα έχει ταχύτητα $-V_{max} = -2m/s$

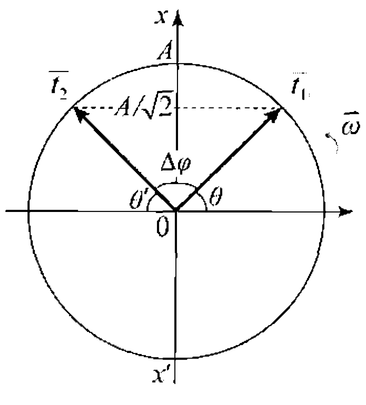
$$\Delta p = -2 - 2 = -4kgm/s \Rightarrow |\Delta p| = 4kgm/s$$

Το μέτρο της ορμής είναι ίδιο αρχικά και τελικά $\Rightarrow \Delta|p| = 0$

**ε.** $$K + U = E \xrightarrow{K=U} 2U = E \Rightarrow U = \frac{1}{2}E \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

Ως τη στιγμή τ που το συσσωμάτωμα επιστρέφει στην αρχική του θέση είναι $x > 0$. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2$ στις οποίες είναι $x = A/\sqrt{2}$. Από τη στιγμή $t_1$ ως τη στιγμή $t_2$ είναι: $U > K$

Οι γωνίες $\theta$ και $\theta'$ είναι ίσες.

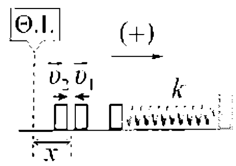



$$\eta\mu\theta = \frac{A/\sqrt{2}}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Από $t_1$ ως $t_2$ η αύξηση της φάσης είναι $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \pi - 2\theta \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega\Delta t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4} = 0{,}2\pi$$




**4.26** Σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 1kg$ είναι στερεωμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$. Το σώμα βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο και το συγκρατούμε ακίνητο σε μία θέση Γ στην οποία το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta l = 0{,}3m$ . Ένα σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2 = 4kg$ κινείται στο λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $2m/s$ πλησιάζοντας το σώμα $\Sigma_1$. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σώμα $\Sigma_1$ και τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά πριν το σώμα $\Sigma_1$ φτάσει στην θέση ισορροπίας του. Αν μετά την κρούση το σώμα $\Sigma_1$ κάνει $AAT$ με μέγιστο πλάτος . Βρείτε:

**α.** Την ενέργεια ταλάντωσης του σώματος $\Sigma_1$ πριν την κρούση.
**β.** Την ενέργεια ταλάντωσης του $\Sigma_1$ μετά την κρούση.
**γ.** Την ταχύτητα του σώματος $\Sigma_1$ λίγο πριν την κρούση.
**δ.** Την απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας στην θέση της κρούσης.
**ε.** Τη χρονική στιγμή που γίνεται η πρώτη κρούση των σωμάτων

Απ. [ α. $18j$, β. $24j$ γ. $\upsilon_1 = -3m/s$, δ. $0{,}15 \cdot \sqrt{3}\, m$, ε. $\pi/120\, s$]

**Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης μετά από κεντρική ελαστική κρούση**

Η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος $\Sigma_1$ μετά την κεντρική ελαστική κρούση με σώμα $\Sigma_2$ θα είναι μέγιστη αν το σώμα $\Sigma_1$ πάρει όλη την ενέργεια του σώματος $\Sigma_2$ δηλαδή όταν το σώμα $\Sigma_2$ μείνει ακίνητο μετά την κρούση $\upsilon_2' = 0$
Ο τύπος που συνδέει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας με την απομάκρυνση

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Προκύπτει από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας
Ισχύει και στην εξαναγκασμένη ταλάντωση αλλά ως μια μαθηματική σχέση αφού δεν ισχύει η ΑΔΜΕ.

**Αρχική Φάση -Χρονικοί Υπολογισμοί**

Αν ζητηθεί η αρχική φάση τότε οι τιμές της είναι 0 ή $\pi/2$

Αν όμως δίδεται η αρχική φάση τότε μπορεί να πάρει τιμές:

$$0 \le \varphi_o < 2\pi$$

Οι χρονικοί υπολογισμοί μπορούν να προκύψουν με επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων ή πολύ πιο εύκολα με **στρεφόμενο διάνυσμα**

**Προσοχή**
Όταν εφαρμόζουμε τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης τα σύμβολα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_1', \upsilon_2'$ αναφέρονται σε αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων

**4.26 Λύση**

**α.** Το πλάτος ταλάντωσης πριν την κρούση είναι $A = \Delta l = 0{,}3m$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}400\frac{9}{100} = \mathbf{18j}$$

**β.** Το Σ1 μετά την κρούση θα αποκτήσει μέγιστη ενέργεια ταλάντωσης αν πάρει όλη την κινητική ενέργεια του σώματος $\Sigma_2$. Οπότε το $\Sigma_2$ μετά την κρούση θα είναι ακίνητο.

$$E' = max \;\; όταν \;\; K_2' = 0 \Rightarrow \upsilon_2' = 0$$

$$E' = E'_{max} = E + K_2 = 18 + \frac{1}{2}4 \cdot 4 = 24j$$

**γ.** $\upsilon'_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}2 = 0 \Rightarrow 2m_1\upsilon_1 = -2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = -3m/s}$

**δ.** Η ενέργεια ταλάντωσης του Σ1 λίγο πριν την κρούση είναι $E$

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = x^2 + \frac{m_1}{k}\upsilon_1^2 \Rightarrow x^2 = A^2 - \frac{m_1}{k}\upsilon_1^2 \Rightarrow x = \sqrt{A^2 - \frac{m_1}{k}\upsilon_1^2} = \pm 0{,}15 \cdot \sqrt{3}\,m$$

Με θετική φορά την φορά της αρχικής απομάκρυνσης η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\pi/2$ και η ταχύτητα του Σ1 πριν την κρούση είναι αρνητική ενώ η απομάκρυνση είναι θετική. $\boldsymbol{x = 0{,}15 \cdot \sqrt{3}\,m}$

**ε.** $x = A\eta\mu(\omega t + \pi/2)$. Η κρούση γίνεται στην θέση $x = A\sqrt{3}/2$

$$\Rightarrow A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3}$$

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \kappa = 1{,}2{,}\dots \quad (A)$$

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \quad \kappa = 0{,}1{,}2\dots.(B)$$

Λίγο πριν την πρώτη κρούση είναι $\upsilon < 0$ που σημαίνει ότι συν$\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) < 0$

Αρνητικά συνημίτονα προκύπτουν από την (Β) και για $\kappa = 0$ έχουμε:

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega t + \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega t = 2\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 20t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{120}s$$

**Ένας πιο γρήγορος τρόπος είναι το στρεφόμενο διάνυσμα**

Τη στιγμή $t_1$ είναι: $x = A\sqrt{3}/2$

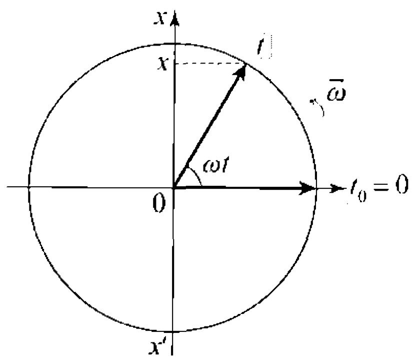
$$\eta\mu\theta = \frac{A\sqrt{3}/2}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Η αύξηση της φάσης είναι:

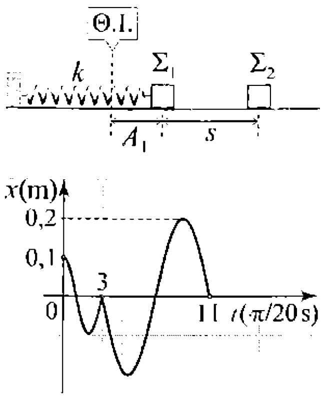
$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{6} = 20\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{120}s \Rightarrow$$

$$t_1 - 0 = \frac{\pi}{120}s \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{120}s$$



**4.27** Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε την εξέλιξη της ταλάντωσης ενός σώματος $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 1$ kg σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα $\Sigma_1$ είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα Σ1 ξεκινάει τη στιγμή $t_o = 0$ χωρίς αρχική ταχύτητα και κάποια στιγμή, το σώμα $\Sigma_1$ συγκρούεται κεντρικά με σώμα $\Sigma_2$, μάζας $m_2$. Στο δεύτερο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο. Βρείτε.




**α.** Το είδος της κρούσης και την μάζα $m_2$.
**β.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ1 τη χρονική στιγμή $t = (\pi/40)s$.
**γ.** Το μέτρο της ορμής του $\Sigma_1$ λίγο πριν την κρούση.
**δ.** Τη μεταβολή της ορμής του $\Sigma_2$ εξ αιτίας της κρούσης.
**ε.** Την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος και το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης.

Απ. [α. Πλαστική, $3kg$ β. $5j/s$ γ. $1kgm/s$ δ. $2kgm/s$, ε. $8/3\,j$, $300\%$]

**Πληροφορίες που προκύπτουν από το διάγραμμα**

- Περίοδος της ταλάντωσης πριν και μετά την κρούση
- Θέση στην οποία γίνεται η κρούση
- Το είδος της κρούσης.
- Αρχική φάση της ταλάντωσης του $\Sigma_1$.

**Θέση ισορροπίας – Σταθερά επαναφοράς**

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος Σ1 αλλά και του συσσωματώματος είναι η θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και η σταθερά επαναφοράς είναι η σταθερά του ελατηρίου.

$$D = k$$

**Ενεργειακές μεταβολές**

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος μειώθηκε

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \Delta K < 0$$

Η Ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Και παρατηρούμε ότι αυξήθηκε.

**4.27 Λύση**

**α.** Βλέπουμε ότι η περίοδος διπλασιάστηκε $T' = 2T \Rightarrow \omega' = \omega/2 = 5rad/s$ και επειδή δεν άλλαξε το $k$ σημαίνει ότι άλλαξε η μάζα , άρα η κρούση είναι **πλαστική**

$$k = m_1\omega^2 = 1 \cdot 10^2 = 100N/m$$

$$T' = 2T \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 2\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow m_1 + m_2 = 4m_1 \Rightarrow m_2 = 3m_1 = \boldsymbol{3kg}$$

**β.** Η ταλάντωση του σώματος Σ1 πριν την κρούση έχει αρχική φάση $\pi/2$

$$T = 4\frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{5}s \Rightarrow \omega = 10rad/s$$

Τη στιγμή $t = \pi/40s$ δεν έχει γίνει ακόμη η κρούση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \upsilon = \omega A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$t = \frac{\pi}{40} \Rightarrow x = 0{,}1\eta\mu\left(10\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = 0{,}1\eta\mu\left(3\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\ x = 0{,}1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}05\sqrt{2}m \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \upsilon = -0{,}5\sqrt{2}m/s$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon = -kx\upsilon = -100 \cdot 0{,}05\sqrt{2} \cdot \left(-0{,}5\sqrt{2}\right) = \boldsymbol{5j/s}$$

**γ.** Το πλάτος ταλάντωσης πριν την κρούση είναι $A = 0{,}1m$

Λίγο πριν την κρούση το Σ1 έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega A = 10 \cdot 0{,}1 = 1m/s$

$$p_1 = m_1\upsilon_1 = 1 \cdot 1 = \boldsymbol{1kgm/s}$$

**δ.** Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι

$$V_{max} = \omega' A' = 5 \cdot 0{,}2 = 1m/s$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι $V = -1m/s$

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow 1 + 3\upsilon_2 = -4 \Rightarrow 3\upsilon_2 = -5 \Rightarrow \upsilon_2 = -\frac{5}{3}$$

$$\left.\begin{cases} p_2 = -3 \cdot \frac{5}{3} = -5Kgm/s \\ \\ p_2' = -3 \cdot 1 = -3Kgm/s \end{cases}\right. \Rightarrow \Delta p_2 = -3 - (-5) = \boldsymbol{2kgm/s}$$

**ε.** Απώλεια μηχανικής ενέργειας

$$K_{\pi\rho} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 1 + \frac{1}{2}3\frac{25}{9} = \frac{1}{2} + \frac{25}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}j$$

$$K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 1 = 2j$$

$$|\Delta K| = \boldsymbol{\frac{8}{3}j}$$

Το πλάτος ταλάντωσης διπλασιάστηκε άρα η ενέργεια ταλάντωσης τετραπλασιάστηκε που σημαίνει ότι αυξήθηκε κατά **300%.**


**4.28** Ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 200N/m$ έχει το πάνω άκρο του στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου αναρτάται σώμα $\Sigma_1$ μάζας $M = 1Kg$ το οποίο ισορροπεί. Δεύτερο σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m = 1Kg$ κινούμενο κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα $\Sigma_1$. Η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και το συσσωμάτωμα που προκύπτει από την κρούση, φτάνει μέχρι τη θέση στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Με θετική φορά προς τα πάνω να υπολογίσετε:

**α.** Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

**β.** Την απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την πλαστική κρούση

**γ.** Τη μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας που αποκτά το συσσωμάτωμα.

**δ.** Τη μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο.

**ε.** Αν τη στιγμή $t_o = 0$ τελειώνει η κρούση.

**i.** Την μεταβολή της φάσης από τη στιγμή $t_o = 0$ ως τη χρονική στιγμή $t = \pi/10$ s

**ii.** Το ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος τη στιγμή $t$. [Δίδεται $g = 10m/s^2$]

Απ. [ $\sqrt{3}/2m/s$ ,β. $0,75j$ γ. $1m/s$, δ. $40N$, ε. i.π, ii. $-10\sqrt{3}j/s$]

**Αλλαγή της θέσης ισορροπίας**

Αν προστεθεί μάζα $m$ (πλαστική κρούση) η θέση ισορροπίας κατέρχεται κατά $d$

$$d = \Delta L - \Delta l$$

$\Delta l, \Delta L$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στις θέσεις ισορροπίας των $M$ και $M + m$

$$\Delta l = \frac{Mg}{k} \quad \kappa\alpha\iota \quad \Delta L = \frac{(M+m)g}{k}$$

Η απόσταση των δύο θέσεων ισορροπίας είναι:

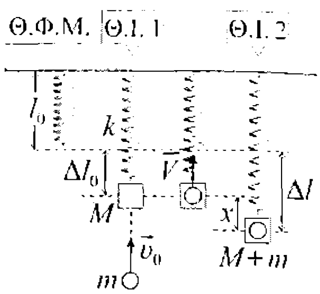
$$d = \Delta L - \Delta l = \frac{mg}{k} \quad (3)$$

Τη στιγμή που αρχίζει την ταλάντωση του το συσσωμάτωμα έχει απομάκρυνση $x = d$ και ταχύτητα μέτρου $V$ και έτσι η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}kd^2$$

**4.28 Λύση**

**α.** Έστω $V$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. $\Delta l$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην Θ.Ι. του Μ, $K$ η κινητική ενέργεια του $m$ πριν την κρούση και $K'$ η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.




Στην Θ.Ι. του Μ: $k\Delta l = Mg \Rightarrow \Delta l = Mg/k = 0{,}05m$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει $AAT$ με θέση ισορροπίας στην οποία η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι:

$$\Delta L = (M + m)g/k = 010cm = 0{,}1m$$

Η θέση φυσικού μήκους είναι ακραία θέση για την ταλάντωση συσσωματώματος και το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$A = \Delta l = 0{,}1m$$

Όταν αρχίζει την ταλάντωση του το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα $V$ και απομάκρυνση $x$:

$$x = \Delta l - \Delta l_o = 0{,}05m = A/2$$

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow V^2 = \frac{k(A^2 - x^2)}{M+m} \Rightarrow$$

$$V = \pm\sqrt{\frac{k}{M+m}}\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow V = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\frac{\omega A\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Η ταχύτητα V έχει κατεύθυνση προς τα πάνω άρα: $\boldsymbol{V = \sqrt{3}/2}$

**β.** ΑΔΟ με θετική φορά προς τα πάνω : $V = \sqrt{3}/2$

$$mv_o = (M+m)V \Rightarrow \upsilon_o = 2V = \sqrt{3}$$

$$K_{\pi\rho} = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 3 = 1{,}5j \quad \kappa\alpha\iota \quad K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \boldsymbol{0{,}75j}$$

$$|\Delta E_{\mu\eta\chi}| = |\Delta K| = 0{,}75j$$

**γ.** Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \sqrt{k/M+m} = 10rad/s$

$$V_{max} = \omega A = 10 \cdot 0{,}1 = \boldsymbol{1m/s}$$

**δ.** Μέγιστη επιμήκυνση ελατηρίου στην κατώτερη θέση

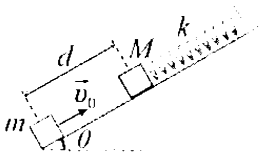
$$\Delta l_{max} = \Delta l + A = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2m \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda(max)} = k\Delta l_{max} = 200 \cdot 0{,}2 = \boldsymbol{40N}$$

**ε.** Η μεταβολή της φάσης ταλάντωσης είναι πάντα θετική ισχύει:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 10\pi/10 = \pi$$

Όταν η φάση αυξηθεί κατά π τότε το σώμα θα έχει ταχύτητα και απομάκρυνση αντίθετες από αυτές που είχε τη στιγμή $t_o = 0$. $x = -x_o = -0{,}05 = -A/2$, $V = -V_o = -\sqrt{3}/2$

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -\frac{dW_\beta}{dt} = (M+m)gV = -\frac{20\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{-10\sqrt{3}j/s}$$




**4.29** Σώμα μάζας $M = 3kg$ ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = 30^o$ δεμένο στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,N/m$ . Από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου βάλλεται σώμα μάζας $m = 1kg$ με αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 14/3\ m/s$ το οποίο αφού διανύσει διάστημα $d = 2m$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα μάζας $M$ . Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται κάνει ΑΑΤ με $D = k$ . Αν $g = 10\,m/s^2$ βρείτε:
**α.** Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και την μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος εξ αιτίας της κρούσης.
**β.** Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
**γ.** Την αλγεβρική τιμή της ελατηριακής δύναμης ως συνάρτηση της απομάκρυνσης.
**δ.** Την μέγιστη και την ελάχιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
**ε.** Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου όταν το συσσωμάτωμα διανύσει διάστημα $s = 1/15\,m$.

Απ. [α. $\frac{1}{3}m/s$, $-\frac{5}{6}j, \frac{1}{6}j$, β. $\frac{1}{12}m$, γ.$F_{\varepsilon\lambda} = 20 - 100x$, δ. $\frac{49}{72}j, \frac{289}{72}j$, ε. $5j/s$]

**Μέγιστη-Ελάχιστη δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου**

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

Όπου $\Delta l$ είναι η αύξηση ή η μείωση του μήκους του ελατηρίου $\Delta l = |l - l_o|$ 
Η $U_{\varepsilon\lambda}$ γίνεται μέγιστη σε κάποια από τις ακραίες θέσεις
Στη θέση ισορροπίας του σώματος η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta l_o$
Σε μία θέση με απομάκρυνση x η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι:
$\Delta l = \Delta l_o + |x|$ για θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας
$\Delta l = \Delta l_o - |x|$ για θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας
Η **μέγιστη δυναμική ενέργεια** του ελατηρίου είναι στην κατώτερη θέση στην οποία:

$$\Delta l = \Delta l_{max} = \Delta l_o + A$$

Η ελάχιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι στην θέση του φυσικού μήκους.
Αν η ανώτερη θέση είναι πιο κάτω από την θέση του φυσικού μήκους τότε η ελάχιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι όταν:

$$\Delta l = \Delta l_{min} = \Delta l_o - A$$

**Διάστημα στην απλή Αρμονική Ταλάντωση**

Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$ το σώμα διανύει διάστημα $4A$
Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2$ το σώμα διανύει διάστημα $2A$
Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T/4$ το σώμα διανύει διάστημα $A$
Από το διάστημα μπορούμε να βρούμε την τελική απομάκρυνση αν γνωρίζουμε την αρχική απομάκρυνση.

**4.29 Λύση**

Στην Θ.Ι. του Μ η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι: $\Delta l = Mg\eta\mu\theta/k = 15cm$.
Στην Θ.Ι του συσσωματώματος η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta l'$

$$\Delta l' = (M+m)g\eta\mu\theta/k = 20cm$$

Η απόσταση των δύο θέσεων ισορροπίας είναι $d$ : $d = mg\eta\mu\theta/k = 5cm$

Όταν αρχίζει την ταλάντωση του το συσσωμάτωμα έχει απομάκρυνση $x = d$

**α.** Το σώμα μάζας $m$ λίγο πριν την κρούση έχει ταχύτητα: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 - 2gh} = 4/3\, m/s$

$$A\Delta O: \; m\upsilon = (M+m)V \Rightarrow V = m\upsilon/(M+m) = \mathbf{1/3\, m/s}$$

$$\Delta K_M = K'_M - K_M = K'_M = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}3\frac{1}{9} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{j}$$

$$\Delta K_m = K'_m - K_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}1\frac{1}{9} - \frac{1}{2}1\frac{16}{9} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{j}$$

**β.** Το πλάτος το καθορίζει η ενέργεια της ταλάντωσης Όταν αρχίζει την ταλάντωση του το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα V και απομάκρυνση $+d$

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow A = \sqrt{d^2 + \frac{M+m}{k}V^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{m}$$

**γ.** Η θέση του φυσικού μήκους βρίσκεται σε απόσταση $\Delta l' = 20cm$ από την θέση ισορροπίας του συσσωματώματος και επειδή είναι $A = 1/12\, m$ σημαίνει ότι το ελατήριο είναι συνέχεια τεντωμένο. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο.

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - (M+m)g\eta\mu\varphi = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = \mathbf{20 - 100}\boldsymbol{x}$$

**δ.** $x = A \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda(\varepsilon\lambda)} = 35/3 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda(\varepsilon\lambda)} = k\Delta l_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Delta l_{\varepsilon\lambda} = 7/60\, m$

$$U_{\varepsilon\lambda(\varepsilon\lambda)} = \frac{1}{2}100\frac{49}{3600} = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{72}}\boldsymbol{j}$$

$$x = -A \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda(max)} = \frac{85}{3} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda(max)} = k\Delta l_{max} \Rightarrow \Delta l_{max} = \frac{17}{60}m \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda(max)} = \frac{\mathbf{289}}{\mathbf{72}}\boldsymbol{j}$$

**ε.** Το διάστημα που διανύει το σώμα ως την θέση $x = +A$ είναι:

$$s_1 = A - x = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

Το διάστημα που διανύει στη συνέχεια είναι

$$s_2 = s - s_1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{30} = s_1$$

Η ολική μετατόπιση του σώματος είναι: $\Delta x = s_1 + (-s_2) = 0$
Το συσσωμάτωμα είναι τελικά στην αρχική του θέση $x = 0{,}05m$ και άρα θα έχει ταχύτητα: $u = -V = -1/3\, m/s$

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{F\varepsilon\lambda}}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda}u = -k\Delta l(-V) = k\Delta lV = \mathbf{5}\boldsymbol{j/s}$$

**4.30** Τα σώματα Α και Β με μάζες $m_1 = 1kg$ και $m_2 = 3kg$ αντίστοιχα, ισορροπούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με την επίδραση οριζόντιας δύναμης μέτρου $F = 160N$, όπως στο σχήμα, όπου το ιδανικό ελατήριο έχει σταθερά $k = 400N/m$, ενώ το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα, είναι μη εκτατό με μήκος $\ell$ και αμελητέα μάζα. Κάποια στιγμή $t_0 = 0$, καταργείται η δύναμη $F$. Με δεδομένο ότι η ταλάντωση που ακολουθεί είναι αατ με $D = k$ και τα δυο σώματα συγκρούονται πλαστικά τη στιγμή $t_2$ που μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος Α βρείτε:


**α.** Τη χρονική στιγμή $t_1$ που θα χαλαρώσει το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα.
**β.** Την εξίσωση της δύναμης που δέχεται το σώμα Β από το νήμα, σε συνάρτηση με το χρόνο $(T = f(t))$.
**γ.** Το μήκος $\ell$ του νήματος που συνδέει τα δυο σώματα.
**δ.** Την ενέργεια της νέας ταλάντωσης του συσσωματώματος, μετά την κρούση.
Θεωρείστε ως θετική την κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$

*Διονύσης Μάργαρης*

$$Απ.[α.\frac{\pi}{20} \quad β.120ημ\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{20} \quad γ.\ 0{,}114m \quad δ.\ 26j$$

**Σώματα που συνδέονται με νήμα και κάνουν απλή αρμονική ταλάντωση.**



Δύο σώματα μπορεί να κάνουν ίδια κίνηση σε διάφορες περιπτώσεις όπως:

- Όταν συνδέονται με νήμα ή όταν είναι σε επαφή μεταξύ τους.
- Όταν συνδέονται με νήμα που είναι τεντωμένο.

Νήμα τεντωμένο ⇒ Το μέτρο (Τ) της τάσης του νήματος είναι: $T \geq 0$

Χαλάρωση νήματος όταν: $T = 0$

**Υπολογισμός της τάσης του νήματος**

Το ευθύγραμμο τεντωμένο νήμα ασκεί αντίθετες δυνάμεις στα δύο σώματα που συνδέει. Όσο το νήμα είναι τεντωμένο τα δύο σώματα κάνουν την ίδια κίνηση η οποία είναι απλή αρμονική ταλάντωση και θα έχουν την ίδια επιτάχυνση.

$$\alpha = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της τάσης του νήματος αν εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο στο σώμα που ασκούνται λιγότερες δυνάμεις.
Θεμελιώδης νόμος για το Σ2

$$\Sigma F = m_2 a \Rightarrow -T = m_2(-\omega^2 x)$$

**4.30 Λύση**

Αρχική ισορροπία με την δύναμη $F$ : $\Sigma F = 0 \Rightarrow F = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = F/k = 0{,}4m$

Όσο το νήμα είναι τεντωμένο τα σώματα κινούνται ως ένα σώμα μάζας $M = m_1 + m_1$ το οποίο κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$ , θέση ισορροπίας την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και $\omega = \sqrt{k/M} = 10rad/s$ , πλάτος $A = 0{,}4m$ και $\varphi_o = \pi/2$.

Τα σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση: $\alpha = -\omega^2 x$

Η τάση του νήματος έχει πάντα κατεύθυνση προς τα αριστερά και έτσι το σύμβολο $T$ αναφέρεται στο μέτρο της. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για το σώμα Β ώστε να υπολογίσουμε το μέτρο της τάσης.

$$\Sigma F = m_2 a \Rightarrow -T = -m_2\omega^2 x \Rightarrow T = m_2\omega^2 x$$

Το νήμα χαλαρώνει όταν $T = 0 \Rightarrow x = 0$ και τότε το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας που είναι η θέση φυσικού μήκους.

Το σώμα φτάνει στην θέση ισορροπίας τη στιγμή: $t_1 = 1/4\,T = \boldsymbol{\pi/20\,s}$

Με ταχύτητα: $\upsilon = -\upsilon_{max} = -\omega A = -10 \cdot 0{,}4 = -4m/s$

**β.**

$$T = m_2\omega^2 x = 3 \cdot 100 \cdot x = 300x$$

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$T = 300 \cdot 0{,}4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{120\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{20}$$

**γ.** Μετά την χαλάρωση του νήματος το σώμα Α κάνει ΑΑΤ με

$$\omega' = 20\,rad/s \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon'_{max} = \upsilon_{max} = \omega A = 4\,m/s$$

$$A' = \upsilon'_{max}/\omega' = 0{,}2m$$

Το σώμα Β κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα: $\upsilon_B = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} = -4m/s$

Η κρούση γίνεται όταν το Α είναι στην ακραία θέση δηλαδή μετά από χρόνο $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{40}$$

Στο χρόνο $\Delta t$ τα διαστήματα που έχουν διανύσει τα σώματα είναι:

$$s_A = A' = 0{,}2m \quad \kappa\alpha\iota \quad s_B = \upsilon_B\frac{T'}{4} = 4 \cdot \frac{\pi}{40} = 0{,}1\pi$$

$$s_B = s_A + l \Rightarrow l = s_B - s_A = (\boldsymbol{0{,}1\pi - 0{,}2})m = 0{,}314 - 0{,}2 = 0{,}114m$$

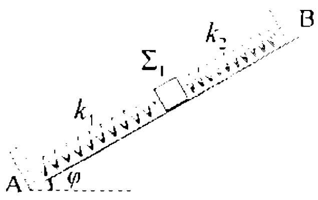
**δ.** Διατήρηση ορμής για την κρούση

$$m_2\upsilon_B = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_2\upsilon_B}{m_1 + m_2} = -\frac{3 \cdot 4}{4} = -3m/s$$

Η Ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση είναι:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 9 + \frac{1}{2}400\frac{4}{100} = 18 + 8 = \boldsymbol{26j}$$

**4.31** Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\varphi = 30°$. Στα σημεία Α και Β στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = 60$ N/m και $k_2 = 140$ N/m αντίστοιχα. Στα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων, δένουμε σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 2$ kg και το κρατάμε στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα). Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σώμα $\Sigma_1$ ελεύθερο.




**α.** Να αποδείξετε ότι το σώμα $\Sigma_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

**β.** Να γράψετε τη σχέση που δίνει την απομάκρυνση του σώματος $\Sigma_1$ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο. Να θεωρήσετε θετική φορά τη φορά από το Α προς το Β.

Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα $\Sigma_1$ βρίσκεται στην αρχική του θέση, τοποθετούμε πάνω του (χωρίς αρχική ταχύτητα) ένα άλλο σώμα $\Sigma_2$ μικρών διαστάσεων μάζας $m_2 = 6$ kg. Το σώμα $\Sigma_2$ δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα $\Sigma_1$ λόγω της τριβής που δέχεται από αυτό. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

**γ.** Να βρείτε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος $\Sigma_2$.

**δ.** Να βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των σωμάτων $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$, ώστε το $\Sigma_2$ να μην ολισθαίνει σε σχέση με το $\Sigma_1$. Δίνονται: $g = 10$ m/s$^2$, $\sigma\upsilon\nu 30° = \sqrt{3}/2$, $\eta\mu 30° = 1/2$. [Εξετάσεις 2012]

Απ.[α. $\Sigma F = -200x$, β. $x = 0{,}05\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI), γ. 150 N/m δ. $\mu_{min} = 2\sqrt{3}/3$]



**Κίνηση σωμάτων**

Όταν το ένα σώμα δεν ολισθαίνει ως προς το άλλο τότε τα δύο σώματα κινούνται σαν ένα σώμα μάζας $M$ το οποίο έχει επιτάχυνση $\alpha = -\omega^2 x$

Με $T_s$ συμβολίζουμε την αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής μεταξύ των σωμάτων. Εφαρμόζουμε θεμελιώδη νόμο για το $\Sigma_2$ και βρίσκουμε την $T_s$ ως συνάρτηση του $x$.

$$T_s - m_2 g\eta\mu\varphi = -m_2\omega^2 x \Rightarrow T_s = m_2(g\eta\mu\varphi - \omega^2 x) \quad (1)$$

**Μη ολίσθηση**

Το μέτρο της στατικής τριβής είναι μικρότερο ή ίσο του μέτρου της οριακής τριβής.

$$|T_s| \le T_{smax} \Rightarrow |T_s| \le \mu_s N$$

Αρκεί η τελευταία σχέση να ισχύει για την μεγαλύτερη τιμή της στατικής τριβής η οποία προκύπτει από την (1) για $x = -A'$

Το πλάτος ταλάντωσης είναι η απόσταση της ακραίας θέσης από θέση ισορροπίας.

$$A = \frac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k_1 + k_1} \quad \kappa\alpha\iota \quad A' = \frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi}{k_1 + k_1}$$

**4.31 Λύση**

**α.** Στην θέση ισορροπίας η παραμόρφωση των ελατηρίων είναι ίση με $d$ και ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow k_1 d + k_2 d - m_1 g \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow \ d = m_1 g\eta\mu\varphi/(k_1 + k_2) \Rightarrow \ d = 0{,}05m$$

Σε τυχαία θέση Γ: $\Sigma F = k_1 \cdot (d - x) + k_2(d - x) - m_1 g \cdot \eta\mu\varphi$

$$\Sigma F = k_1 \cdot d - k_1 \cdot x + k_2 \cdot d - k_2 \cdot x - m_1 g\eta\mu\varphi$$

$$\Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x = \mathbf{-200 \cdot x} \Rightarrow \alpha\pi\lambda\acute{\eta}\ \alpha\rho\mu o\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta$$

**β.** Αφού το σώμα ξεκινάει από ακραία θέση το πλάτος της θα είναι ίσο με την απόσταση της ακραίας θέσης από την θέση ισορροπίας. Πλάτος ταλάντωσης $A = d = 0{,}05m$

$$\omega = \sqrt{D/m_1} = \sqrt{200/2} = 10\, rad/s$$

$$\varphi_0 = \pi/2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \boldsymbol{x = 0,05 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

**γ.** Για το σύστημα $(m_1 + m_2)$. Στην θέση ισορροπίας του $(m_1 + m_2)$τα ελατήρια είναι παραμορφωμένα κατά $d'$ και ισχύει

$$d' = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \eta\mu\varphi}{k} = 0{,}20m$$

Στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x από Θ.Ι. βρίσκουμε

$$\Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x = -200 \cdot x \rightarrow \alpha.\alpha.\tau$$

Το πλάτος ταλάντωσης είναι $A' = 0{,}2m$ και η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega'$

$$\omega' = \sqrt{D/m_1 + m_2} = \sqrt{200/8} = 5 rad/s \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Όσο τα σώματα δεν ολισθαίνουν το ένα ως προς το άλλο έχουν ίδια επιτάχυνση.

$$\alpha = -\omega'^2 \cdot x$$

$$\Gamma\iota\alpha\ \tau o\ \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma F_2 = m_2 \cdot \alpha = m_2(-\omega^2 \cdot x) \ \Rightarrow \ \Sigma F_2 = -m_2\omega'^2 \cdot x = -D_2 \cdot x$$

$$D_2 = \ m_2\omega'^2 = \mathbf{150 N/m.}$$

**δ.** Σε τυχαία θέση με απομάκρυνση x σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο $\Sigma_2$. Την άγνωστη δύναμη $T_s$ δεν τη σχεδιάζουμε.

$$\Sigma F_x = \ m_2\alpha \Rightarrow \quad T_s - m_2 g \cdot \eta\mu\varphi = -D \cdot x \Rightarrow T_s = m_2 g \cdot \eta\mu\varphi - D \cdot x$$

$$x = -A = -0{,}2m \Rightarrow T_6 = 60\mathrm{N} \ \ \kappa\alpha\iota \quad x = +A = +0{,}2m \Rightarrow T_6 = +10\mathrm{N}$$

Για να μην ολισθαίνει το σώμα μάζας $m_2$ πρέπει να είναι πάντα:

$$T_s \le \mu_s \cdot N$$

Η τελευταία να ισχύει για την μεγαλύτερη τιμή του μέτρου της $T_6$ που είναι $60N$

$$60 \le \mu_s 30\sqrt{3} \Rightarrow 2 \le \mu_s \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \le \mu_s \Rightarrow \mu_s \ge \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\mu_s(\varepsilon\lambda) = \frac{\mathbf{2\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$$


**4.32** Σώμα $A$ μάζας $M = 1kg$ ισορροπεί στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$. Μέσω νήματος ασκούμε στο σώμα κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα κάτω της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται με την μετατόπιση $x$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$F = 10 + 50x$$

Αν το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_\theta = 30N$ και πάρουμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου η στιγμή που σπάει το νήμα. βρείτε:

**α.** Το έργο της δύναμης $\vec{F}$.
**β.** Την χρονική εξίσωση απομάκρυνσης και της ταχύτητας του σώματος.
**γ.** Την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Κάποια στιγμή που το σώμα Α έχει απομάκρυνση $x = 0{,}2m$ και ταχύτητα προς τα κάτω συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με σώμα Β μάζας $m = 2kg$ το οποίο κινείται προς τα πάνω. Αν ο λόγος των κινητικών ενεργειών των σωμάτων λίγο πριν την κρούση είναι $K_A/K_B = 2/1$ .Να βρείτε

**δ.** τις ταχύτητες των σωμάτων λίγο πριν την κρούση.
**ε.** Το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Απ. [α. $8J$ , β. $0{,}4\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$, $4\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{2})$ γ. $12{,}5J$ δ.$2\sqrt{3}m/s, -\sqrt{3}m/s$ , ε. 0]



**Έργο μεταβλητής δύναμης που έχει σταθερή διεύθυνση**

Το έργο μεταβλητής δύναμης που έχει σταθερή διεύθυνση το υπολογίζουμε από το διάγραμμα $F - x$ με εμβαδομέτρηση.

Το έργο της δύναμης εκφράζει την ενέργεια που πρόσφερε στο σώμα το αίτιο της δύναμης και η οποία έγινε ενέργεια ταλάντωσης.

$$W_F = E_{\pi\rho o\sigma\varphi\sigma\rho\acute{o}\mu\varepsilon\nu\eta} = E_{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}$$

**Σώματα με ορμές ίσου μέτρου**

Αν οι ορμές δύο σωμάτων έχουν ίσα μέτρα τότε ο λόγος των κινητικών τους ενεργειών είναι αντιστρόφως ανάλογος των μαζών τους.

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

**Θέση Ισορροπίας ταλάντωσης**

Είναι η θέση στην οποία αν τοποθετήσουμε το σώμα χωρίς αρχική ταχύτητα θα παραμείνει ακίνητο.

Αν αυξηθεί η μάζα τότε η θέση ισορροπίας κατέρχεται κατά $d$.
Το $d$ εξαρτάται από την πρόσθετη μάζα $m$

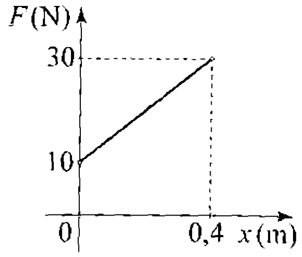
$$d = mg/k$$

**4.32 Λύση**

**α.** Η δύναμη F παράγει έργο μέχρι να σπάσει το νήμα.

Το νήμα σπάει όταν:

$$F = T_\theta \Rightarrow 10 + 50x = 30 \Rightarrow x = 0{,}4m$$




Επειδή η δύναμη F έχει μεταβλητή τιμή, θα υπολογίσουμε το έργο της με εμβαδομέτρηση από το διάγραμμα $F - x$

$$F = 10 + 50x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow F = 10 \\ x = 0{,}4m \rightarrow F = 30N \end{cases}$$

$$W_F = \frac{10+30}{2}0{,}4 = \boldsymbol{8j}$$

**β.** Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την ενέργεια που πρόσφερε η δύναμη $F$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 8j \Rightarrow A = \sqrt{2E/k} = \sqrt{16/100} = \boldsymbol{0,4m}$$

Τη στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση το σώμα βρίσκεται στην κατώτερη θέση του και έχει απομάκρυνση $x = +A$. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_o = \pi/2$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{100/1} = 10rad/s$$

$$x = \boldsymbol{0,4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = 4\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{2})$$

**γ.** Στην θέση ισορροπίας του σώματος μάζας Μ ισχύει:

$$Mg = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = \frac{Mg}{k} = 0{,}1m$$

Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου είναι:

$$\Delta l_{max} = \Delta l_o + A = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5m$$

$$U_{\varepsilon\lambda(max)} = \frac{1}{2}k\Delta l_{max}^2 = \frac{1}{2}100\frac{1}{4} = \boldsymbol{12,5j}$$

**δ.** $$\frac{K_A}{K_B} = \frac{p_1^2/2M}{p_2^2/2m} \Rightarrow 2 = \frac{m}{M}\frac{p_1^2}{p_2^2} \Rightarrow p_1^2 = p_2^2 \Rightarrow p_1 = -p_2$$

Τα σώματα πριν την κρούση έχουν αντίθετες ορμές άρα το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει $V = 0$.

Η ταχύτητα του σώματος μάζας Μ είναι:

$$\upsilon = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \omega A\sqrt{3}/2 = \boldsymbol{2\sqrt{3}m/s}$$

$$M\upsilon + mu = 0 \Rightarrow u = \boldsymbol{-\sqrt{3}m/s}$$

**ε.** Η θέση $x = 0{,}2m$ είναι η θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Επειδή το συσσωμάτωμα μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα $V = 0$ θα παραμείνει ακίνητο

$$\frac{dp}{dt} = \boldsymbol{0}$$

**4.33** Σώμα μάζας $m = 1kg$ ισορροπεί πάνω σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100N/m$. Διεγείρουμε το σώμα ασκώντας του κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα πάνω της οποίας η αλγεβρική τιμή σε συνάρτηση με την μετατόπιση $x$ δίδεται από τη σχέση $F = 1 + 90x$. Όταν η ταχύτητα του σώματος μηδενιστεί για πρώτη φορά η δύναμη $\vec{F}$ παύει να ασκείται και το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$. Να βρείτε:


**α.** Το πλάτος της ταλάντωσης που κάνει το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης.
**β.** Το έργο της δύναμης της δύναμης $F$ και τι εκφράζει.
**γ.** Την εξίσωση της απομάκρυνσης θεωρώντας ως αρχή μέτρησης του χρόνου τη στιγμή που καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F}$ και θετική φορά προς τα πάνω.
**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της ορμής πριν και μετά την κατάργηση της δύναμης όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση στην οποία είναι $x = 0{,}1m$.
**ε.** Το ρυθμό μεταβολής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη χρονική στιγμή $t = \pi/30$.
Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$

Απ. [α.$0{,}2m$, β. $2j$, γ. $0{,}2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$, δ. $0, -10N$, ε. $10\sqrt{3}j/s$]

**Συνισταμένη δύναμη όσο ασκείται η δύναμη $\vec{F}$**

Αν δεν υπήρχε η δύναμη $\vec{F}$ η συνισταμένη δύναμη σε τυχαία απομάκρυνση $x$ από τη θέση ισορροπίας θα ήταν ίση με την δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης:

$$F_{\varepsilon\pi} = -Dx = -kx = -100x$$

Όταν η ασκείται και η δύναμη $\vec{F}$ η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης είναι:

$$\Sigma F = F + F_{\varepsilon\pi} = 1 + 90x - 100x = 1 - 10x$$

**Έργο της δύναμης $\vec{F}$**

- Το υπολογίσουμε από το διάγραμμα $(\Sigma F - x)$ με εμβαδομέτρηση.
- Εκφράζει την ενέργεια που πρόσφερε στο σώμα το αίτιο της δύναμης.
- Είναι ίσο με την ενέργεια της ταλάντωσης που θα κάνει στη συνέχεια το σώμα.

**Ρυθμός μεταβολής βαρυτικής δυναμικής Ενέργειας**

Αν πάρουμε ως επίπεδο αναφοράς την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τότε:

$$U = mgy$$

$$\frac{dU}{dt} = mg\frac{dy}{dt} = mgv$$

Όπου $\upsilon$ είναι η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας

**4.33 Λύση**

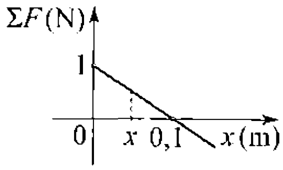
**α.** Αρκεί να βρούμε την τιμή του $x$ για την οποία μηδενίζεται η ταχύτητα. Θα εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ. Η συνισταμένη δύναμη είναι μεταβλητή.

Στο σώμα εκτός από τη δύναμη F ασκούνται η ελατηριακή δύναμη και το βάρος. Από την ελατηριακή δύναμη και το βάρος προκύπτει η δύναμη επαναφοράς

$$F_{\varepsilon\pi} = -100x$$

$$\Sigma F = F + F_{\varepsilon\pi} = 1 + 90x - 100x = 1 - 10x$$

Κάνουμε το διάγραμμα της $\Sigma F = f(x)$ που είναι ευθεία.




$$x = 0 \Rightarrow \Sigma F = 1N$$

$$x = 0{,}1 \Rightarrow \Sigma F = 0$$

Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$W_{\Sigma F} = \frac{1 + 1 - 10x}{2}x \Rightarrow W_{\Sigma F} = (1 - 5x)x$$

$$\Delta K = 0 \Rightarrow (1 - 5x)x = 0 \Rightarrow x = 0{,}2m$$

Οπότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $\boldsymbol{A = 0,2m}$

**β.** Το έργο της δύναμης F μπορούμε να το υπολογίσουμε με δύο τρόπους

**Α τρόπος:** Με εμβαδομέτρηση από το διάγραμμα $F - x$

**Β τρόπος:** Το έργο της δύναμης ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης που θα κάνει το σώμα μετά την κατάργηση της.

$$W_F = E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2}kA^2 = \boldsymbol{2j}$$

γ. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\pi/2$ και η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\frac{rad}{s} \quad \kappa\alpha\iota \quad x = \boldsymbol{0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})}$$

**δ.** Στη θέση $x = 0{,}1m$ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Πριν την κατάργηση της δύναμης είναι : $\Sigma F = 0$

Μετά την κατάργηση της δύναμης είναι: $\Sigma F = -mg$

**ε.** $t = \pi/30$ είναι

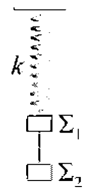
$$x = 0{,}2\eta\mu\left(10\frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2\eta\mu5\frac{\pi}{6} = 0{,}1m$$

Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος οπότε : $\Sigma F = mg = 10N$

Η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu5\frac{\pi}{6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\frac{dU}{dt} = -mg\upsilon = 10\sqrt{3}\frac{j}{s}$$




**4.34** Σώμα Σ1 μάζας $m_1 = 1kg$ είναι δεμένο στο ελεύθερο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k = 100N/m$, το πάνω άκρο του οποίου είναι σταθερά στερεωμένο στην οροφή. Μέσω αβαρούς, και μη ελαστικού νήματος δένουμε κάτω από το σώμα $\Sigma_1$ ένα δεύτερο σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2 = 3kg$. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί, ακίνητο, όπως δείχνει το σχήμα. Μετατοπίζουμε το σύστημα προς τα κάτω κατά $d$ δαπανώντας ενέργεια $E$ και κατόπιν το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί, χωρίς αρχική ταχύτητα, τη χρονική στιγμή $t = 0$. Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Αν η απόσταση $d$ είναι η μέγιστη απόσταση για την οποία το νήμα παραμένει τεντωμένο να βρείτε:

**α.** Την ενέργεια $E$ που δαπανήσαμε και ποιο είναι το ποσοστό αυτής της ενέργειας μεταφέρθηκε στο σώμα $\Sigma_1$.

**β.** Τη χρονική εξίσωση της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα $\Sigma_2$ και να κάνετε την γραφική της παράσταση ως τη στιγμή που κάθε σώμα έχει διανύσει διάστημα $3{,}2m$. Να πάρετε ως θετική φορά προς τα κάτω.

**γ.** Το ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος $\Sigma_2$ τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ισούται με τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης για πρώτη φορά.

**δ.** Την επιτάχυνση του σώματος $\Sigma_2$ όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

**ε.** Κάποια στιγμή που το σύστημα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του, κόβουμε το νήμα. Να βρεθεί το νέο πλάτος ταλάντωσης του $\Sigma_1$.

Δίνονται: $g = 10\, m/s^2$ και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Απ. [α.8j, 75% β. $30 + 30\eta\mu(5t + \pi/2)$, γ. $30\sqrt{3}j/s$, δ.$10m/s^2$ ε.0,7 $m$]

**Υπολογισμός της τάσης νήματος-πλάτους**

Όσο το νήμα είναι τεντωμένο τα σώματα κινούνται ως ένα σώμα μάζας $(m_1 + m_2)$, με επιτάχυνση.

$$\alpha = -\omega^2 x\,,\ \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

για το κάτω σώμα:

$$\Sigma F = m_2 a \Rightarrow m_2 g - T = -m_2\omega^2 x \Rightarrow T = m_2 g + m_2\omega^2 x$$

Στην ανώτερη θέση: $(x = -A\,,\ T = 0)$ έτσι βρίσκουμε το πλάτος.

**Λόγος Ενεργειών των δύο σωμάτων**

$$\frac{E_2}{E} = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_{max2}^2}{\frac{1}{2}m_1 v_{max1}^2} = \frac{m_2}{m_1}$$

**4.34 Λύση**

**α.** Όσο το νήμα είναι τεντωμένο τα σώματα κάνουν ίδια κίνηση ΑΑΤ

$$D = k \;,\quad \omega = \sqrt{k/m_1 + m_2} = 5\frac{rad}{s} \quad,\quad \alpha = -\omega^2 x$$

$$(m_1 + m_2)g = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = (m_1 + m_2)g/k = 0{,}4m$$

$$\Sigma F = m_2 a \Rightarrow -T + m_2 g = -m_2\omega^2 x \Rightarrow T = m_2 g + m_2\omega^2 x \Rightarrow T = 30 + 75x$$

Νήμα τεντωμένο: $T \geq 0 \Rightarrow 30 + 75x \geq 0 \Rightarrow 2 + 5x \geq 0 \Rightarrow x \geq -0{,}4m$

Η τελευταία πρέπει να ισχύει για κάθε επιτρεπτή τιμή του $x$ αρκεί να ισχύει για την μικρότερη τιμή του x δηλαδή για $x = -A$

$$-A \geq -0{,}4 \Rightarrow A \leq 0{,}4 \Rightarrow d \leq 0{,}4m \quad\Rightarrow\quad d = A = 0{,}4m \quad και \quad E = \frac{1}{2}kA^2 = \mathbf{8j}$$

Κάθε στιγμή η ενέργεια του Σ2 και η είναι:

$$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}D_2 x^2 = \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 x^2$$

Η ενέργεια που δαπανήσαμε είναι η ενέργεια ταλάντωσης του $(M + m)$

$$E = K + U = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2$$

$$\frac{E_2}{E} = \frac{m_2}{M} = \frac{3}{4} = \mathbf{75\%}$$

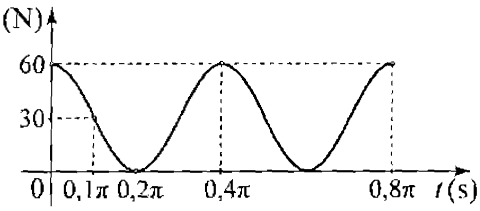
**β.** $T = 2\pi/\omega = 2\pi/5 = 0{,}4\pi$ και

$$x = 0{,}4\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$T = 30 + 75x$$

$$T = 30 + 75 \cdot 0{,}4\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{T = 30 + 30\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)}$$




**γ.** $U_{\tau\alpha\lambda} = U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = \pm x \Rightarrow \begin{cases} \Delta l_o + x = x \Rightarrow x = 0 \\ \Delta l_o + x = -x \Rightarrow x = -\dfrac{\Delta l_o}{2} = -0{,}2 \end{cases}$

Τότε η αλγεβρική τιμή της ταχύτητα είναι: $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\,\omega A\sqrt{3}/2 = \pm\sqrt{3}$

Την πρώτη φορά είναι: $v = -\sqrt{3}$ και: $dU_{\beta\alpha\rho}/dt = -m_2 g v = -30(-\sqrt{3}) = \mathbf{30\sqrt{3}j/s}$

**δ.** Όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος η απομάκρυνση είναι: $x = \Delta l_o = 0{,}4m$ τότε η τάση του νήματος είναι μηδέν και η συνισταμένη δύναμη στο σώμα μάζας $m_2$ είναι το βάρος του. Άρα η επιτάχυνση του είναι :

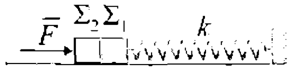
$$\alpha = g = 10m/s^2$$

**ε.** Μετά το κόψιμο του νήματος ξεκινά νέα ταλάντωση από ακραία θέση

Η νέα θέση ισορροπίας πήγε πιο πάνω κατά $d' = \Delta l_o - \Delta l_o' = m_2 g/k = 0{,}3m$

$$A' = A - d' = 0{,}4 + 0{,}3 = \mathbf{0,7m}$$

**4.35** Το ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,N/m$ στερεώνεται σε ακίνητο σημείο και στο άλλο δένεται σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 1kg$ το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Δίπλα στο σώμα Σ1 τοποθετούμε σώμα Σ2 μάζας σε επαφή με το Σ1 και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Μετακινούμε τα σώματα ώσπου το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά $\Delta l$ και τα συγκρατούμε ακίνητα ασκώντας οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 20N στο σώμα Σ2 όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ η δύναμη παύει να ασκείται και αρχίζει η κίνηση των σωμάτων. Βρείτε:




**α.** Την απόσταση που διανύουν τα σώματα ώσπου να αποχωριστούν.
**β.** Την χρονική εξίσωση ταχύτητας του Σ2 και κάντε την γραφική της παράσταση.
**γ.** Την απόσταση των σωμάτων όταν το Σ1 ακινητοποιηθεί για πρώτη φορά.
**δ.** Αν το σώμα Σ2 ήταν τοποθετημένο πάνω στο σώμα Σ1,βρείτε:
**i.** Την εξίσωση της αλγεβρικής τιμής της στατικής τριβής που δέχεται το σώμα Σ2 σε συνάρτηση με την απομάκρυνση και να κάνετε την γραφική της παράσταση αν δεν χάνεται η επαφή μεταξύ των σωμάτων.
**ii.** Την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής ώστε τα σώματα να μην αποχωρίζονται.

Απ. [α. β. $0{,}2m$ , $1 \cdot συν\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$, γ. $5{,}7cm$, δ. i. $T_s = -75x$, ii. $\mu_{σελ} = 0{,}5$]



**Αποχωρισμός Σωμάτων**

Όσο τα σώματα είναι σε επαφή κινούνται ως ένα σώμα με επιτάχυνση $\alpha = -\omega^2 x$.
Η δύναμη επαφής που δέχεται το σώμα μάζας $m_2$ έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και το μέτρο της είναι Ν και το υπολογίζουμε με θεμελιώδη νόμο.

$$\Sigma F = m_2 a \Rightarrow -N = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow N = m_2 \omega^2 x$$

Όταν χαθεί η επαφή τότε η δύναμη επαφής $N$ μηδενίζεται και έτσι βρίσκουμε ότι τα χώματα αποχωρίζονται στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

**Μη ολίσθηση σώματος**

Όσο δεν έχουμε ολίσθηση του Σ2 ως προς το Σ1 τα σώματα κινούνται ως ένα σώμα με επιτάχυνση

$$\alpha = -\omega^2 x$$

Από θεμελιώδη νόμο στο Σ2 βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής:

$$\Sigma F = m_2 a \Rightarrow T_s = -m_2 \omega^2 x$$

Μη ολίσθηση όταν το μέτρο της στατικής τριβής είναι μικρότερο της οριακής τριβής.

$$|T_s| \le \mu_s N \Rightarrow m_2 \omega^2 |x| \le \mu_s N$$

Αρκεί η τελευταία πρέπει να ισχύει και για την μεγαλύτερη τιμή του $|x|$

$$m_2 \omega^2 A \le \mu_s N$$

**4.35 Λύση**

**α.** Αρχικά τα σώματα ισορροπούν: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = F/k = 0{,}2m$

Όσο τα σώματα είναι σε επαφή κινούνται σαν ένα σώμα μάζας $M = m_1 + m_2 = 4kg$ που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας την θέση φυσικού μήκους , πλάτους $A = \Delta l = 0{,}2m$, Σταθερά επαναφοράς $D = k = 100N/m$, $\omega = \sqrt{k/M} = 5rad/s$ και έχουν επιτάχυνση $\alpha = -\omega^2 x$ και αρχική φάση $\pi/2$ .Η μόνη οριζόντια δύναμη στο Σ2 είναι η δύναμη επαφής $\vec{N}$ και έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και το μέτρο της είναι $N$. Από τη θεμελιώδη εξίσωση για το σώμα Σ2 έχουμε:

$$\Sigma F = m_2 a \Rightarrow -N = -m\omega^2 x \Rightarrow N = m\omega^2 x$$

Αποχωρισμός σωμάτων όταν $N = 0 \Rightarrow x = 0$. Δηλαδή τα σώματα αποχωρίζονται στην θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου σε απόσταση $\boldsymbol{d = \Delta l = 0{,}2m.}$

**β.** Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος $M$ είναι: $T = 2\pi/\omega = 2\pi/5 = 0{,}4\pi$

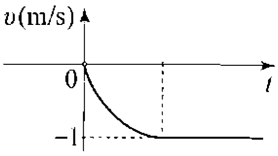
Ο αποχωρισμός γίνεται τη στιγμή $t_1 = T/4 = 0{,}1\pi$ και τότε τα σώματα έχουν ταχύτητα

$$\upsilon_1 = -\omega A = -5 \cdot 0{,}2 = -1m/s$$

Η εξίσωση της ταχύτητας ως τη στιγμή $t_1$ είναι:

$$\upsilon = |\upsilon_1| \sigma\upsilon\nu(\omega t + \pi/2) = \boldsymbol{1 \cdot \sigma\upsilon\nu(5t + \pi/2)}$$

Μετά την $t_1$ το σώμα Σ2 κινείται με $\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} = \upsilon_1$.

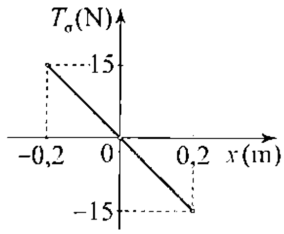



**γ.** Μετά τον αποχωρισμό των σωμάτων το σώμα Σ1 κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{max} = 1m/s$ , γωνιακή συχνότητα $\omega' = 10rad/s$ , περίοδο $T = 0{,}2\pi$ και πλάτος $A'$. $\upsilon_{max} = \omega' A' \Rightarrow A' = \upsilon_{max}/\omega' = 1/\omega' = 0{,}1m$. Από τη στιγμή του αποχωρισμού ως τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του Σ1 περνάει χρονικό διάστημα $\Delta t = T'/4 = \pi/20\, s$. Τα σώματα έχουν διανύσει αποστάσεις:

$$s_1 = A' = 0{,}1m \,, s_2 = |\upsilon_1|\Delta t = 1 \cdot \frac{\pi}{20} = 0{,}05\pi = 0{,}157m$$

Η απόσταση των σωμάτων θα είναι: $d = 0{,}157 - 0{,}1 = 0{,}057m = \boldsymbol{5{,}7cm}$

**δ.** Όταν το σώμα Σ2 είναι πάνω στο Σ1 η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο Σ2 είναι η στατική τριβή. Όσο τα σώματα δεν αποχωρίζονται κινούνται σαν ένα σώμα μάζας $M = m_1 + m_2 = 4kg$ που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. με θέση ισορροπίας την θέση φυσικού μήκους , πλάτους $A = \Delta l = 0{,}2m$, Σταθερά επαναφοράς $D = k = 100N/m$, γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{k/M} = 5rad/s$ , επιτάχυνση $\alpha = -\omega^2 x$ και αρχική φάση $\pi/2$ . Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για το σώμα Σ2



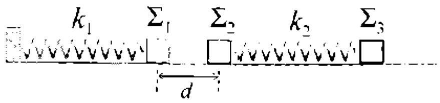

$$T_s = m_2 a \Rightarrow T_s = -m_2\omega^2 x = -75x$$

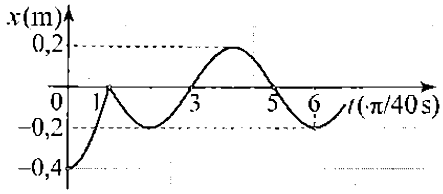
Για να μην αποχωρίζονται τα σώματα πρέπει:

$$|T_s| \le \mu_s N \Rightarrow m_2\omega^2|x| \le \mu_s m_2 g \Rightarrow \omega^2|x| \le \mu_s g$$

Αρκεί να ισχύει για την μεγαλύτερη τιμή που είναι $A$

$$\omega^2 A \le \mu_s g \Rightarrow \mu_s \ge \frac{\omega^2 A}{g} \Rightarrow \mu_s \ge \frac{25 \cdot 0{,}2}{10} \Rightarrow \mu_s \ge 0{,}5 \Rightarrow \boldsymbol{\mu_{s\varepsilon\lambda} = 0{,}5}$$




**4.36.** Στο σχήμα το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Τα σώματα $\Sigma_1$, $\Sigma_3$ έχουν μάζες $m_1 = m_3 = 1$ kg. Το δεξί ελατήριο έχει σταθερά $k_2 = 100$ N/m και βρίσκεται στο φυσικό του μήκος με τα $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ δεμένα στα άκρα του. Το αριστερό ελατήριο έχει σταθερά $k_1$ και συγκρατείται συσπειρωμένο κατά $d = 0{,}4$ m, με το $\Sigma_1$ δεμένο στο ένα άκρο του. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σώμα $\Sigma_1$ το οποίο κινείται προς τα δεξιά και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ2. Η απομάκρυνση του $\Sigma_1$ από τη θέση ισορροπίας μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με το διάγραμμα του διπλανού σχήματος. Βρείτε:

**α.** Την σταθερά του αριστερού ελατηρίου $k_1$.

**β.** Την μάζα $m_2$ του σώματος $\Sigma_2$ και την ταχύτητα του αμέσως μετά την κρούση.

**γ.** Την μέγιστη παραμόρφωση (συσπείρωση) του ελατηρίου σταθεράς $k_2$.

**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της ορμής του $\Sigma_3$ τη στιγμή που το $\Sigma_2$ έχει ταχύτητα 2 m/s.

**ε.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ1 όταν αποκτήσει για πρώτη φορά απομάκρυνση $x = 0{,}1m$.

Απ. [α. $400N/m$, β. $3kg, 4m/s$ , γ. $0{,}2\sqrt{3}$m, δ. 0, ε. $-20\sqrt{3}j/s$]

**Ταχύτητα σώματος στην θέση ισορροπίας**

Το μέτρο της ταχύτητας στην θέση ισορροπίας είναι ίσο με $\omega A$. Το πρόσημο της ταχύτητας είναι θετικό αν αμέσως μετά αποκτά θετική απομάκρυνση

$$\Delta x > 0 \Rightarrow \upsilon > 0 \ , \qquad \Delta x < 0 \Rightarrow \upsilon < 0$$

**Μέγιστη συσπείρωση ελατηρίου**

Η συσπείρωση του ελατηρίου $k_2$ είναι μέγιστη όταν τα σώματα Σ2 και Σ3 αποκτούν ίσες ταχύτητες

$$\Delta l = (max) \quad όταν \quad u_1 = u_2 = u$$

Η $U_{\varepsilon\lambda}$ είναι μέγιστη όταν η απόσταση των σωμάτων είναι ελάχιστη.

**Ρυθμός μεταβολής Ορμής**

Ο ρυθμός μεταβολής των σωμάτων $\Sigma_2$ και $\Sigma_3$ έχει αλγεβρική τιμή ίση με την αλγεβρική τιμή της δύναμης που δέχονται τα σώματα από το ελατήριο.

$$F_3 = -k\Delta l$$

Την παραμόρφωση $\Delta l$ την βρίσκουμε αν εφαρμόσουμε ΑΔΟ και ΑΔΜΕ

**Σχέση ταχύτητας απομάκρυνσης**

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

**4.36 Λύση**

**α.** Πριν την κρούση το Σ1 κάνει ΑΑΤ με πλάτος $A = 0{,}4m$. Από το σχήμα

$$\frac{T}{4} = 1\frac{\pi}{40} \Rightarrow T = 0{,}1\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20rad/s$$

Φτάνει στην ΘΦΜ με ταχύτητα: $\upsilon_1 = \omega A = 20 \cdot 0{,}4 = 8m/s$

$$k_1 = m_1\omega^2 = \boldsymbol{400N/m}$$

**β.** Μετά την κρούση το Σ1 θα κάνει ΑΑΤ με ίδια συχνότητα και πλάτος $A' = A/2$ και αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα $\upsilon_2' = -\omega A' = -4m/s$

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_1 + m_2 = 2m_2 - 2m_1 \Rightarrow m_2 = 3m_1 = \boldsymbol{3kg}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{1}{2}\upsilon_1 = \boldsymbol{4m/s}$$

**γ.** Η συσπείρωση του ελατηρίου σταθεράς $k_2$ είναι μέγιστη όταν οι ταχύτητες των Σ2 και Σ3 γίνουν ίσες $u_2 = u_3 = u$. Για το σύστημα Σ2-ελατήριο2-Σ3 ισχύει ΑΔΟ και ΑΔΜΕ

$$A\Delta O: \ m_2\upsilon_2' = (m_2 + m_3)u \Rightarrow u = \frac{m_2}{m_2 + m_3}\upsilon_2' = \frac{3m_1}{3m_1 + m_1}\upsilon_2' = \frac{3}{4}4 = 3m/s$$

$$A\Delta ME: \quad \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)u^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta l^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}3 \cdot 16 = \frac{1}{2}4 \cdot 9 + \frac{1}{2}100\Delta l^2 \Rightarrow 24 - 18 = 50\Delta l^2 \Rightarrow \Delta l^2 = \frac{12}{100} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta l = 0{,}2\sqrt{3}}$$

**δ.** Από ΑΔΟ βρίσκουμε

$$m_2\upsilon_2' = m_2V_2 + m_3V_3 \Rightarrow 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot V_3 \Rightarrow V_3 = 6m/s$$

$$A\Delta ME: \quad \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \frac{1}{2}m_3V_3^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta l^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}3 \cdot 16 = \frac{1}{2}3 \cdot 4 + \frac{1}{2}1 \cdot 36 + \frac{1}{2}k_2\Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = 0$$

Άρα το ελατήριο $k_2$ έχει αποκτήσει το φυσικό μήκος οπότε και για τα δύο σώματα

$$\frac{dP}{dt} = \boldsymbol{0}$$

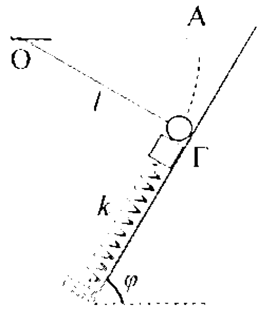
**ε.** Το σώμα Σ1 αποκτά θετική απομάκρυνση μετά την κρούση

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = -k_1x\upsilon$$

Την ταχύτητα την βρίσκουμε από τη σχέση :

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\frac{\omega A\sqrt{3}}{2} = \pm 2\sqrt{3}$$

Θα επιλέξουμε τη θετική τιμή $\frac{dK}{dt} = -100 \cdot 0{,}1 \cdot 2\sqrt{3} = \boldsymbol{-20\sqrt{3}j/s}$




**4.37** Το ένα άκρο μη ελαστικού νήματος μήκους $l = 1{,}6m$ είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο Ο , στο άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένη σφαίρα $\Sigma_1$ μάζας $m$ και αρχικά συγκρατούμε το σώμα στη θέση Α ώστε το νήμα να είναι οριζόντιο. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σώμα και όταν η γωνιακή μετατόπιση του σώματος γίνει $30^o$ το σώμα συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ένα σώμα $\Sigma_2$ μάζας $M = 1kg$ που ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 60^o$ δεμένος στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,N/m$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά την κρούση το σώμα $\Sigma_2$ διανύει διάστημα $x = 0{,}4m$ μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά. Βρείτε:

**α.** Την ταχύτητα του σώματος $\Sigma_2$ μετά την κρούση και την μάζα της σφαίρας $\Sigma_1$

**β.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας λίγο πριν την κρούση.

**γ.** Την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση

**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος όταν το μέτρο της ταχύτητας του γίνει για πρώτη φορά ίσο με $2m/s$.

**ε.** Το λόγο $L_\Gamma/L_K$ όπου $L_\Gamma$ η στροφορμή της σφαίρας $\Sigma$ ως προς το Ο λίγο πριν την κρούση και $L_K$ η στροφορμή της σφαίρας όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο για πρώτη φορά.

Απ.[α. $4m/s$, $1kg$, β. $20\sqrt{3}j/s$, γ. $5N$, δ. $-40\sqrt{3}j/s$, ε. 1] 

**Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας σώματος που κάνει κυκλική κίνηση**

Από το θεώρημα έργου ενέργειας :

$$\Delta K = W_{\Sigma F} = \Sigma W$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = \frac{dW_w + dW_T}{dt}$$

Η τάση του νήματος είναι κάθετη στη μετατόπιση και το έργο της είναι μηδέν έτσι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_w}{dt}$$

Το βάρος αναλύεται σε δύο συνιστώσες (ακτινική και εφαπτομενική)

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{w\alpha\kappa\tau} + dw_{\varepsilon\varphi}}{dt}$$

Το έργο της ακτινικής συνιστώσας είναι μηδέν και έτσι καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dw_{\varepsilon\varphi}}{dt}$$

**4.37 Λύση**

**α.** Θα υπολογίσουμε αρχικά την ταχύτητα του σώματος Σ1 λίγο πριν την κρούση.

$$ΘΜΚΕ: \quad 1/2\, m v^2 - 0 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\, l/2} = \sqrt{gl} = \mathbf{4m/s}$$

Το $M$ μετά την κρούση κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}4m$ και γωνιακής συχνότητας: $\omega = \sqrt{k/M} = 10rad/s$

Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας Μ είναι στην θέση ισορροπίας και έχει ταχύτητα V της οποίας το μέτρο είναι ίσο με την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης.

$$V = \omega A = 10 \cdot 0{,}4 = \mathbf{4m/s}$$

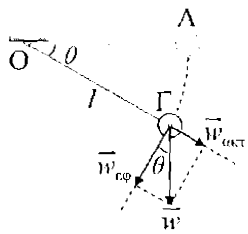
Παρατηρούμε ότι έγινε ανταλλαγή ταχυτήτων οπότε οι μάζες $m$ και $M$ είναι ίσες.

$$\boldsymbol{m = M = 1kg}$$

**β.** $\Delta K = W_{\Sigma F} = \Sigma W \;\; οπότε \;\; \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{dW_{ολ}}{dt} = \dfrac{dW_w + dW_T}{dt} = \dfrac{dW_w}{dt}$

Μπορούμε να αναλύσουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες

Την ακτινική και την εφαπτομενική συνιστώσα




$$w_{ακτ} = mg\eta\mu\theta \quad, w_{εφ} = mg\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{wακτ} + dw_{εφ}}{dt}$$

Το έργο της ακτινικής συνιστώσας είναι μηδέν και έτσι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dw_{εφ}}{dt} = mg\sigma\upsilon\nu\theta\frac{ds}{dt} = mg\sigma\upsilon\nu\theta v = 10\frac{\sqrt{3}}{2}4 = \mathbf{20\sqrt{3}j/s}$$

**γ.** Αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα της σφαίρας είναι μηδέν. Η τάση του νήματος έχει ακτινική διεύθυνση:

$$\Sigma F_{ακτ} = mv^2/l \Rightarrow T - w_{ακτ} = 0 \Rightarrow T = w_{ακτ} = mg\eta\mu\theta = \mathbf{5N}$$

**δ.** Το σώμα μετά την κρούση κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με μέγιστη ταχύτητα

$$V_{max} = 4m/s$$

Όταν το μέτρο της ταχύτητας γίνει για πρώτη φορά $v = V_{max}/2$ το σώμα θα κινείται προς τα κάτω και θα έχει απομάκρυνση $x$. Τα $v, x$ έχουν ίδιο πρόσημο.

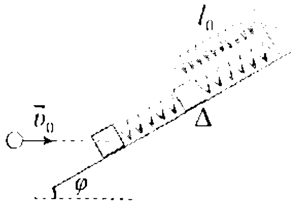
$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow A^2 - x^2 = \frac{v^2}{\omega^2} \Rightarrow x^2 = A^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$|x| = \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} = \sqrt{A^2 - \frac{(\frac{\omega A}{2})^2}{\omega^2}} = \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} = \frac{A\sqrt{3}}{2} = 0{,}2\sqrt{3}m$$

$$dK/dt = \Sigma F \cdot v = -kxv = -100 \cdot 2 \cdot 0{,}2\sqrt{3} = \mathbf{-40\sqrt{3}j/s}$$

**ε.** Όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο η σφαίρα έχει αποκτήσει ταχύτητα $u$ την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε αν εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ.

$$u = \sqrt{2g\, l/2} = \sqrt{gl} = \frac{2m}{s} \;\; και\; έτσι \;\; \frac{L_\Gamma}{L_K} = \frac{mvl}{mul} = \mathbf{1}$$




**4.38** Ελατήριο σταθεράς $k = 200N/m$ είναι παράλληλο σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 30^o$ και έχει το ανώτερο άκρο του στερεωμένο. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και στο ελεύθερο άκρο του Δ στερεώνουμε σώμα μάζας $M = 2kg$ το οποίο τη στιγμή $t_o = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί προς την αρνητική κατεύθυνση. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}1\pi s$ το σώμα μάζας $M$ συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας $m = 2kg$ που έχει λίγο πριν την κρούση οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_o = 4\sqrt{3}\,m/s$. Υπολογίστε:

**α.** Την φάση της ταλάντωσης του σώματος τη στιγμή $t_1$ και το διάστημα που διάνυσε το σώμα ως τη στιγμή $t_1$.

**β.** Την ταχύτητα του συσσωματώματος και το ποσοστό μείωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος εξ αιτίας της κρούσης.

**γ.** Την μεταβολή της ορμής του συστήματος εξ αιτίας της κρούσης.

**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

**ε.** Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Απ. [α. $3\pi/2$, $0{,}1m$, β. $V = 3m/s$ , 37,5%, γ. $|\Delta p| = 4\sqrt{3}\frac{kgm}{s}$ , δ. $120j/s$, $0{,}3\sqrt{2}m$]



**Φάση ταλάντωσης**

Η φάση μιας ταλάντωσης είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου (αύξουσα)

$$\varphi = \omega t + \varphi_o$$

Η αρχική φάση παίρνει τιμές: $0 \le \varphi_o, 2\pi$

Όταν το σώμα ξεκινά από ακραία θέση τότε η αρχική φάση μπορεί να είναι

$$\varphi_o = \pi/2$$

Αν θεωρήσουμε την αρχική απομάκρυνση ίση με $+A$

Η μεταβολή της φάσης είναι πάντα θετική. $\Delta\varphi = \omega\Delta t$

**Ρυθμός μεταβολής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας σώματος το οποίο κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο.**

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -\frac{dW_w}{dt} = -\frac{dW_{wx}}{dt}$$

**Μεταβολή Ορμής σε μια κρούση**

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_x + \Delta\vec{p}_y$$

Αν μετά την κρούση τα σώματα είναι ελεύθερα να κινηθούν μόνο στον άξονα $x'x$ :

$$\Delta\vec{p}_x = 0$$

**4.38 Λύση**

**α.** Το σώμα ξεκινάει από ακραία θέση και η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\varphi_o = \pi/2$.

$$\textit{Θέση ισορροπίας:}\ \ k\Delta l = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \Delta l = \frac{Mg\,\eta\mu\varphi}{k} = \frac{Mg\,\eta\mu\varphi}{k} = \frac{20}{200}\frac{1}{2} = \frac{1}{20}m$$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta l = 1/20\,m = 0{,}05m$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \sqrt{k/M} = 10rad/s$
Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι: $y = A\eta\mu(10t + \pi/2)$
Η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $T = 2\pi/\omega = 2\pi/10 = 0{,}2\pi$
$t_1 = 0{,}1\pi = T/2$ οπότε η φάση της ταλάντωσης έχει αυξηθεί κατά $\Delta\varphi = \pi$

$$\varphi = 10t_1 + \pi/2 = \pi + \pi/2 = \boldsymbol{3\pi/2}$$

Το σώμα έχει διανύσει διάστημα ίσο με $2A$: $s = 2A = \boldsymbol{0,1m}$

**β.** Η ταχύτητα του σώματος μάζας $M$ λίγο πριν την κρούση είναι μηδέν. Παίρνουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$.

$$\upsilon_{ox} = \upsilon_o\sigma\upsilon\nu\varphi = 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2 = 6m/s$$

Η ορμή στον άξονα $x'x$ διατηρείται: $m\upsilon_{ox} = 2mV \Rightarrow V = \upsilon_{ox}/2 = \boldsymbol{3m/s}$

$$K_{\pi\rho} = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = 48j$$

Η κινητική ενέργεια μετά την κρούση είναι: $K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}2mV^2 = 18j$

$$\frac{\Delta K}{K_{\pi\rho}} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8} = \mathbf{37,5\%}$$

**γ.** Η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός διότι η ορμή δεν διατηρείται και στους δύο άξονες:

$$\Delta p_x = 0 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \Delta p_y = 0 - m\upsilon_{oy} = -m\upsilon_o\eta\mu\varphi = -2\cdot 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = -4\sqrt{3}kgm/s$$

Η μεταβολή της ορμής έχει την διεύθυνση του $y'y$ και μέτρο: $|\Delta p| = \boldsymbol{4\sqrt{3}\,kgm/s}$

**δ.** $$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_W}{dt} = -\frac{dW_{Wx}}{dt} = -\frac{-2mgdx}{dt} = 2mgV = \boldsymbol{120j/s}$$

**ε.** Στην θέση της κρούσης η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι: $\Delta l = 2A = 0{,}1m$
Στην θέση ισορροπίας του συσσωματώματος έχουμε:

$$2mg\eta\mu\varphi = k\Delta l' \Rightarrow \Delta l' = 2\frac{mg\eta\mu\varphi}{k} = 0{,}1m$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι $\omega'$

$$\omega' = \sqrt{k/2m} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}rad/s$$

Έτσι το συσσωμάτωμα όταν αρχίζει να ταλαντώνεται βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και η ταχύτητα του θα είναι:

$$V = \omega'A' \Rightarrow A' = V/\omega' = 3/5\sqrt{2} = \boldsymbol{0,3\sqrt{2}m}$$

**4.39** Ένα σώμα μάζας $m = 4kg$ ηρεμεί στο κάτω άκρο Ο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta l_o = 0{,}4m$. Πάμε το σώμα, στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και τη στιγμή $t_o = 0$ το αφήνουμε να κινηθεί. Κάποια στιγμή $t_1$ το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell = 0{,}5m$ και το σώμα κινείται προς τα κάτω, έχοντας ταχύτητα μέτρου $1m/s$. Αν η αντίσταση του αέρα είναι της μορφής $F' = -0{,}4\upsilon$, βρείτε:

**α.** Σε πόση απόσταση από την αρχική θέση θα σταματήσει το σώμα και ποια η αύξηση της θερμικής ενέργειας ώσπου να σταματήσει το σώμα.

**β.** Το έργο της δύναμης απόσβεσης από $t_o$ έως τη στιγμή $t_1$

Τη χρονική στιγμή $t_1$ υπολογίστε:

**γ.** Το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος.

**δ.** Το λόγο των ρυθμών μεταβολής κινητικής και δυναμικής ενέργειας του σώματος.

**ε.** Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Δίνεται $g = 10m/s^2$ και θετική φορά προς τα πάνω.

Διονύσης Μάργαρης

Απ. [α. $0{,}4m$ $8j$, β. $-5{,}5j$, γ.$a = 2{,}6m/s^2$ δ. $1{,}04$, ε. $30j/s$]

**Απομάκρυνση Φθίνουσας Ταλάντωσης**

Την απομάκρυνση $x$ στην φθίνουσα ταλάντωση την μετράμε από την τελική θέση ισορροπίας του σώματος. Το σώμα όταν σταματήσει δεν θα δέχεται δύναμη αντίστασης αφού η ταχύτητα του θα είναι μηδέν και η τελική θέση ισορροπίας είναι η θέση στην οποία $F_{\varepsilon\pi} = 0$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg = 0 \Rightarrow k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

**Έργο της δύναμης απόσβεσης**

Το έργο της δύναμης απόσβεσης εκφράζει την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του σώματος αφού είναι η μόνη μη συντηρητική δύναμη.

$$W_{\alpha\nu\tau} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} - E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)}$$

Η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας

$$E_{\mu\eta\chi} = K + U$$

**Ενεργειακοί Ρυθμοί Μεταβολής**

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σε κάθε ταλάντωση (απλή , φθίνουσα ή εξαναγκασμένη) είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F\varepsilon\pi}}{dt} = -F_{\varepsilon\pi}\upsilon = -(-kx)\upsilon = kx\upsilon$$

**Προσοχή!** Οι ρυθμοί μεταβολής κινητικής και δυναμικής ενέργειας δεν είναι αντίθετοι στην φθίνουσα και την εξαναγκασμένη ταλάντωση όπως συμβαίνει στην απλή αρμονική ταλάντωση.

**4.39 Λύση**

**α.** Το σώμα θα σταματήσει οριστικά στην θέση ισορροπίας $x = 0$. Άρα σε απόσταση

$$d = \Delta l_o = \mathbf{0,4m}$$

Στην θέση ισορροπίας είναι:

$$k\Delta l_o = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta l_o} = 100N/m$$

Η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$E_o = \frac{1}{2}kA_o^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0{,}4^2 = \mathbf{8j}$$

Και τελικά μετατρέπεται όλη σε θερμότητα. $Q_{ολ} = E_o = 8j$

**β.**

$$W_{αντ} = E_{μηχ(τελ)} - E_{μηχ(αρχ)}$$

$$E_{μηχ(o)} = E_o = 8j$$

Τη στιγμή $t_1$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $x_1$

$$x_1 = -0{,}1m$$

$$E_{μηχ(1)} = E_1 = U_1 + K_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}100\frac{1}{100} + \frac{1}{2}4 \cdot 1 = 2{,}5j$$

$$W_{αντ} = 2{,}5 - 8 = \mathbf{-5,5j}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι ίσος με την επιτάχυνση του σώματος.
Η συνισταμένη της ελατηριακής δύναμης και του βάρους αποτελεί την δύναμη επαναφοράς οπότε θα είναι:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{ελ} - w + F_{αντ} = ma \Rightarrow -kx - bv = ma \Rightarrow$$

$$-100 \cdot (-0{,}1) - 0{,}4 \cdot (-1) = 4a \Rightarrow$$

$$10 + 0{,}4 = 4a \Rightarrow \mathbf{a = 2,6m/s^2}$$

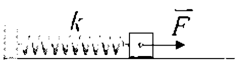
**δ.**

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = (-kx - bv)v = -kxv - bv^2 = -10 - 0{,}4 \cdot 1^2 = -10{,}4j/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{Fεπ}}{dt} = -F_{επ}v = -(-kx)v = kxv = 100 \cdot (-0{,}1) \cdot (-1) = 10j/s$$

$$\frac{dK/dt}{dU/dt} = \mathbf{1,04}$$

**ε.** $\frac{dU_{ελ}}{dt} = -\frac{dW_{Fελ}}{dt} = -F_{ελ}v = -k(\Delta l_o + x)v = -mgv - kxv = 40 - 10 = \mathbf{30j/s}$




**4.40** Ένα σώμα μάζας $m = 1kg$ βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 144\frac{N}{m}$ που το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Το σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση οριζόντιας εξωτερικής αρμονικής δύναμης ενώ η αντίσταση του αέρα είναι της μορφής $F' = -\frac{\sqrt{3}}{4}\upsilon$ . Αν η απομάκρυνση του σώματος είναι της μορφής $x = 0{,}4 \cdot \eta\mu 10t$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \pi/12s$ βρείτε:

**α.** Το ρυθμό παραγωγής θερμότητας.
**β.** Την δυναμική και την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης.
**γ.** Το ρυθμό της προσφερόμενης ενέργειας από την εξωτερική δύναμη.
**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του σώματος.
**ε.** Την τιμή του λ στην σχέση: $\frac{dU}{dt} = \lambda\frac{dK}{dt}$ και πόσο πρέπει να μεταβάλλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη ώστε το λ να γίνει ίσο με $-1$

Απ. [α. $3\sqrt{3}j/s$, β. $2{,}88j$, $6j$, γ. $-14{,}6\sqrt{3}j/s$, δ. $-17{,}6j/s$, ε. $-1{,}44$, $1/\pi$]

**Θεμελιώδης νόμος σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση**

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_{\varepsilon\pi} = ma \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\xi} + F_{\alpha\nu\tau} - kx = ma \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} + F_{\alpha\nu\tau} - m\omega_o^2 x = -m\omega^2 x$$

Αν έχουμε συντονισμό τότε είναι $\omega = \omega_o$ και η τελευταία γράφεται:

$$F_{\varepsilon\xi} + F_{\alpha\nu\tau} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = -F_{\alpha\nu\tau} \Rightarrow dW_{F_{\varepsilon\xi}} = -dW_{\alpha\nu\tau}$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι κατά το συντονισμό θα ισχύει:

$$\frac{dE_{\pi\rho o\sigma\varphi\varepsilon\rho}}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Η σχέση $E_{\pi\rho o\sigma\varphi(T)} = Q_{(T)}$ Ισχύει για κάθε συχνότητα

**Μεταβολή μηχανικής ενέργειας**

Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας οφείλεται στις μη συντηρητικές δυνάμεις που είναι η δύναμη απόσβεσης $F' = b\upsilon$ αλλά και η εξωτερική διεγείρουσα δύναμη.

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW_{F\varepsilon\xi}}{dt} + \frac{dW_{F\alpha\nu\tau}}{dt} + \frac{dW_{F\varepsilon\pi}}{dt} - \frac{dW_{F\varepsilon\pi}}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = \frac{dW_{F\varepsilon\xi}}{dt} + \frac{dW_{F\alpha\nu\tau}}{dt} = \frac{dW_{\mu\eta\ \sigma\upsilon\nu\tau\eta\rho\eta\tau\iota\kappa\acute{\omega}\nu}}{dt}$$

**4.40 Λύση**

**α.** Η θερμότητα εκφράζεται μέσω του έργου της δύναμης αντίστασης $F_{αντ} = -bυ$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{|dW_{αντ}|}{dt} = \left|\frac{F_{αντ}dx}{dt}\right| = |-bυυ| = bυ^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot υ^2$$

Είναι: $x = 0{,}4 \cdot ημ10t$ και τη χρονική στιγμή $t = t_1$ προκύπτει:

$$x = 0{,}4ημ10\frac{\pi}{12} = 0{,}4ημ\frac{5\pi}{6} = 0{,}4\frac{1}{2} = 0{,}2m$$

Ταχύτητα ταλάντωσης: $υ = ωΑσυν10t = 10 \cdot 0{,}4συν10t = 4συν10t$

Την $t = t_1$ είναι: $υ = υ_1 = 4συν10\frac{\pi}{15} = 4συν\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2\sqrt{3}m}{s}$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{3\sqrt{3}j/s}$$

β. $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}144\frac{4}{100} = \mathbf{2{,}88j}$ και $K = \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 12 = \mathbf{6j}$

**γ.** Την στιγμή $t_1$ το σώμα έχει επιτάχυνση: $α = -ω^2x = -100 \cdot 0{,}2 = -20\,m/s^2$
Από το θεμελιώδη νόμο θα υπολογίσουμε την εξωτερική δύναμη εκείνη τη στιγμή.

$$ΣF = mα \Rightarrow F_{εξ} + F_{αντ} + F_{επ} = mα \Rightarrow$$

$$F_{εξ} - bυ - kx = mα \Rightarrow F_{εξ} = bυ + kx + mα \Rightarrow$$

$$F_{εξ} = bυ + kx + mα = \sqrt{3}/4\left(-2\sqrt{3}\right) + 144 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot (-20) \Rightarrow$$

$$F_{εξ} = -1{,}5 + 28{,}8 - 20 = 7{,}3N$$

$$\frac{dE_{πρ}}{dt} = F_{εξ}υ = 7{,}3\left(-2\sqrt{3}\right) = \mathbf{-14{,}6\sqrt{3}j/s}$$

**δ.** Η μεταβολή μηχανικής ενέργειας ισούται με το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων. Μη συντηρητικές δυνάμεις είναι η Διεγείρουσα δύναμη και η δύναμη αντίστασης.

$$\frac{dE_{μηχ}}{dt} = \frac{dW_{μη\ συντ}}{dt} = \frac{dW_{Fεξ}}{dt} + \frac{dW_{Fαντ}}{dt} = -14{,}6\sqrt{3}\frac{j}{s} - 3\sqrt{3}\frac{j}{s} = \mathbf{-17{,}6j/s}$$

**ε.** $\frac{dK}{dt} = mαυ = 40\sqrt{3}\frac{j}{s}$ $\quad \frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{Fεπ}}{dt} = Dxυ = -57{,}6\sqrt{3}j/s$

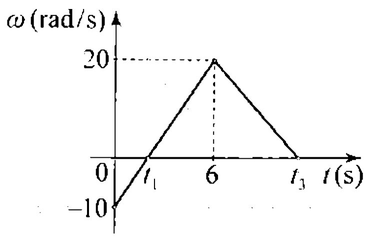
$$\frac{dU}{dt} = λ\frac{dK}{dt} \Rightarrow Dxυ = λmαυ \Rightarrow mω_o^2xυ = -λmω^2xυ \Rightarrow ω_o^2 = -λω^2 \Rightarrow$$

$$λ = -\frac{ω_o^2}{ω^2} = -\left(\frac{12}{10}\right)^2 = \mathbf{-1{,}44}$$

$$λ = -1 \Rightarrow -\frac{ω_o^2}{ω^2} = -1 \Rightarrow ω^2 = ω_o^2 \Rightarrow ω = ω_o = \sqrt{k/m} = 12rad/s$$

$$Δω = 2\frac{rad}{s} \Rightarrow 2\pi Δf = 2 \Rightarrow \boldsymbol{Δf = \frac{1}{\pi}Hz}$$

## ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ




**4.41** Ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $l = 3$ m και μάζας $M$ βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το ένα άκρο της Α. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως δείχνει το διάγραμμα. Ο συνολικός αριθμός περιστροφών της ράβδου μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3$ είναι $N = 100/2\pi$. Βρείτε:

**α.** Τη χρονική στιγμή $t_1$ μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα.

**β.** Τη γωνιακή μετατόπιση της ράβδου στο τελευταίο δευτερόλεπτο.

**γ.** Το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή $t_2 = 5$ s.

**δ.** Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή $t_1$ και τη χρονική στιγμή $t_2$.

**ε.** Τη γωνιακή μετατόπιση της ράβδου όταν έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10$ rad/s.

**Απ.[α.** $t_1 = 2$ s, **β.** 2 rad, **γ.** 7,5 m/s$^2$, **δ.** 0, 337,5m/s$^2$, **ε.** = 0 ή 67,5 m]

**Υπολογισμοί από το διάγραμμα ω-t**

Από το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου μπορούν να προκύψουν.

- **είδος της κίνησης**
- **Η αλγεβρική τιμή της γωνιακή επιτάχυνσης.**

Αν η κλίση είναι σταθερή τότε η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή και ισούται με την μέση γωνιακή επιτάχυνση

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

- **Η γωνιακή μετατόπιση** η οποία υπολογίζεται ως εμβαδόν.

**Αριθμός Περιστροφών**

Σε κάθε περιστροφή η γωνιακή μετατόπιση είναι ίση με $2\pi$

Αν το στερεό εκτελέσει Ν περιστροφές η γωνιακή μετατόπιση είναι:

$$\Delta\theta = N2\pi \Rightarrow N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

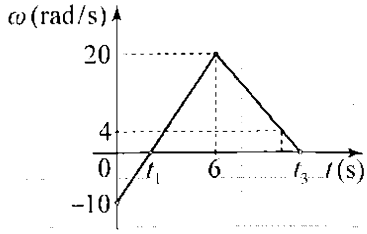
**Εξισώσεις κίνησης στερεού αν είναι $\boldsymbol{\alpha_\gamma = \sigma\tau\alpha\theta}$**

$$\omega = \omega_o + \alpha_\gamma \Delta t$$

$$\Delta\theta = \omega_o \Delta t + \frac{1}{2}\alpha_\gamma \Delta t^2$$

**4.41 Λύση**

**α.** Από το διάγραμμα $(0 \to 6s)$




$$\alpha_{\gamma 1} = \frac{20-(-10)}{6} \Rightarrow \alpha_{\gamma 1} = 5\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma 1} t \Rightarrow \omega = -10 + 5t\ (\mathrm{SI})$$

$$\omega = 0 \Rightarrow 0 = -10 + 5t_1 \Rightarrow \boldsymbol{t_1 = 2\ s}$$

**β.** Στα χρονικά διαστήματα από 0 s έως 2 s και από 2 s έως $t_3$ οι γωνιακές μετατοπίσεις είναι:

$$\Delta\theta_1 = \frac{2\cdot(-10)}{2} \Rightarrow \Delta\theta_1 = -10\ \mathrm{rad} \quad \text{και} \quad \Delta\theta_2 = \frac{20(t_3-2)}{2} = 10(t_3-2)$$

Για το συνολικό αριθμό περιστροφών της ράβδου γράφουμε:

$$N = \frac{|\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2|}{2\pi} \Rightarrow 100 = 10 + 10|t_3 - 2| \Rightarrow t_3 = 11\ \mathrm{s}$$

Στο χρονικό διάστημα από 6 s έως 11 s:

$$\alpha_{\gamma 2} = \Delta\omega/\Delta t = -20/5 \Rightarrow \alpha_{\gamma 2} = -4\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$\omega = \omega_1 + \alpha_{\gamma 2}(t - t_2) \Rightarrow \omega = 20 - 4(t-6) \Rightarrow \omega = 44 - 4t\ (\mathrm{SI})$$

Τη χρονική στιγμή $t = 10$ s είναι: $\omega = 44 - 4\cdot 10 = 4\ \mathrm{rad/s}$.
οπότε στο τελευταίο δευτερόλεπτο με εμβαδομέτρηση βρίσκουμε:

$$\Delta\theta' = 1\cdot 4/2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\theta' = 2\ rad}$$

**γ.** Τη στιγμή $t = 5s$ είναι : $\alpha_\gamma = 5rad/s^2$

$$\upsilon = r\omega \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha_\gamma \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{l}{2}\alpha_\gamma \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \mathbf{7,5\ m/s^2}$$

**δ.** Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κέντρου μάζας είναι:

$$a_\kappa = \omega^2 \frac{l}{2}$$

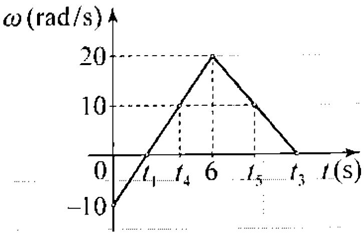
Τη στιγμή $t_1$ είναι $a_{\kappa 1} = 0$ και τη στιγμή $t_2$ είναι: $\omega_2 = -10 + 5t = 15rad/s$

$$a_{\kappa 2} = \omega_2^2 \frac{l}{2} \Rightarrow a_{\kappa 2} = 225\frac{3}{2} = \mathbf{337,5\,\frac{m}{s^2}}$$

**ε.** Είναι $\omega = 10\ \mathrm{rad/s}$ τις χρονικές στιγμές $t_4$ και $t_5$ για τις οποίες ισχύουν:

$$10 = -10 + 5t_4 \Rightarrow t_4 = 4\ \mathrm{s}$$

$$10 = 44 - 4t_5 \Rightarrow t_5 = 8{,}5\ \mathrm{s}$$

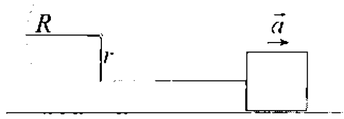



Τη χρονική στιγμή $t_4$ είναι $\Delta\theta_4 = \mathbf{0}$.

Τη χρονική στιγμή $t_5$ θα βρούμε τη γωνιακή μετατόπιση αφαιρώντας το χρωματισμένο εμβαδόν από το συνολικό:

$$\Delta\theta_5 = \frac{2\cdot(-10)}{2} + \frac{20\cdot 9}{2} - \frac{2{,}5\cdot 10}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\theta_5 = 67,5\ rad}$$

**4.42** Τροχός ακτίνας $R = 0{,}4$ m και μάζας $m = 1$ kg φέρει εγκοπή ακτίνας $r = R/2$ στην οποία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται στο μέσον κύβου πλευράς $R$ και μάζας $M = 6$ kg, όπως στο σχήμα. Αρχικά ($t_0 = 0$) τα σώματα είναι ακίνητα και το οριζόντιο τμήμα του νήματος έχει μήκος $l = 3{,}5R$. Ασκούμε στον κύβο οριζόντια δύναμη $F = 54N$ έτσι ώστε να ολισθαίνει με σταθερή επιτάχυνση $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$, ενώ ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Βρείτε:




**α.** Τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
**β.** Τη χρονική στιγμή που τα δύο σώματα θα έρθουν σε επαφή.
**γ.** Την ταχύτητα του σημείου του τροχού που θα έρθει σε επαφή με τον κύβο λίγο πριν την κρούση.
**δ.** Την επιτάχυνση του υψηλότερου σημείου του τροχού όταν η κινητική ενέργεια του κύβου είναι 1,8 J.
**ε.** Την Συνισταμένη ροπή που δέχεται ο τροχός ως προς το σημείο επαφής $E$ του τροχού με το δάπεδο αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κύβου και δαπέδου είναι $\mu = 0{,}5$

**Απ.[α.** $\alpha_\gamma = 10\ \mathrm{rad/s^2}$, **β.** 1 s, **γ.** $4\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$, **δ.** $10\ \mathrm{m/s^2}$, ε. 2,4Nm**]**



**Κίνηση του κύβου**

Ο κύβος κάνει την ίδια κίνηση με το οριζόντιο τμήμα του νήματος.
Μετατόπιση -ταχύτητα και επιτάχυνση του κύβου είναι:

$$\Delta x = \Delta x_{cm} - r\Delta\theta$$

$$\upsilon = \upsilon_{cm} - r\omega$$

$$\alpha = \alpha_{cm} - r\alpha_\gamma$$

«Το μήκος του νήματος που τυλίγεται ή ξετυλίγεται οφείλεται στην περιστροφική κίνηση και είναι ίσο με $r\theta$»

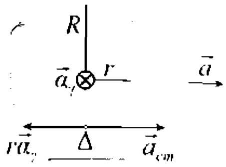
**Ροπές ως προς το σημείο επαφής**

Η δύναμη αντίδρασης $A$ και το βάρος έχουν μηδενική ροπή ως προς το σημείο επαφής $E$ διότι οι φορείς τους διέρχονται από το $E$. Η μόνη ροπή είναι η ροπή της τάσης του νήματος.

$$\Sigma\tau_{(E)} = \tau_T = T(R - r)$$

Την τάση του νήματος μπορούμε να την υπολογίσουμε αν εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο για τον κύβο.

**4.42 Λύση**




**α.** Ο τροχός κάνει κύλιση οπότε θα είναι $a_{cm} = \alpha_\gamma R$.
Η επιτάχυνση $\alpha$ του κύβου είναι ίση με την εφαπτομενική επιτάχυνση $a_\Delta$ του σημείου Δ.

$$a_\Delta = a_{cm} - \alpha_\gamma r = a_{cm} - \frac{R}{2}\alpha_\gamma$$

$$a = a_\Delta \Rightarrow \alpha = a_{cm} - \frac{R}{2}\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha = a_{cm} - \frac{a_{cm}}{2} = \frac{a_{cm}}{2} \Rightarrow a_{cm} = 2a = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\alpha_\gamma = a_{cm}/R \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_\gamma = 10\ \mathrm{rad/s^2}}$$

Παρατηρούμε ότι το κέντρο μάζας του τροχού έχει $a_{cm} = 2\alpha$ άρα η μετατόπιση του Κ.Μ. του τροχού θα είναι διπλάσια από την μετατόπιση του κύβου και θα συναντηθούν.

**β.** Όταν έρθουν σε επαφή, το κέντρο μάζας του τροχού έχει διανύσει διάστημα $x_1$ και ο κύβος έχει διανύσει διάστημα $x_2$.

$$x_2 = x_{cm} - \frac{R}{2}\theta \Rightarrow x_2 = x_{cm} - \frac{x_{cm}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$x_1 + R = x_2 + l \Rightarrow 2x_2 + R = x_2 + l \Rightarrow x_2 = l - R = 2{,}5R$$

$$x_2 = 1/2\,\alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{2x_2/\alpha} \Rightarrow t = \sqrt{2\cdot 2{,}5R/\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{t = 1s\ \mathrm{s}}$$

**γ.** Η ταχύτητα του CM τη στιγμή $t = 1s$ θα είναι: $\upsilon_{cm} = a_{cm}\cdot t = 4\cdot 1 = 4m/s$
Γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = 4m/s$
Τη χρονική στιγμή $t = 1$ s η ταχύτητα του σημείου επαφής έχει μέτρο:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{2}\upsilon_{cm} = \sqrt{2}a_{cm}t_1 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 4\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}}$$

**δ.** Το ψηλότερο σημείο έχει δύο συνιστώσες επιτάχυνσης που είναι κάθετες μεταξύ τους.

Την εφαπτομενική επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon\varphi} = 2a_{cm} = 8\ \mathrm{m/s^2}$

Την κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa = \omega^2 R$

Κινητική ενέργεια κύβου : $K = 1/2\,M\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2\mathrm{K}/\mathrm{M}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{3{,}6/6} = \sqrt{0{,}6}m/s$

$$\upsilon_{cm} = 2\upsilon \Rightarrow R\omega = 2\upsilon \Rightarrow \omega = \frac{2\upsilon}{R} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\upsilon^2}{R^2}$$

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R = \frac{4\upsilon^2}{R^2}R = \frac{4\upsilon^2}{R} = \frac{4\cdot 0{,}6}{0{,}4} = 6\ \mathrm{m/s^2}$$

Η επιτάχυνση του υψηλότερου σημείου θα έχει μέτρο:

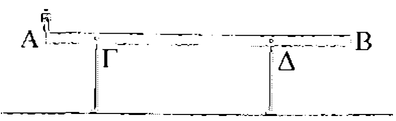
$$a_A = \sqrt{a_{\varepsilon\varphi}^2 + a_\kappa^2} \Rightarrow \boldsymbol{a_A = 10\ \mathrm{m/s^2}}$$

**ε.** Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τον κύβο.

$$\Sigma F = M\alpha \Rightarrow F - T - T_{o\lambda} = M\alpha \quad \Rightarrow$$

$$T = F - Ma - \mu Mg = 54 - 30 - 6\cdot 2 = 12N$$

$$\Sigma\tau_{(E)} = \tau_T + \tau_W + \tau_N + \tau_{Ts} = \tau_T = T\cdot\frac{R}{2} = 12\cdot 0{,}2 = \boldsymbol{2{,}4Nm}$$




**4.43** Η ομογενής δοκός $AB$ του σχήματος έχει μήκος $l = 8\,\text{m}$ και μάζα $M = 80\,\text{kg}$ και στηρίζεται με δύο στύλους στα σημεία $Γ$ και $Δ$ που απέχουν από το άκρο $A$ αποστάσεις $(AΓ) = 1\,\text{m}$ και $(AΔ) = 5\,\text{m}$. Ένας άνθρωπος μάζας $m = 40\,\text{kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητος στο $A$. Ο άνθρωπος μετακινείται από το $A$ προς το $B$. Αν $x$ η απόσταση του ανθρώπου από την αρχική του θέση A βρείτε:

**α.** $F_Γ$ και $F_Δ$ που δέχεται η δοκός από τα στηρίγματα συναρτήσει του $x$.

**β.** Την μέγιστη απόσταση από το A που μπορεί να φτάσει ο άνθρωπος από το A χωρίς να ανατραπεί η δοκός.

**γ.** Την μεταβολή του μέτρου της δύναμης $F_Δ$ κατά την κίνηση του ανθρώπου πάνω στη δοκό μέχρι τη στιγμή που αρχίζει η περιστροφή της δοκού.

**γ.** Για ποια τιμή του $x$ οι δυνάμεις $F_Γ$ και $F_Δ$ είναι ίσες;

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,\text{m}/s^2$.

**Απ.[α.** $F_Γ = 700 - 100x$, $F_Δ = 500 + 100x$ β. $x = 7m$, γ. $700N$ $x = 1m$ ]

**Ισορροπία Δοκού**

Μελετάμε την ισορροπία με τον άνθρωπο σε τυχαία θέση η οποία βρίσκεται σε απόσταση $x$ από την αρχική θέση A.

Βρίσκουμε τις τιμές των δυνάμεων που δέχεται η δοκός από τα στηρίγματα ως συνάρτηση του $x$.

Για $x = 0$ βρίσκουμε τις αρχικές τιμές των δυνάμεων.

**Όταν οι δυνάμεις είναι παράλληλες**

Η σχέση για την ισορροπία δυνάμεων είναι:

$$ΣF = 0$$

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς κάθε σημείο είναι:

$$Στ = 0$$

Μας συμφέρει να επιλέξουμε έναν άξονα από τον οποίο διέρχεται κάποια άγνωστη δύναμη ώστε να λιγοστέψουν οι άγνωστοι.

**Ανατροπή δοκού**

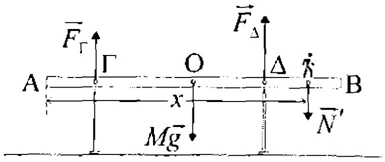
Η ανατροπή της δοκού συμβαίνει όταν η δοκός αρχίζει να περιστρέφεται ως προς ένα από τα στηρίγματα.

Όταν αρχίζει η περιστροφή ως προς ένα στήριγμα τότε η δύναμη επαφής από το άλλο στήριγμα μηδενίζεται.

Από τις εξισώσεις των δυνάμεων σαν συνάρτηση του $x$ βλέπουμε τίνος στηρίγματος η δύναμη μηδενίζεται οπότε η περιστροφή θα γίνει ως προς το άλλο στήριγμα.

**4.43 Λύση**

**α.** Όταν ο άνθρωπος βρίσκεται σε απόσταση $x$ από την αρχική του θέση, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός.




Το βάρος της $w_\delta = Mg$

Η δύναμη $\vec{N}'$ που ασκεί ο άνθρωπος στη δοκό

Οι δυνάμεις $F_\Gamma + F_\Delta$ από τα στηρίγματα. Όλες οι δυνάμεις έχουν την ίδια διεύθυνση.

Η δύναμη που ασκεί ο άνθρωπος στη δοκό είναι ίση με το βάρος του $m\vec{g}$ .

$$\left.\begin{array}{r}\vec{N}' = -\vec{N}\ (\Delta\rho\acute{\alpha}\sigma\eta\ A\nu\tau\acute{\iota}\delta\rho\alpha\sigma\eta)\\ m\vec{g} = -\vec{N}\ \ (\alpha\pi\acute{o}\ \iota\sigma o\rho\rho o\pi\acute{\iota}\alpha\ )\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{N}' = m\vec{g}$$

Από την ισορροπία των δυνάμεων έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_\Gamma + F_\Delta = Mg + N' \Rightarrow F_\Gamma + F_\Delta = Mg + mg \Rightarrow$$

$$F_\Gamma + F_\Delta = 1400N \quad (1)$$

Από την ισορροπία των ροπών:

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow F_\Delta(\Gamma\Delta) - Mg(\Gamma O) - N'(x - A\Gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$F_\Delta \cdot 4 - 800 \cdot 3 - 400(x-1) = 0 \Rightarrow F_\Delta = 200 \cdot 3 + 100(x-1) \Rightarrow$$

$$F_\Delta = 600 + 100x - 100 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F_\Delta = 500 + 100x} \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$$F_\Gamma = 1200 - (500 + 100x) \Rightarrow \ \boldsymbol{F_\Gamma = 700 - 100x} \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) για $x = 0$ βρίσκουμε τα μέτρα των δυνάμεων $F_\Gamma, F_\Delta$ όταν ο άνθρωπος ισορροπεί στα άκρο Α της δοκού.

$$F_\Gamma = 700N\ , F_\Delta = 500N$$

**β.** Καθώς αυξάνει το $x$ το μέτρο της $F_\Gamma$ μικραίνει ενώ το μέτρο της $F_\Delta$ συνεχώς αυξάνει. Έτσι για κάποια τιμή του $x$ θα γίνει $F_\Gamma = 0$ και τότε χάνεται η επαφή με το στήριγμα Γ διότι η δοκός αρχίζει να περιστρέφεται με άξονα περιστροφής το Δ.

$$F_\Gamma = 0 \Rightarrow 700 - 100x = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 7m}$$

γ. Από την (2) για $x = 0$ βρίσκουμε την αρχική τιμή του μέτρου της δύναμης $F_\Delta$ :

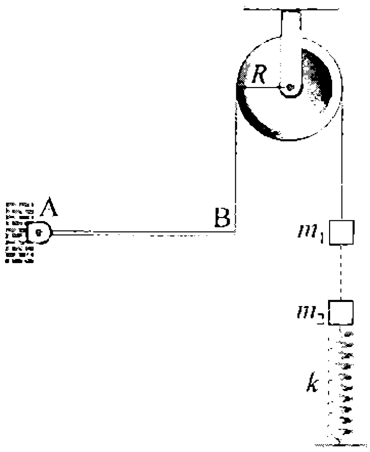
$$F_{\Delta(o)} = 500N$$

Για $x = 7m$ είναι $F_\Delta = 500 + 100 \cdot 7 = 1200N$

$$\Delta F_\Delta = 1200 - 500 = \boldsymbol{700N}$$

**δ.** Θα λύσουμε την εξίσωση $F_\Delta = F_\Gamma$

$$F_\Delta = F_\Gamma \Rightarrow 500 + 100x = 700 - 100x \ \Rightarrow 200x = 200 \Rightarrow \boldsymbol{x = 1m}$$




**4.44** Η ράβδος $AB$ έχει μήκος $l$ και μάζα $m$. Η ράβδος στηρίζεται στο $A$ με άρθρωση και στο $B$ με νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου ισορροπεί σώμα μάζας $m_1 = 1$ kg. Η τροχαλία έχει μάζα $M = 2kg$ και ακτίνα $R$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Βρείτε:

**α.** Τη δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής.

**β.** Τη δύναμη δέχεται η ράβδος από την άρθρωση και τη μάζα $m$ της ράβδου.

Κάποια στιγμή το νήμα που κρατάει το σώμα $\Sigma_1$ κόβεται και το σώμα μάζας $m_1$ αφού διανύσει διάστημα $h = 0{,}2m$ συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας $m_2 = 3kg$ το οποίο ισορροπεί ακίνητο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ που το κατώτερο άκρο του είναι στερεωμένο στο οριζόντιο δάπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$. Υπολογίστε:

**γ.** Την ενέργεια και το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

**δ.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

**ε.** Το μέτρο της επιτάχυνσης του συσσωματώματος όταν η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης.

Απ. [α. $40N$, β. $10N$, $2kg$, γ. $1j$, $0{,}1\sqrt{2}$, δ. $5j/s$, $2{,}5\sqrt{2}m/s^2$]

**Ισορροπία συστήματος σωμάτων**

Αφού σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε όλα τα σώματα

Αν σε κάποιο σώμα όλες οι δυνάμεις διέρχονται από το κέντρο μάζας τότε αρκεί η

$$\Sigma F = 0$$

Αν δεν διέρχονται όλες οι δυνάμεις από το κέντρο μάζας τότε γράφουμε:

$$\Sigma F = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \Sigma\tau = 0$$

**Πλαστική Κρούση και μετά ταλάντωση**

Μετά την πλαστική κρούση η θέση ισορροπίας κατέρχεται κατά $d$

$$d = \frac{mg}{k}$$

**Σχέση μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας σε απλή αρμονική ταλάντωση**

Αν έχουμε μία σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας (Κ ) και δυναμικής ενέργειας (U) σε μία απλή αρμονική ταλάντωση πχ $K = 3U$ την αξιοποιούμε στην σχέση.

$$K + U = E \ \Rightarrow 3U + U = E \Rightarrow 4U = E$$

### 4.44 Λύση

**α.** Το σώμα μάζας $m_1$ δέχεται το βάρος του και την τάση του νήματος μέτρου $T_1$. Η τροχαλία δέχεται στην περιφέρεια της τις τάσεις από τα νήματα που έχουν μέτρα $T_1$ , $T_2$ , το βάρος της και την δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα περιστροφής. Η ράβδος δέχεται το βάρος της , την τάση του νήματος μέτρου $T_2$ και την δύναμη από την άρθρωση.
Μελετάμε την ισορροπία κάθε σώματος:

Για το σώμα μάζας $m_1$: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g = 10N$

Για την τροχαλία: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_1 R = T_2 R \Rightarrow T_2 = T_1 = 10N$

Όλες οι δυνάμεις που δέχεται η τροχαλία είναι κατακόρυφες.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - Mg - T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow F = Mg + T_1 + T_2 \Rightarrow \boldsymbol{F = 40N}$$

**β.** Η ράβδος δέχεται τρείς δυνάμεις και οι δύο είναι κατακόρυφες άρα και η δύναμη $F'$ που δέχεται από την άρθρωση θα είναι κατακόρυφη.

$$\Sigma\tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow F'\frac{l}{2} = T_2\frac{l}{2} \Rightarrow \boldsymbol{F' = T_2 = 10N}$$
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F' + T_2 = mg \Rightarrow mg = 20N \Rightarrow \boldsymbol{m = 2kg}$$

**γ.** Λίγο πριν την κρούση το σώμα μάζας $m_1$ έχει ταχύτητα: $\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = 2m/s$
Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα $V$

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{1}{1+3}2 = 0{,}5m/s$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.
Η θέση ισορροπίας κατέρχεται κατά $d$ : $d = \Delta l - \Delta l_o = m_1 g/k = 0{,}1m$
Η αρχική απομάκρυνση του συσσωματώματος είναι $x = \pm d$ και η ενέργεια ταλάντωσης:

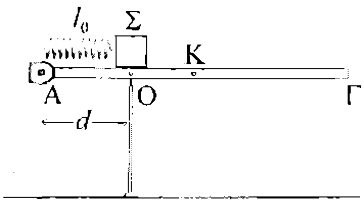
$$E = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}100\frac{1}{100} + \frac{1}{2}4\frac{1}{4} \Rightarrow \boldsymbol{E = 1j}$$
$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2}{100}} \Rightarrow \boldsymbol{A = 0,1\sqrt{2}}$$

**δ.** Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας θα προκύψει θετικός διότι το σώμα κινείται προς την θέση ισορροπίας. Αν πάρουμε θετική φορά προς τα πάνω τότε στο ξεκίνημα της ταλάντωσης του το συσσωμάτωμα θα έχει:

$$\upsilon = -V = -0{,}5\,m/s \quad \kappa\alpha\iota \quad x = +d = 0{,}1m$$
$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -Dx\upsilon = -100 \cdot 0{,}1 \cdot (-0{,}5) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dK}{dt} = 5j/s}$$

**ε.**

$$\omega = \sqrt{k/m_1 + m_2} = 5rad/s$$
$$K + U = E \Rightarrow 3U + U = E \Rightarrow 4U = E \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2}$$
$$|a| = \omega^2\frac{A}{2} = 25 \cdot 0{,}1\sqrt{2} \Rightarrow \boldsymbol{a = 2,5\sqrt{2}m/s^2}$$




**4.45** Λεία οριζόντια σανίδα μήκους $L = 3m$ και μάζας $M = 0{,}4\,Kg$ αρθρώνεται στο άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο. Σε απόσταση $d = 1m$ από τον τοίχο, η σανίδα στηρίζεται σε σημείο της Ο ώστε να διατηρείται οριζόντια. Σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = 1\,Kg$ ισορροπεί πάνω στη σανίδα ακριβώς πάνω από το στήριγμα Ο και είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,N/m$ που το άλλο άκρο του συνδέεται στον τοίχο. Το ελατήριο είναι οριζόντιο και βρίσκεται αρχικά στο φυσικό του μήκος $l_o = d$. Ασκούμε στο σώμα $\Sigma_1$ σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 40\,N$ με κατεύθυνση προς το άλλο άκρο Γ της σανίδας. Όταν το σώμα $\Sigma_1$ διανύσει απόσταση $s = 5\,cm$, η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα και, στη συνέχεια, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Βρείτε:

**α.** Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα $\Sigma_1$.

**β.** Το μέτρο της δύναμης $F_A$ που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος $\Sigma_1$ και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Αν κατά μήκος της σανίδας από το άκρο Γ προς το Α κινείται σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2 = 1\,Kg$ με ταχύτητα $\upsilon_2 = 2\sqrt{3}\ \mathrm{m/s}$ το οποίο τη στιγμή $t_o = 0$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα $\Sigma_1$ ώστε μετά την κρούση το $\Sigma_1$ να ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος. Η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και η απομάκρυνση του σώματος $\Sigma_1$ λίγο πριν την κρούση είναι θετική, βρείτε:

**γ.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής του σώματος $\Sigma_1$ αμέσως μετά την κρούση.

**δ.** Το πλάτος της νέας ταλάντωσης του $\Sigma_1$ μετά την κρούση.

**ε.** Τη χρονική στιγμή που η ορμή του σώματος $\Sigma_1$ θα είναι αντίθετη της ορμής που είχε αμέσως μετά την κρούση.

Τριβές στην άρθρωση και στο υποστήριγμα δεν υπάρχουν $g = 10m/s^2$. (Πάρτε ως θετική την φορά της δύναμης $\vec{F}$)

Απ. [α. $0{,}2m$, β.$F_A = 2 + 10x$, γ. $20N$, δ. $0{,}4m$, ε. $0{,}1\pi$]

**Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης μετά από ελαστική κρούση**

Το πλάτος ταλάντωσης το καθορίζει η ενέργεια ταλάντωσης

Η ενέργεια της ταλάντωσης μετά την κρούση είναι μέγιστη αν το σώμα $\Sigma_1$ κρατήσει όλη την ενέργεια της αρχικής ταλάντωσης και επιπλέον πάρει και την κινητική ενέργεια του σώματος $\Sigma_2$.

$$E' = E + K_2$$

Αν η κρούση συμβεί σε ακραία θέση τότε το Σ1 κρατά την ενέργεια Ε και επειδή η μάζες είναι ίσες παίρνει και όλη την κινητική ενέργεια του $\Sigma_2$.

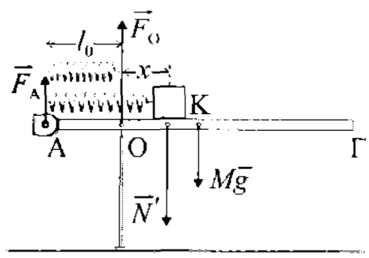
**4.45 Λύση**

**α.** Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με την ενέργεια ταλάντωσης.

$$E_{ταλ} = W_F = Fs = 40 \cdot 0{,}05 = 2j$$

$$E_{ταλ} = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{4}{100}} \Rightarrow \boldsymbol{A = 0{,}2m}$$

**β.** Η θέση ισορροπίας του σώματος συμπίπτει με την θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.




Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο είναι μηδέν.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση ασκείται το βάρος της δοκού $M\vec{g}$ ,η δύναμη $\vec{N}'$ που δέχεται η σανίδα από το σώμα Σ , η δύναμη $\vec{F}$ από το υποστήριγμα και η δύναμη $\vec{F_A}$ από τον τοίχο. Θεωρούμε το σώμα Σ σε τυχαία θέση με απομάκρυνση $x$.

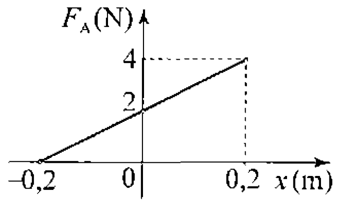
$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F_A l_o = Mg(KO) + mgx \Rightarrow$$

$$F_A = Mg\frac{(KO)}{l_o} + mg\frac{x}{l_o} \Rightarrow \boldsymbol{F_A = 2 + 10x}$$

$$x = 0 \Rightarrow F_A = 2N$$

$$x = -0{,}2m \Rightarrow F_A = 0$$

$$x = 0{,}2m \Rightarrow F_A = 4N$$




**γ.** Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης θα έχουμε όταν η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι μέγιστη και επειδή η δυναμική της αρχικής και τελικής ταλάντωσης είναι η ίδια θα πρέπει μετά την κρούση το σώμα $\Sigma_1$ να αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια.

$$K_1' = (max) \text{ όταν } K_2' = 0 \Rightarrow \upsilon_2' = 0$$

Επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων $\upsilon_2' = \upsilon_1 = 0$ δηλαδή λίγο πριν την κρούση το σώμα Σ1 βρίσκεται σε ακραία θέση οπότε έχει απομάκρυνση:

$$x_1 = +A = 0{,}2m \quad και\ έτσι: \quad \left|\frac{dp}{dt}\right| = k|x| = \boldsymbol{20N}$$

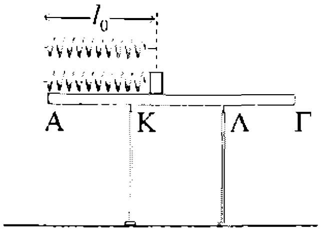
**δ.** Η ενέργεια $E'$ της νέας ταλάντωσης είναι:

$$E' = E + K_2 = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = 2 + 6 = 8j$$

$$E' = \frac{1}{2}kA'^2 \Rightarrow A' = \sqrt{2E'/k} = \sqrt{16/100} \Rightarrow \boldsymbol{A' = 0{,}4m}$$

**ε.** Τη στιγμή $t_o = 0$ το $\Sigma_1$ έχει απομάκρυνση $x > 0$ και $\upsilon < 0$. Όταν η $\upsilon$ θα γίνει αντίθετη της αρχικής για πρώτη φορά θα είναι και η $x$ αντίθετη της αρχικής και η φάση της ταλάντωσης θα έχει αυξηθεί κατά $\pi$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2} = 0{,}1\pi \Rightarrow \boldsymbol{t_1 = 0{,}1\pi}$$




**4.46** Η ομογενής δοκός ΑΓ έχει μήκος $l = 0{,}8m$ και μάζα $M = 3kg$ και ισορροπεί με δύο στηρίγματα που βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ τα οποία απέχουν από το άκρο Γ αποστάσεις $ΓΚ = 0{,}45m$ και $ΓΛ = 0{,}20m$. Σώμα μάζας $m$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου και ισορροπεί στο μέσον της δοκού ενώ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Η δύναμη που δέχεται η δοκός από το υποστήριγμα Κ έχει μέτρο $F_1 = 32N$. Ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου $F = 7{,}5N$ την οποία καταργούμε όταν το ελατήριο επιμηκυνθεί κατά $\Delta l = 0{,}15m$. Στη συνέχεια το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν θεωρήσουμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου τη στιγμή που καταργήθηκε η δύναμη $F$ και είναι $g = 10m/s^2$ βρείτε:

**α.** Την ενέργεια της ταλάντωσης που κάνει το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης καθώς και την αρχική φάση της ταλάντωσης.

**β.** Την εξίσωση της απομάκρυνσης ως συνάρτηση του χρόνου.

**γ.** Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της κινητικής ενέργειας του σώματος.

**δ.** Τα μέτρα των δυνάμεων που δέχεται η δοκός από τα στηρίγματα ως συνάρτηση της απομάκρυνσης του σώματος από το μέσον της δοκού.

**ε.** Ποιο είναι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης ώστε το σώμα να κινείται συνέχεια πάνω στη δοκό χωρίς να χάνεται η επαφή της δοκού με τα στηρίγματα

Απ.[α. $0{,}15m$, $\pi/2$ β. $0{,}15\eta\mu(10t + \pi/2)$, γ. $\pi/10\,s$ , δ. $32 - 40x$, $8 + 40x$ ε. $0{,}2m$]

**Υπολογισμός της μάζας του σώματος**

Από την ισορροπία των ροπών

$$\Sigma\tau = 0$$

παίρνοντας ροπές ως προς το Λ θα υπολογίσουμε την μάζα του σώματος.

**Κινητική Ενέργεια ταλάντωσης**

Είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο $T'$ και συχνότητα $f'$ .

Αν $T, f$ είναι η περίοδος -συχνότητα της ταλάντωσης ισχύει:

$$T' = \frac{T}{2} \quad και \quad f' = 2f$$

**Μέγιστο πλάτος**

Υπολογίζουμε τα μέτρα των δυνάμεων που δέχεται η δοκός από τα στηρίγματα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση $x$ και υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή του μέτρου της κάθε μιας το οποίο πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

**4.46 Λύση**

**α.** Η ενέργεια ταλάντωσης που κάνει το σώμα είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$

$$E = W_F = F\Delta l = 7{,}5 \cdot 0{,}15 = 1{,}125j$$

$$E = 1/2\,kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{2E/k} = \sqrt{2{,}25/100} = 1{,}5/10 \Rightarrow \boldsymbol{A = 0{,}15m}$$

Παρατηρούμε ότι είναι $x = +A$ άρα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\boldsymbol{\pi/2}$

**β.** Αρχικά η ράβδος ισορροπεί και το σώμα είναι στο μέσον της Ο. Ροπές ως προς το Λ

$$AK = 0{,}35m\,, AO = 0{,}4m, K\Lambda = 0{,}25m, KO = 0{,}05m. \Lambda O = 0{,}2m$$

$$F_1 \cdot (K\Lambda) = (M+m)g \cdot (\Lambda O)$$

$$F_1 \cdot 0{,}25 = (M+m)g \cdot 0{,}20 \Rightarrow (M+m) = \frac{F_1 \cdot 0{,}25}{g \cdot 0{,}20} = \frac{32 \cdot 5}{10 \cdot 4} = 4kg \Rightarrow \boldsymbol{m = 1kg}$$

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10\,rad/s \quad \Rightarrow \quad x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{x = 0{,}15\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})}$$

**γ.** $K = \dfrac{1}{2}mv^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = E\sigma\upsilon\nu^2\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1{,}125\sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Η κινητική ενέργεια είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο $T'$

$$T' = 1/2\,T = 1/2\,(2\pi/\omega) \Rightarrow \boldsymbol{T' = \pi/10\,s}$$

**δ.** Η θέση $x$ του σώματος ως προς το μέσον της ράβδου είναι η απομάκρυνση της ταλάντωσης. Θεωρούμε το σώμα σε τυχαία θέση με απομάκρυνση $x$ ,οι δυνάμεις από τα στηρίγματα θα είναι $F_1, F_2$. Συμβολίζω με $d$ την απόσταση του Κ από το μέσον της ράβδου: $d = 5cm,$ η απόσταση $K\Lambda$ είναι :

$$K\Lambda = 45cm - 20cm = 25cm = 0{,}25m$$

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_2\,(K\Lambda) - mg(d+x) - Mgd = 0 \Rightarrow$$

$$(K\Lambda)F_2 = Mgd + mg(x+d) \Rightarrow \ \boldsymbol{F_2 = 8 + 40x} \ \ (S.I.) \quad -0{,}15m \le x \le 0{,}15m$$

Η ελάχιστη τιμή της $F_2$ προκύπτει για $x = -0{,}15m$ και είναι: $F_2 = 8 - 6 = 2N > 0$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 - (M+m)g = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = (M+m)g$$

$$\Rightarrow F_1 = 40 - (8 + 40x) \Rightarrow \boldsymbol{F_1 = 32 - 40x} \ \ (S.I.) \quad -0{,}15m \le x \le 0{,}15m$$

Η ελάχιστη τιμής της $F_1$ προκύπτει για: $x = +0{,}15m \Rightarrow F_1 = 26N$

**ε.** Για να κινείται το σώμα πάνω στη δοκό πρέπει το πλάτος να είναι

$$A \le l/2 \Rightarrow A \le 0{,}4m$$

Για να μην χάνεται η επαφή με τα στηρίγματα πρέπει να ισχύει:

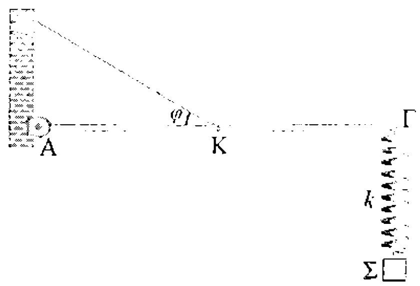
$$F_2 \ge 0 \Rightarrow 8 + 40x \ \ge 0 \ \Rightarrow x \ge -\frac{8}{40} \Rightarrow -A \ge -0{,}2m \Rightarrow A \le 0{,}2m$$

$$F_1 \ge 0 \Rightarrow 32 - 40x \ge 0 \Rightarrow \ \ 32 \ge 40x \Rightarrow A \le 0{,}8m$$

Για να αληθεύουν και οι δύο σχέσεις πρέπει:

$$A \le 0{,}2m \Rightarrow \boldsymbol{A_{max} = 0{,}2m}$$

**4.47** Στο σχήμα η ράβδος, μάζας $M = 3$ kg και μήκους $l$, έχει αρθρωθεί στο ένα άκρο της Α, ενώ μέσον της Κ συνδέεται με νήμα, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε τοίχο ώστε η γωνία $\varphi$ που σχηματίζει η ράβδος με το νήμα να είναι 30°. Στο άκρο της Γ της ράβδου έχουμε στερεώσει ελατήριο σταθεράς $k = 200$ N/m, στο κάτω άκρο του οποίου έχουμε συνδέσει σώμα Σ μάζας $m = 2$ kg. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί.




**α.** Βρείτε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο.
Εκτρέπουμε το σώμα μάζας $m$ προς τα κάτω κατά $d = 0{,}2$ m ώστε να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Βρείτε:
**β.** Την εξίσωση απομάκρυνσης θεωρώντας ως θετική φορά προς τα κάτω.
**γ.** Τη χρονική στιγμή η δύναμη από την άρθρωση είναι οριζόντια.
**δ.** Το μέτρο της τάσης του νήματος $\vec{T}$ σαν συνάρτηση της απομάκρυνσης και να κάνετε το διάγραμμα $T = f(x)$ όσο το νήμα είναι τεντωμένο.
**ε.** Τη μέγιστη τιμή του πλάτους $A$ της ταλάντωσης ώστε το νήμα να είναι συνέχεια τεντωμένο. [Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s$^2$].
Απ.[α.140 N, $10\sqrt{151}N$, β.0,2$\eta\mu(10t + \pi/2)$, $\gamma.\ \pi/15\ s$, δ.$140 - 800x$, ε. 0,175 m]



**Δύναμη από τον άξονα περιστροφής**

Αν η δύναμη από τον περιστροφής είναι οριζόντια τότε στην ισορροπία των ροπών συμφέρει να πάρουμε τις ροπές ως προς το $K$

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow \tau_F + \tau_w + \tau_T + \tau_{F_{\varepsilon\lambda}} = 0 \Rightarrow$$

$$\tau_{F_{\varepsilon\lambda}} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 0$$

Παρατηρούμε ότι το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και έτσι η απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας του είναι:

$$x = -\frac{mg}{k}$$

**Ροπή της ελατηριακής δύναμης που ασκείται στη ράβδο**

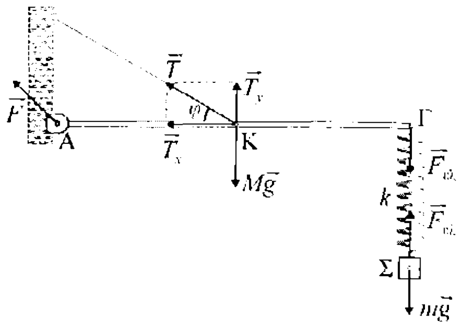
Το σώμα δέχεται από το ελατήριο δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ της οποίας την αλγεβρική τιμή την βρίσκουμε από τη σχέση:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow mg + F_{\varepsilon\lambda} = -kx$$

Η ράβδος δέχεται από το ελατήριο την $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ που είναι αντίθετη της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$
Θεωρούμε ότι η $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ έχει θετική φορά οπότε η ροπή της θα είναι αρνητική.

**4.47 Λύση**

**α.** Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στο σώμα Σ και στη ράβδο. Τη δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση την σχεδιάσαμε αυθαίρετα.




$Ισορροπία$: $F_{ελ} = mg \Rightarrow F_{ελ} = 30N$

$T_x = Tσυνφ$, $T_y = Tημφ$.,

$$Στ_{(A)} = 0 \Rightarrow Tημφ\frac{l}{2} - F_{ελ}l - Mg\frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$T = 2Mg + 4F_{ελ} = 2Mg + 4mg \Rightarrow T = \mathbf{140\ N}$$

$$-F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = -70\sqrt{3}$$

$$F_y + T_y = Mg + mg \Rightarrow F_y = Mg + mg - T_y = -20N \Rightarrow \ F = \mathbf{10\sqrt{151}} \approx 123N$$

**β.** Η ταλάντωση έχει αρχική φάση $φ_0 = π/2$ και:$ω = \sqrt{k/m} = 10$ rad/s.
Επομένως η εξίσωση απομάκρυνσης είναι: $x = \mathbf{0,2ημ(10t + π/2)}$ (SI) (1)

**γ.** Όταν η δύναμη της άρθρωσης γίνει οριζόντια τότε από ισορροπία ράβδου έχουμε:

$$Στ_{(K)} = 0 \Rightarrow τ_F + τ_w + τ_T + τ_{F_{ελ}} = 0 \Rightarrow τ_{F_{ελ}} = 0 \Rightarrow F_{ελ} = 0$$

Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος οπότε η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι: $x = Δl = -0{,}1\text{ m} = -A/2$.

$$(1) \Rightarrow -A/2 = Aημ(10t + π/2) \Rightarrow t = T/3 \Rightarrow t = \mathbf{π/15\ s}$$

**δ.** Θεωρούμε το σώμα σε κάποια τυχαία θέση με απομάκρυνση $x$.
Η δύναμη που δέχεται το σώμα από το ελατήριο υπολογίζεται με θεμελιώδη νόμο:

$$ΣF = ma \quad ή \quad F_{ελ} + mg = -kx \Rightarrow F_{ελ} = -kx - mg$$

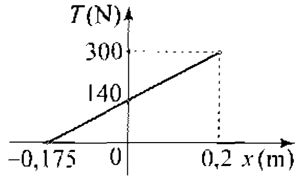
Το ελατήριο ασκεί $F'_{ελ}$ στη ράβδο η οποία είναι αντίθετη της $F_{ελ}$: $F'_{ελ} = mg + kx$
Σε τυχαία θέση θεωρούμε την $F'_{ελ}$ ως θετική και από την ισορροπία ροπών:

$$Στ_{(A)} = 0 \Rightarrow \frac{T}{2}\frac{l}{2} - F'_{ελ}l - Mg\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \ T = 2Mg + 4F'_{ελ} \Rightarrow$$

$$T = 2Mg + 4\,(mg + kx) \Rightarrow T = 2Mg + 4mg + 4kx \Rightarrow \boldsymbol{T = 140 + 800x}\ \text{(SI)}$$

Για $x = 0$ είναι: $T = 2Mg + 4mg = 140N$
για $x = -A$ και είναι $T_{ελάχ} = 140 - 800A = -20N$
Που σημαίνει ότι το νήμα δεν είναι τεντωμένο.
Για $T = 0$

$$0 = 140 + 800x \Rightarrow x = -\frac{140}{800} = -0{,}175m$$



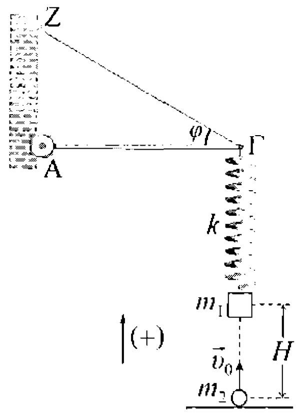

**δ.** Για να είναι το νήμα συνέχεια τεντωμένο πρέπει:

$$T_{ελαχ} \geq 0 \Rightarrow$$

$$140 - 800x \geq 0 \Rightarrow 800x \leq 140 \Rightarrow x \leq \frac{140}{800}\text{ m}$$

Επομένως η μέγιστη τιμή είναι $x_{max} = 0{,}175$ m.

$$A_{max} = \mathbf{0,175m}$$




**4.48** Ομογενής ράβδος $(AΓ) = l$ βάρους $w = 20N$ ισορροπεί οριζόντια μέσω άρθρωσης στο άκρο της Α ενώ το άλλο άκρο Γ συνδέεται με νήμα ΓΖ που είναι στερεωμένο στον κατακόρυφο τοίχο και έχει όριο θραύσης $160N$. Στο άκρο Γ υπάρχει δεμένο ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 300\text{N/m}$. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου ισορροπεί ακίνητο σώμα Σ1 μάζας $m_1 = 1kg$. Από το έδαφος και στην ίδια κατακόρυφη με τον άξονα του ελατηρίου εκτοξεύουμε σφαίρα Σ μάζας $m_2$ με ταχύτητα $υ_o = 4\,m/s$. Η σφαίρα όταν φτάσει σε ύψος $H = 0{,}65m$ συγκρούεται ακαριαία και πλαστικά με το σώμα Σ1. Το συσσωμάτωμα αρχίζει τη στιγμή $t_o = 0$ να εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Κατά την διάρκεια της ταλάντωσης το νήμα οριακά δεν κόβεται και οριακά δεν χαλαρώνει. Αν $φ = 30^o$ και $g = 10m/s^2$ και αντιστάσεις αέρα αμελητέες βρείτε:

**α.** Την ταχύτητα της σφαίρας λίγο πριν την κρούση.

**β.** Την μάζα της σφαίρας Σ.

**γ.** Την εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης του συσσωματώματος θεωρώντας ότι η ταλάντωση έχει αρχική φάση $π/6$

**δ.** Τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση όταν η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση.

**ε.** Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας τη στιγμή $t_2 = π/60\ s$

Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

*Αρτέμιος Σαράντης*

Απ.[α. $\sqrt{3}m/s$, $2kg$, β. $A = 2/15\,m$, $ω = 10rad/s$, γ. $10N$, ε. $-80\sqrt{3}/9\,j/s$]

**Υπολογισμός μάζας**

Θα υπολογίσουμε την τάση του νήματος ως συνάρτηση της απομάκρυνσης $x$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Η μέγιστη τιμής της τάσης προκύπτει για $x = -A$ και η ελάχιστη για $x = +A$

Από τις εξισώσεις:

$$T_{max} = T_θ \quad και \quad T_{min} = 0$$

Θα υπολογίσουμε το πλάτος $A$ και την μάζα $m_2$

**Αρχική φάση**

Τη στιγμή που αρχίζει την ταλάντωση του το συσσωμάτωμα έχει απομάκρυνση $x = A/2$ και θετική ταχύτητα.

Στο ερώτημα γ θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση (δες την λύση)

**4.48 Λύση**

**α.** $\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 - 2gH} = \sqrt{16 - 20 \cdot 0{,}65} = \sqrt{3}\boldsymbol{m/s}$

**β.** Το συσσωμάτωμα κάνει ΑΑΤ και η θέση ισορροπίας κατέρχεται κατά: $d = m_2 g/k$
Τη στιγμή που αρχίζει την ταλάντωση του το συσσωμάτωμα έχει απομάκρυνση $x = d$ και ταχύτητα $V$

$$V = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\upsilon$$

Θα υπολογίσουμε την τάση του νήματος $T$ ως συνάρτηση της απομάκρυνσης
Το ελατήριο ασκεί δύναμη $F_{\varepsilon\lambda}$ στο συσσωμάτωμα και $F'_{\varepsilon\lambda}$ στη ράβδο
Θεμελιώδης νόμος για το συσσωμάτωμα μάζας $M = m_1 + m_2$

$$\Sigma F = Ma \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - Mg = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = Mg - kx \quad \kappa\alpha\iota \quad F'_{\varepsilon\lambda} = kx - Mg$$

Ισορροπία ράβδου:

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \frac{T}{2}l + F'_{\varepsilon\lambda}l - w\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \frac{T}{2} + F'_{\varepsilon\lambda} - \frac{w}{2} = 0 \Rightarrow T + 2F'_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \Rightarrow$$

$$T + 2F'_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \Rightarrow T = w - 2F'_{\varepsilon\lambda} = 20 - 2(kx - Mg) = 20 + Mg - 2kx$$

$$T = 20 + 2Mg - 2kx \ (1)$$

Η ελάχιστη τιμή της Τ προκύπτει για $x = A$ και είναι $T = 0$
Η μέγιστη τιμή της Τ προκύπτει για $x = -A$ και είναι $T = 160$

$$x = A \Rightarrow 20 + 2Mg - 2kA = 0 \qquad (2)$$

$$x = -A \Rightarrow 20 + 2Mg + 2kA = 160 \quad (3)$$

Πρόσθεση κατά μέλη θα βρούμε την $M$

$$40 + 4Mg = 160 \Rightarrow 4Mg = 120 \Rightarrow 4M = 12 \Rightarrow M = 3kg \Rightarrow \boldsymbol{m_2 = 2kg}$$

$$\omega = \sqrt{k/M} = 10rad/s$$

**γ.** Από την (2) προκύπτει το πλάτος: $20 + 60 - 600A = 0 \Rightarrow A = 80/600 = \boldsymbol{2/15\,m}$
Για $t = 0$ είναι $x = d = m_2 g/k = 20/300 = 1/15\,m = A/2$

$$\boldsymbol{x = \frac{2}{15}\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

**δ.** $\upsilon = 0 \Rightarrow x = A = 2/15 \Rightarrow T = 0$

Όταν $T = 0$ στη ράβδο ασκούνται τρείς δυνάμεις από τις οποίες οι δύο ( $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}, \vec{w}$ ) είναι κατακόρυφες , άρα και η δύναμη από την άρθρωση θα είναι κατακόρυφη

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F + F'_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \Rightarrow F = -F'_{\varepsilon\lambda} + w = 0 = Mg - kx + w \Rightarrow$$

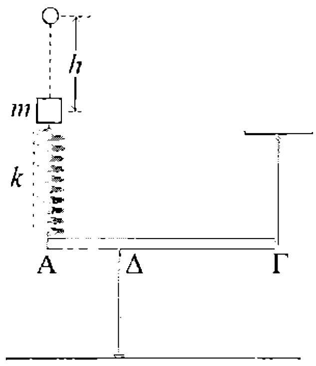
$$F = 30 + 20 - 300(2/15) = 50 - 40 = \boldsymbol{10N}$$

**ε.** $x = \frac{2}{15}\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{2}{15}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{15} \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 10\frac{2}{15}\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

$$\frac{dK_2}{dt} = m_2 a\upsilon = -m_2\omega^2 x\upsilon - m_2\omega^2 x\upsilon = -200\frac{\sqrt{3}}{15}\frac{2}{3} = -\boldsymbol{\frac{80\sqrt{3}}{9}j/s}$$

205

**4.49** Η ομογενής δοκός ΑΓ του σχήματος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια υποστηρίγματος στο σημείο Δ. Το άκρο της Γ είναι στερεωμένο στο κατώτερο άκρο κατακόρυφου νήματος ενώ στο άκρο της Α είναι δεμένο το κατώτερο άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ πάνω στο οποίο ισορροπεί σώμα $\Sigma_2$ μάζας $m_2 = m = 1kg$ . Σε ύψος $h$ πάνω από το σώμα $\Sigma_2$ συγκρατούμε ακίνητο ένα σώμα $\Sigma_1$ μάζας $m_1 = m$. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σώμα $\Sigma_1$ και μετά από λίγο συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα $\Sigma_2$. Βρείτε:




**α.** Το ρυθμό μεταβολής της ελατηριακής δυναμικής ενέργειας αμέσως μετά την κρούση.
**β.** Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
**γ.** Την αλγεβρική τιμής της δύναμης που δέχεται η δοκός από το ελατήριο.
**δ.** Την αλγεβρική τιμή της δύναμης που δέχεται η δοκός από το υποστήριγμα ως συνάρτηση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του.
**ε.** Την τάση του νήματος ως συνάρτηση της απομάκρυνσης και δείξτε ότι το νήμα μόλις που δεν χαλαρώνει.

Απ. [α. $5\sqrt{6}j/s$, β. $0{,}2m$, γ. $20 + 100x$, δ. $(400x + 160)/3$, ε. $(20 - 100x)/3$]



**Μέτρα και αλγεβρικές τιμές παραλλήλων δυνάμεων**

Στα διανύσματα γνωστής κατεύθυνσης $\vec{N}, M\vec{g}, \vec{T}$ τα σύμβολα $N, Mg, T$ αναφέρονται στο μέτρο τους το οποίο είναι θετικό.
Η αλγεβρική τιμή προκύπτει θα είναι $\pm(N, Mg, T)$ ανάλογα με τη θετική φορά την οποία θα επιλέξουμε.
Για δυνάμεις που η κατεύθυνση τους δεν είναι γνωστή διότι μεταβάλλεται πχ οι δυνάμεις $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}, \vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ που ασκεί το ελατήριο στα σώματα που συνδέει το σύμβολο $F_{\varepsilon\lambda}, F'_{\varepsilon\lambda}$ αναφέρεται στις αλγεβρικές τους τιμές.
Οι δυνάμεις $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}, \vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ είναι αντίθετες και άρα θα είναι:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda}$$

Την αλγεβρική τιμή της $F_{\varepsilon\lambda}$ την υπολογίζουμε από τη σχέση που ισχύει για τη συνισταμένη δύναμη. Με θετική φορά προς τα πάνω:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg - kx$$

$$F'_{\varepsilon\lambda} = kx - mg$$

Όταν υπολογίζουμε την ροπή της δύναμης $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ ως προς κάποιο άξονα την δύναμη $F'_{\varepsilon\lambda}$ θεωρούμε ότι έχει θετική φορά.

**4.49 Λύση**

**α.** ΑΔΜΕ για την κίνηση σφαίρας πριν την κρούση : $\upsilon = \sqrt{2gH}$

ΑΔΟ για την κρούση: $(m_1 = m_2 = m)$: $V = 1/2\,\upsilon = 1/2\sqrt{2gH} = \sqrt{6}/2$

Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται προς τα κάτω και η ελατηριακή δυναμική ενέργεια αυξάνει :

$$dU_{\varepsilon\lambda}/dt > 0$$

Η αλγεβρική τιμή της ελατηριακής δύναμης συμβολίζεται με $F_{\varepsilon\lambda}$ και είναι $F_{\varepsilon\lambda} = -mg$

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{F\varepsilon\lambda}}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda}V = -(-mg)V = \mathbf{5\sqrt{6}j/s}$$

**β.** Η θέση ισορροπίας κατέρχεται κατά: $d = mg/k = 0{,}1m$

$t_o = 0$ το συσσωμάτωμα έχει απομάκρυνση $x = -d = -0{,}1m$ και ταχύτητα $V = \sqrt{6}/4$
Για την ενέργεια της ταλάντωσης.

$$E = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}2mV^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}100\frac{1}{100} + \frac{1}{2}2\frac{6}{4} = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2E/k} \Rightarrow \boldsymbol{A = 0,2m}$$

**γ.** Το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + 2mg = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -2mg - kx$$

Οι δυνάμεις στην ράβδο $\vec{N}, M\vec{g}, \vec{T}$ και η $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ είναι κατακόρυφες.

$$F'_{\varepsilon\lambda} = 2mg + kx \Rightarrow \boldsymbol{F'_{\varepsilon\lambda} = 20 + 100x}$$

**δ. Πως βρίσκουμε την N ως συνάρτηση της x**

Θα πάρουμε ροπές ως προς το Γ για να απαλλαγούμε από την T . Την άγνωστη δύναμη την θεωρούμε ως θετική.

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda}\frac{4L}{4} + Mg\frac{2L}{4} - N\frac{3L}{4} = 0 \Rightarrow 4F'_{\varepsilon\lambda} + 2Mg = 3N \Rightarrow$$

$$4(20 + 100x) + 80 = 3N \Rightarrow 3N = 400x + 160 \Rightarrow \boldsymbol{N = \frac{400x + 160}{3}}$$

$$x = -A = -0{,}2 \ \text{είναι} \ N = N_{min} = \frac{80}{3}$$

$$x = A = 0{,}2 \ \text{είναι} \ N = N_{max} = \frac{240}{3} = 80N$$

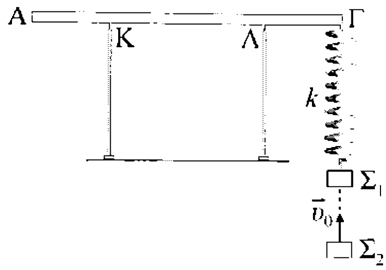
**ε. Τάση Νήματος:** $\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} + Mg - N - T = 0 \Rightarrow$

$$T = F'_{\varepsilon\lambda} + Mg - N = 20 + 100x + 40 - \frac{400x + 160}{3} \Rightarrow$$

$$T = \frac{300x + 180 - 400x - 160}{3} \Rightarrow \boldsymbol{T = \frac{20 - 100x}{3}}$$

$$x = 0{,}2m \Rightarrow T_{min} = 0$$

$$x = -0{,}2m \Rightarrow T_{max} = \frac{40}{3}$$




**4.50** Ομογενής δοκός ΑΓ μήκους $l = 8m$ και μάζας $M = 6kg$ στηρίζεται σε δύο στηρίγματα Κ και Λ τα οποία απέχουν κατά $d = 2m$ από τα άκρα Α και Γ αντίστοιχα. Στο άκρο Γ έχει στερεωθεί το άνω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200N/m$ στο κάτω άκρο του οποίου έχει στερεωθεί σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 2kg$ που ισορροπεί. Σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2$ κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και την $t_o = 0$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα μάζας $m_1$ έχοντας ακριβώς πριν την κρούση ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 4m/s$. Το σώμα $m_1$ μετά την κρούση κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και όταν διέρχεται από την θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης .

**α.** Βρείτε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από τα στηρίγματα πριν την κρούση

**β.** Γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος $m_1$ σαν συνάρτηση του χρόνου, θεωρώντας ως θετική φορά την προς τα πάνω.

**γ.** Βρείτε την μάζα του σώματος $Σ_2$

**δ.** Υπολογίστε το χρονικό διάστημα που το ελατήριο είναι συσπειρωμένο στη διάρκεια της πρώτης ταλάντωσης.

**ε.** Εξετάστε αν η δοκός κινδυνεύει να ανατραπεί στην διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος $m_1$ και δείξτε γραφικά πως μεταβάλλονται οι δυνάμεις από τα στηρίγματα σαν συνάρτηση της απομάκρυνσης του σώματος $Σ_1$ από την θέση ισορροπίας. 

**Απ.** [α. $20N$ , $60N$, β. $x = 0{,}2\eta\mu 10t \quad (S.I.)$ γ. $2/3\, kg$, δ. $\pi/15\, s$, ε. οριακά όχι]

**Ισορροπία Στερεού Σώματος**

Οι δυνάμεις $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ από τα στηρίγματα είναι κατακόρυφες και έχουν φορά προς τα πάνω και τα σύμβολα $N_1, N_2$ αναφέρονται στα μέτρα τους

**Υπολογισμός των δυνάμεων στήριξης $N_1, N_2$**

Αφού υπολογίσουμε την αλγεβρική τιμή της ελατηριακής δύναμης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση στη συνέχεια με τις σχέσεις.

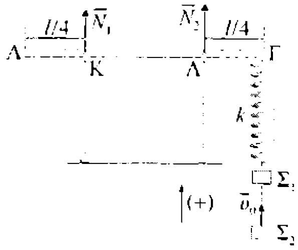
$$\Sigma\tau_{(\Lambda)} = 0 \quad και \quad \Sigma F = 0$$

Βρίσκουμε τα μέτρα των δυνάμεων $N_1, N_2$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση $x$ και υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή τους η οποία αν είναι ίση με μηδέν σημαίνει οριακή ισορροπία. Όσο δεν συμβαίνει ανατροπή ισχύει:

$$N_1 \geq 0 \quad και \quad N_2 \geq 0$$

Όταν το μέτρο κάποια από τις δύο γίνει μηδέν τότε αρχίζει περιστροφή της ράβδου ως προς το στήριγμα που διέρχεται η άλλη

**4.50 Λύση**




**α.** ισορροπία του σώματος μάζας $m_1$ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = m_1 g \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20N$$

Το ελατήριο ασκεί αντίθετη δύναμη στη ράβδο

$$F'_{\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = -m_1 g = -20N$$

$$\Sigma\tau_{(\Lambda)} = 0 \Rightarrow -N_1\frac{l}{2} + w\frac{l}{4} + F'_{\varepsilon\lambda}\frac{l}{4} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{N_1 = 20N}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + F'_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow \boldsymbol{N_2 = 60N}$$

**β.** Η ταλάντωση έχει $\varphi_o = 0$ και $\omega = \sqrt{k/m_1} = 10rad/s$. Στη θέση ισορροπίας

$$F_{\varepsilon\lambda} = m_1 g \Rightarrow k\Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_1 = m_1 g/k \Rightarrow \Delta l_1 = 20/200 = 0{,}1m$$

Στη ΘΦΜ η απομάκρυνση είναι $x = \Delta l_1 = 0{,}1m$, και $K = 3U$, επομένως:

$$E = K + U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow 1/2\, kA^2 = 4\, 1/2\, kx^2 \Rightarrow A = 2x \Rightarrow \boldsymbol{A = 0{,}2m}.$$

Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι: $\boldsymbol{x = 0{,}2\eta\mu 10t \quad (S.I.)}$ (1)

**γ.** αμέσως μετά την κρούση το$m_1$ : $\upsilon'_1 = \upsilon_{max} = \omega A = 10 \cdot 0{,}2 \Rightarrow \upsilon'_1 = 2m/s$.
Η κρούση είναι κεντρική ελαστική με το σώμα $m_1$ ακίνητο πριν την κρούση, ενώ το $m_2$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_0 = 4m/s$ .

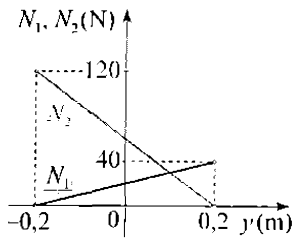
$$\upsilon'_1 = 2m_2\upsilon_0/(m_1 + m_2) \Rightarrow 2m_1 + 2m_2 = 8m_2 \Rightarrow \boldsymbol{m_2 = 2/3\ kg}$$

**δ.** Στη θέση φυσικού μήκους είναι $x = 0{,}1m$ από την οποία βρίσκουμε τις χρονικές στιγμές $t_1 = \pi/60\, s$ και $t_2 = 5\pi/60\, s$ . $\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \boldsymbol{\Delta t = \pi/15\, s}$.

**ε.** Θα βρούμε τις συναρτήσεις $N_1 = f(x)$ και $N_2 = f(x)$. Είναι $F_{\varepsilon\lambda}, F'_{\varepsilon\lambda}$ οι δυνάμεις στο συσσωμάτωμα Μ και τη δοκό από το ελατήριο.

$$\Sigma 1{:}\ \Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - Mg = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = Mg - kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20 - 200x$$

$$F'_{\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda} = kx - m_1 g \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = 200x - 20$$




$$\Sigma\tau_{(\Lambda)} = 0 \Rightarrow -N_1\frac{l}{2} + Mg\frac{l}{4} + F'_{\varepsilon\lambda}\frac{l}{4} = 0 \Rightarrow$$

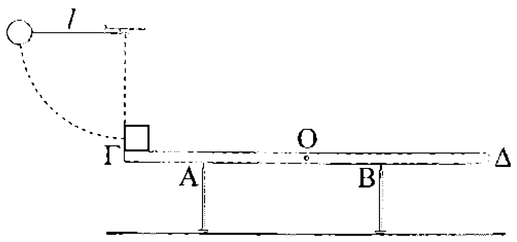
$$N_1 = \frac{1}{2}(Mg + F'_{\varepsilon\lambda}) \Rightarrow N_1 = 20 + 100x$$

$$N_1 = 20 + 100x \rightarrow \begin{cases} x = -0{,}2m \ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ N_1 = 0 \\ x = +0{,}2m \ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ N_1 = 40N \end{cases}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + F'_{\varepsilon\lambda} - Mg = 0 \Rightarrow N_2 = Mg - F'_{\varepsilon\lambda} - N_1$$

$$\Rightarrow N_2 = 60 - 300x\ (S.I.) \begin{cases} x = -A = -0{,}2m \ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ N_2 = 120N \\ x = +A = +0{,}2m \ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ N_2 = 0N \ \ (o\rho\iota\alpha\kappa\acute{\eta}) \end{cases}$$

Τελικά η ράβδος οριακά δεν ανατρέπεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης




**4.51** Μια λεία ομογενής ράβδος μάζας $M = 5kg$ και μήκους $L = 4m$ ισορροπεί οριζόντια με δύο στηρίγματα Α και Β τα οποία απέχουν από τα άκρα της Γ και Δ αποστάσεις $ΑΓ = ΒΔ = 1m$. Στο άκρο Γ ισορροπεί μικρός κύβος μάζας $m_2 = 2kg$. Μικρή σφαίρα Σ μάζας $m_1 = 0{,}5kg$ είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους $l = 1{,}2m$ και συγκρατείται σε θέση που το νήμα είναι οριζόντιο. Δίνουμε στη σφαίρα κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon_o$ και η σφαίρα ξεκινάει να κινείται με αρχική κινητική ενέργεια $K_o = 1{,}84j$. Κάποια στιγμή $t_o = 0$ η σφαίρα φτάνει στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της συγκρούεται κεντρικά με μικρό κύβο. Στη συνέχεια ο κύβος ολισθαίνει κατά μήκος της ράβδου ενώ το σώμα Σ αλλάζει φορά κίνησης μετά την κρούση και τη στιγμή $t_1$ που θα σχηματίσει για πρώτη φορά γωνία $\varphi = 60^o$ με την κατακόρυφο η ταχύτητα του έχει μέτρο $\upsilon = 2m/s$. Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Βρείτε:

**α.** Τις δυνάμεις που δέχεται η ράβδος από τα στηρίγματα πριν την κρούση και το είδος της κρούσης με κριτήριο την διατήρηση ή όχι της μηχανικής ενέργειας.

**β.** Το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της σφαίρας τη στιγμή $t_1$

**γ.** Το μέτρο μεταβολής της ορμής και της στροφορμής της σφαίρας από τη στιγμή που τέλειωσε η κρούση ως τη στιγμή $t_1$

**δ.** Τις δυνάμεις που δέχεται η ράβδος από τα στηρίγματα σαν συνάρτηση της απόστασης του κύβου από το άκρο Γ

**ε.** Τη χρονική στιγμή που η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται.

Δίδεται $g = 10m/s^2$ και $\sqrt{31{,}36} = 5{,}6$

Απ. [β. $5\sqrt{3}j/s$, γ. $\sqrt{3}\ kgm/s$, $-1{,}2kgm^2s^{-1}$, δ. $10x + 15$ , $55 - 20x$, ε. $275/12s$]

**Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας**

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{βαρους}}{dt} = \left(\frac{dW_{ακτ}}{dt} + \frac{dW_{εφ}}{dt}\right)$$

**Μεταβολή Στροφορμής**

Τα $\vec{L}_{αρχ}$, $\vec{L}_{τελ}$ έχουν ίδια διεύθυνση και χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές.

$$ΔL = L_{τελ} - L_{αρχ}$$

Οι στροφορμές αναφέρονται ως προς το σταθερό σημείο του νήματος.

**Περιστροφή της ράβδου**

Η περιστροφή της ράβδου αρχίζει ως προς κάποιο στήριγμα όταν το μέτρο της δύναμης από το άλλο στήριγμα γίνει ίσο με μηδέν.

**4.51 Λύση**

**α.** Η δοκός ισορροπεί $\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow m_2 g(KA) - Mg(OA) + N_B(AB) = 0 \Rightarrow$

$$N_B(AB) + m_2 g(\Gamma A) = Mg(OA) \Rightarrow 2N_B = 50 \cdot 1 - 20 \cdot 1 \Rightarrow \boldsymbol{N_B = 15N}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_A + N_B = Mg + m_2 g \Rightarrow N_A + N_B = 70N \Rightarrow \boldsymbol{N_A = 55N}$$

Την ταχύτητα του σώματος μάζας $m_1$ λίγο πριν την κρούση με ΑΔΜΕ ($\upsilon_o^2 = 7{,}36$)

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2gl} = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1{,}2} = \sqrt{31{,}36} = 5{,}6m/s$$

ΑΔΜΕ για την κίνηση του σώματος μάζας $m_1$ μετά την κρούση . Όταν η γωνία γίνει $60^o$ το ύψος από το σημείο της κρούσης είναι $h = l/2$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = m_1 g\frac{l}{2} + \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon_1' = \sqrt{\upsilon^2 + gl} = \sqrt{4 + 10 \cdot 1{,}2} = \sqrt{16} = 4m/s$$

$$A\Delta O(\kappa\rho o\acute{\upsilon}\sigma\eta):\ m_1\upsilon_1 = -m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Rightarrow 0{,}5 \cdot 5{,}6 = -0{,}5 \cdot 4 + 4 \cdot \upsilon_2' \Rightarrow$$

$$4{,}8 = 4 \cdot \upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_2' = 1{,}2m/s$$

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = 5{,}6 - 4 = 1{,}6\,m/s \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_2 + \upsilon_2' = 1{,}2 \ \Rightarrow A\nu\varepsilon\lambda\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ K\rho o\acute{\upsilon}\sigma\eta$$

**β.** Γνωρίζουμε προκαταβολικά ότι είναι θετικός $dU/dt > 0$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_W}{dt} = -\left(\frac{dW_{\alpha\kappa\tau}}{dt} + \frac{dW_{\varepsilon\varphi}}{dt}\right) = -\frac{dW_{\varepsilon\varphi}}{dt} = -(-m_1 g\upsilon\eta\mu\theta) = m_1 g\upsilon\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$0{,}5 \cdot 10 \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}j/s$$

**γ.** Η (αρχική) ορμή του $m_1$ αμέσως μετά την κρούση είναι οριζόντια και έχει μέτρο

$$p' = m_1\upsilon_1' = 0{,}5 \cdot 4 = 2kgm/s$$

Η (τελική) ορμή του $m_1$ όταν το νήμα σχηματίζει γωνία $60^o$ έχει μέτρο

$$p'' = m_1\upsilon = 0{,}5 \cdot 2 = 1kgm/s$$

Τα διανύσματα $\vec{p}'', p'$ σχηματίζουν γωνία $\theta = 60^o$ : $\Delta\vec{p} = \vec{p}'' - \vec{p}' = \vec{p}'' + (-\vec{p}')$

Τα διανύσματα $\vec{p}'', -\vec{p}'$ σχηματίζουν γωνία $\varphi = 120^o$

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1(-1/2)} = \boldsymbol{\sqrt{3}\,kgm/s}$$

Η μεταβολή της στροφορμής είναι: $\Delta l = L'' - L' = l(p'' - p') = \boldsymbol{-1{,}2kgm^2s^{-1}}$

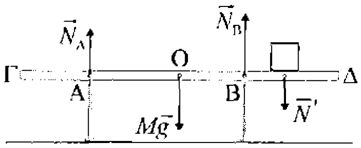
**δ.** Μετά την κρούση το σώμα μάζας $m_2$ κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Όταν ο κύβος βρίσκεται σε απόσταση x από το Γ.

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_B(AB) = m_2 g(x - A\Gamma) + Mg\,(AB)/2 \Rightarrow$$

$$2N_B = 20(x-1) + 50 \Rightarrow N_B = 10(x-1) + 25 \Rightarrow$$

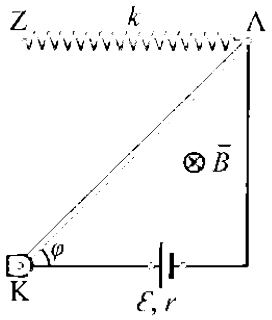
$$\boldsymbol{N_B = 10x + 15}$$




$$N_A + N_B = 70 \Rightarrow N_A + 10x + 15 = 70 \Rightarrow \boldsymbol{N_A = 55 - 20x}$$

**ε.** Η ανατροπή αρχίζει όταν $N_A = 0 \Rightarrow 55 = 20x \Rightarrow x = 2{,}75m$

$$s = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{2{,}75}{1{,}2} = \boldsymbol{\frac{275}{12}s}$$




**4.52** Ευθύγραμμος ομογενής αγωγός ΚΛ έχει μήκος $l = 0{,}5\text{m}$, μάζα $m = 1kg$ και αντίσταση ανά μονάδα μήκους $R^* = 3\Omega/\text{m}$. Ο αγωγός συνδέεται με ηλεκτρική πηγή, που έχει ΗΕΔ $\mathcal{E} = 50\text{V}$ και εσωτερική αντίσταση $r = 1\Omega$, δημιουργώντας κλειστό κύκλωμα όπως στο σχήμα. Ο αγωγός μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο του Κ. Στην περιοχή υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι οριζόντιες με φορά που φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Λ του αγωγού είναι δεμένο στο άκρο μονωτικού, οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 25\ \text{N/m}$ και φυσικού μήκους $L_o = 30cm$. Για τη γωνία $\varphi$ ισχύει $\eta\mu\varphi = 0{,}6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}8$. Αν ο αγωγός ισορροπεί, βρείτε:

**α.** Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

**β.** Το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο αγωγός από τον άξονα Κ.

**γ.** Την ΗΕΔ που έπρεπε να έχει η πηγή ώστε ο αγωγός ΚΛ να ισορροπεί στην ίδια θέση χωρίς την ύπαρξη του ελατηρίου.

**δ.** Το μέτρο της δύναμης από τον άξονα Κ στην περίπτωση που ο αγωγός ισορροπεί χωρίς το ελατήριο.

[$g = 10\ \text{m/s}^2$,τα καλώδια συνδεσμολογίας έχουν ασήμαντο βάρος, $\sqrt{66{,}25} = 8{,}14$]

Απ. [α. $B = 0{,}5T$, β. $8{,}14N$, γ. $80V$, δ. $6N$]

**Ισορροπία τριών δυνάμεων**

Αν ένα στερεό ισορροπεί με την επίδραση τριών μη παραλλήλων δυνάμεων τότε οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο.΄

**Υπολογισμός της ροπής δύναμης**

Η αλγεβρική τιμή της ροπής δύναμης ως προς κάποιον άξονα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της δύναμης

$$\tau_F = \tau_{Fx} + \tau_{Fy}$$

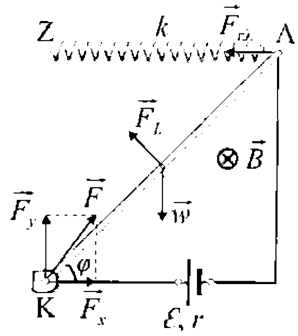
Στον υπολογισμό της ροπής ισχύει η αρχή της μεταβιβαστικότητας σύμφωνα με την οποία η δύναμη μπορεί να μετακινείται πάνω στο φορέα της χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμα που προκαλεί.

**Δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα περιστροφής**

Όταν οι άλλες δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό έχουν ίδια διεύθυνση τότε και η δύναμη από τον άξονα θα έχει ίδια διεύθυνση με τις υπόλοιπες δυνάμεις.

Αν οι υπόλοιπες δυνάμεις δεν έχουν ίδια διεύθυνση τότε αναλύουμε την δύναμη από τον άξονα σε δύο συνιστώσες $F_x, F_y$ από τον υπολογισμό των οποίων βρίσκουμε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$

**4.52 Λύση**




**α.** Η αντίσταση του αγωγού ΚΛ είναι:

$$R = R^{*}l = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5\Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{50}{1{,}5 + 1} = 20A$$

Το μήκος του ελατηρίου $L$ είναι ίσο με:

$$L = l\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}4m$$

Η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι:

$$\Delta l = L - L_o = 0{,}4 - 0{,}3 \Rightarrow \Delta l = 0{,}1m$$

Η δύναμη του ελατηρίου έχει μέτρο :

$$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l = 25 \cdot 0{,}1 = 2{,}5N$$

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} l\eta\mu\varphi + F_L\frac{l}{2} - mg\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow 2{,}5 \cdot 0{,}6 + \frac{F_L}{2} - 10\frac{0{,}8}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$1{,}5 + \frac{F_L}{2} - 4 = 0 \Rightarrow \frac{F_L}{2} = 2{,}5N \Rightarrow F_L = 5N$$

$$F_L = BIl \Rightarrow B = \frac{F_L}{Il} = \frac{5}{20 \cdot 0{,}5} \Rightarrow \boldsymbol{B = 0{,}5T}$$

**β.** Η δύναμη F από τον άξονα αναλύεται σε δύο συνιστώσες $(F_x, F_y)$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x - F_{\varepsilon\lambda} - F_{Lx} = 0 \Rightarrow F_x = F_{\varepsilon\lambda} + F_{Lx} = 2{,}5 + 5 \cdot 0{,}6 = 5{,}5N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y - w + F_{Ly} = 0 \Rightarrow F_x = w - F_{Ly} = 10 - 5 \cdot 0{,}8 = 6N$$

Το μέτρο της δύναμης θα είναι:

$$F_K = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5{,}5)^2 + (6)^2} \Rightarrow F_K = \sqrt{66{,}25} = \boldsymbol{8{,}14N}$$

**γ.** Για να ισορροπεί χωρίς το ελατήριο πρέπει

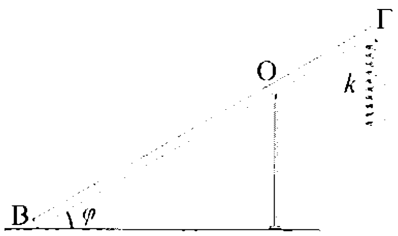
$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_L'\frac{l}{2} = mg\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow F_L' = mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow F_L' = 8N$$

$$F_L{}' = BI'l \Rightarrow I' = \frac{8}{0{,}5 \cdot 0{,}5} = 32A$$

$$\mathcal{E}' = I' \cdot R_{o\lambda} = 32 \cdot (1{,}5 + 1) = 32 \cdot 2{,}5 = \boldsymbol{80V}$$

**ε.** Η δύναμη $F'$ από τον άξονα θα διέρχεται από το μέσον της ράβδου άρα θα βρίσκεται πάνω στη ράβδο. Παίρνουμε ως άξονα $x'x$ την ράβδο

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F' = mg\eta\mu\varphi = 10 \cdot 0{,}6 = \boldsymbol{6N}$$




**4.53** Η ομογενής δοκός ΑΓ του σχήματος έχει μάζα $M = 12\,kg$ και μήκος $L = 5\,m$ και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\varphi = 30^o$ με το λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σημείο Ο που η απόσταση του από το Β είναι $BO = 4m$ υπάρχει ένα κατακόρυφο στήριγμα και στο άκρο Γ κρέμεται ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 200N/m$

**α.** Να εξηγήσετε ότι η δύναμη που δέχεται η δοκός από το στήριγμα είναι κατακόρυφη και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που δέχεται η δοκός στα σημεία $B$ και Ο.

**β.** Ποιος είναι ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής που πρέπει να εμφανίζεται στο σημείο Ο προκειμένου η δοκός να μην γλιστρήσει;

Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου στερεώνουμε σώμα μάζας $m = 8\,kg$ το οποίο αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί.

**γ.** Γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου

**δ.** Γράψτε την εξίσωση της δύναμης που δέχεται η δοκός από το ελατήριο ως συνάρτηση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης.

**ε.** Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης που δέχεται η δοκός από το οριζόντιο δάπεδο ως συνάρτηση της απομάκρυνσης να κάνετε το διάγραμμα $N = f(x)$ και να εξετάσετε αν η δοκός χάνει την επαφή της με το οριζόντιο δάπεδο

[ Δίδεται $g = 10m/s^2$ ]

Απ. [β. $\sqrt{3}/3$ , γ. $0{,}1\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$, δ. $200x - 80$, ε. $\mathrm{N} = 50x + 25$]

**Δύναμη $\vec{A}$ από το υποστήριγμα- μη ολίσθηση**

Η αντίδραση $\vec{A}$ από το υποστήριγμα είναι κατακόρυφη διότι όλες οι άλλες δυνάμεις είναι κατακόρυφες και πρέπει να ισχύει: $\Sigma F_y = 0$.

Η δύναμη $\vec{A}$ αναλύεται στις συνιστώσες $N$ και $T_s$.

$$N = A\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \kappa\alpha\iota \quad T_s = A\eta\mu\varphi$$

Μη ολίσθηση

$$T_s \leq \mu_s N \Rightarrow A\eta\mu\varphi \leq \mu_s A\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu_s \geq \varepsilon\varphi\varphi$$

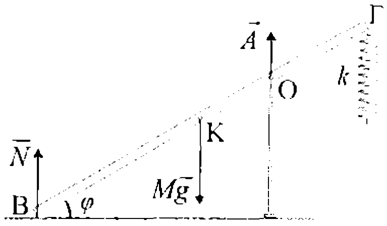
**Δύναμη από το οριζόντιο δάπεδο $\vec{N_A}$ μη απωλεια επαφής**

Επειδή το δάπεδο είναι λείο η δύναμη που ασκεί στη δοκό είναι κάθετη στο δάπεδο. Η δύναμη $\vec{N_A}$ είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω. Το μέτρο της μπορούμε να το υπολογίσουμε από την ισορροπία των ροπών ως προς το Ο

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0$$

Η δύναμη που δέχεται η δοκός από το ελατήριο είναι αντίθετη της δύναμης που δέχεται το σώμα μάζας $m$ από το ελατήριο.

**4.53 Λύση**




**α.** Στην δοκό ασκούνται τρείς δυνάμεις. Το βάρος της $\vec{w}_\delta$ ,η δύναμη $\vec{N}$ από το οριζόντιο επίπεδο και η αντίδραση $\vec{A}$ από το στήριγμα. Οι δύο δυνάμεις $\vec{w}_\delta$ και $\vec{N}$ είναι κατακόρυφες. Λόγω ισορροπίας και η δύναμη $\vec{A}$ θα είναι αντίθετη της συνισταμένης των άλλων δύο οπότε θα είναι κατακόρυφη.

**β.** $\Sigma F = 0 \Rightarrow N + A = Mg \Rightarrow N + A = 120N$ (1)

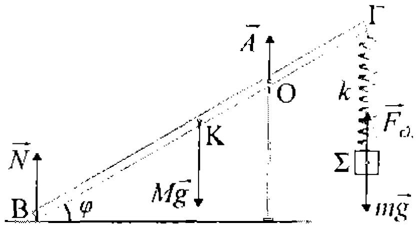
$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow N(BK)\sigma\upsilon\nu\varphi = A(OK)\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N = 0{,}6A$$

Από την (1) : $A = 75N$ $\kappa\alpha\iota$ $N = 45N$

Η δύναμη Α αναλύεται σε δύο συνιστώσες την $\vec{N}_A$ και την στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$

$$N_A = A\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \kappa\alpha\iota \quad T_\sigma = A\eta\mu\varphi$$

$$M\eta\ o\lambda\acute{\iota}\sigma\theta\eta\sigma\eta:\ T_\sigma \leq \mu_\sigma N \Rightarrow A\eta\mu\varphi \leq \mu_\sigma A\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$




**γ.** Το σώμα μάζας $m$ θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση $\pi/2$.Η θέση ισορροπίας βρίσκεται πιο κάτω από τη θέση του φυσικού μήκους κατά $\Delta l_o$

$$\Delta l_o = mg/k = 80/200 = 0{,}4m$$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 0{,}1m$.Η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = \sqrt{k/m} = 5rad/s$$

$$x = A\eta\mu(\omega t + \pi/2) = 0{,}1\eta\mu(5t + \pi/2)$$

**δ.** Με $F_{\varepsilon\lambda}, F'_{\varepsilon\lambda}$ συμβολίζουμε τις αλγεβρικές τιμές των δυνάμεων που ασκεί το ελατήριο στο σώμα και τη δοκό. $F'_{\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda}$

Υπολογισμός της $F_{\varepsilon\lambda}$ : $\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg = -kx \Rightarrow$ $F_{\varepsilon\lambda} = mg - kx$

Η δύναμη $F'_{\varepsilon\lambda}$ θα είναι: $F'_{\varepsilon\lambda} = kx - mg = 200x - 80$

**ε.** Θεωρούμε τυχαία απομάκρυνση $x$ για την οποία η δοκός ισορροπεί.

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda}(O\Gamma)\sigma\upsilon\nu\varphi - N(OA)\sigma\upsilon\nu\varphi + Mg\sigma\upsilon\nu\varphi(OM) = 0$$

$$N(OA) = F'_{\varepsilon\lambda}(O\Gamma) + Mg(OM) \Rightarrow N \cdot \frac{4}{5}l = (kx - mg) \cdot \frac{l}{5} + Mg\frac{3l}{10} \Rightarrow N = 50x + 25$$

$$H\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\ \chi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \acute{o}\tau\alpha\nu:\quad N = 0 \Rightarrow 50x + 25 = 0 \Rightarrow x = -\frac{25}{50} = -0{,}5m$$

Η απομάκρυνση δεν παίρνει ποτέ την τιμή $x = -0{,}5m$ διότι το πλάτος είναι $A = 0{,}4m$ και άρα δεν χάνεται η επαφή της δοκού με το οριζόντιο δάπεδο.

## ΚΥΜΑΤΑ

**4.54** Ένα ελαστικό μέσον ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$. Το σημείο Ο $(x = 0)$ κάνει αρμονική ταλάντωση στον άξονα $y'y$ με εξίσωση $y = Aημωt$. Ένα σημείο Γ που βρίσκεται στη θέση $Γ(x_Γ = 0{,}8m)$ αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από το σημείο Ο και η η απομάκρυνσης του από την θέση ισορροπίας του δίδεται από την εξίσωση: $y_Γ = 0{,}2ημπ(10t - 4)$, υπολογίστε:
**α.** Την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
**β.** Την φάση του Γ τη χρονική στιγμή που το Ο έχει διανύσει διάστημα $s = 1{,}8m$.
**γ.** Το πλήθος των σημείων του ελαστικού μέσου με ταχύτητα μέγιστου μέτρου τη χρονική στιγμή $t$ που το σημείο Γ έχει διανύσει διάστημα $s = 0{,}4m$.
**δ** Κάντε τις γραφικές παραστάσεις.
**i.** Της φάσης του σημείου Μ σε συνάρτηση με το χρόνο, αν Μ είναι το μέσον της $ΟΓ$. Στο ίδιο διάγραμμα να φαίνεται και η φάση των σημείων Ο και Γ
**ii.** Της απομάκρυνσης του σημείου Μ μέχρι τη χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Γ.

Απ. [α. $2m/s$, β. $π/2$, γ. 6 σημεία]

**Στιγμιότυπο Εγκάρσιου Κύματος**

Το στιγμιότυπο δείχνει την θέση των σημείων του μέσου $(xx)$ κάποια στιγμή τ και αποτελεί την γραφική παράσταση της εξίσωσης

$$y = Aημ2π\left(\frac{τ}{T} - \frac{x}{λ}\right)$$

Για την χάραξη του στιγμιότυπου τη στιγμή τ πχ $[τ = 2{,}5T]$ εργαζόμαστε ως εξής:

**Βήμα 1. [Βρίσκουμε πεδίο ορισμού του $x$]**

Υπάρχουν δύο τρόποι να βρούμε μέχρι που έχει διαδοθεί το κύμα.
**Α τρόπος:** $x = υτ = υ \cdot 2{,}5T = 2{,}5λ$
**Β τρόπος :** Για τα σημεία που έχει φτάσει το κύμα ισχύει:

$$φ \geq 0 \Rightarrow 2π\left(\frac{2{,}5T}{T} - \frac{x}{λ}\right) \geq 0 \Rightarrow x \leq 2{,}5λ$$

**Βήμα 2 [ Βρίσκουμε πεδίο τιμών]**

Η συνάρτηση είναι ημιτονοειδής παίρνει τιμές $-A \leq y \leq A$.

Με λίγες τιμές μπορούμε να χαράξουμε την γραφική παράσταση.

Αρκεί να βρούμε τις τιμές $y$ για : $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{λ/4}$, $\boldsymbol{x = υτ}$.

$$x = 0 \Rightarrow y = Aημ2π2{,}5 = Aημ5π = 0$$

$$x = \frac{λ}{4} \Rightarrow y = Aημ2π(2{,}5 - 0{,}25) = Aημ4{,}5π = Aημ\left(4π + \frac{π}{2}\right) = A$$

$$x = υτ \Rightarrow y = Aημ0 = 0$$

**4.54 Λύση**

**α.** Για την απομάκρυνση του σημείου Γ ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} y_Γ = Aημ2π(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}) \\ \\ y_Γ = 0{,}2ημ2π(5t - 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_Γ}{λ} = 2 \Rightarrow x_Γ = 2λ \Rightarrow λ = \frac{x_Γ}{2} = 0{,}4m \Rightarrow$$

$$1/T = 0{,}2 \Rightarrow f = 5Hz \Rightarrow T = 0{,}2s$$

$$υ = λf \Rightarrow υ = 0{,}4 \cdot 5 = \mathbf{2m/s}$$

**β.** Σε κάθε περίοδο το διάστημα είναι ίσο με $4A$

$$s = 1{,}8m = 9 \cdot A = 8A + A = 2 \cdot 4A + A$$

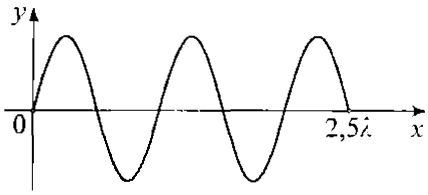
$$t_1 = 2T + \frac{T}{4} = \frac{9T}{4}$$

$$φ_Γ = 2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right), t \geq \frac{x_Γ}{υ} = 2T$$

$$t_1 = \frac{9T}{4} \Rightarrow φ_Γ = 2π(2{,}25 - 2) = 2π \cdot 0{,}25 = 0{,}5π \Rightarrow \boldsymbol{φ_Γ = \frac{π}{2}}$$

**γ.** $x_Γ = 2λ$ άρα το Γ ξεκινά να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_Γ = 2T$.
Όταν $s_Γ = 0{,}4m = 2A$ το Γ θα έχει κάνει μισή ταλάντωση οπότε θα είναι:

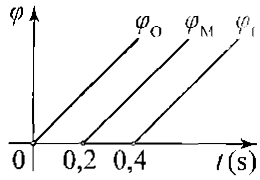
$$t = t_Γ + 0{,}5T = 2{,}5T$$




Το κύμα έχει φτάσει σε απόσταση 2,5λ.
Στο σχήμα βλέπουμε το στιγμιότυπο για $2{,}5T$
**Μέγιστο μέτρο ταχύτητας** έχουν τα σημεία με απομάκρυνση $\boldsymbol{y = 0}$
Αριθμός αυτών των σημείων είναι **6 σημεία.**

**δ. i.** Το σημείο $M(x_M = λ)$ αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t = T = 0{,}2$.

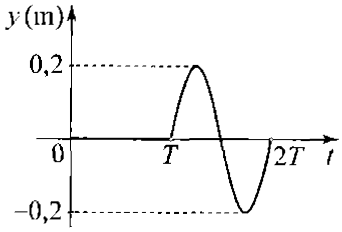
$$φ_M = 2π\left(\frac{t}{T} - 1\right), φ_M \geq 0 \Rightarrow t \geq T$$




Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των φάσεων των διαφόρων σημείων είναι ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, διότι έχουν ίδια κλίση που είναι ίση με την ω.

**ii.** Η απομάκρυνση του Μ είναι:

$$y_M = 0{,}2ημ2π(5t - 1), \quad t \geq T$$



**4.55** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 2m/s$ σε γραμμικό ελαστικό μέσον που συμπίπτει με άξονα $x'x$. Το σημείο Ο αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_o = 0$ με θετική ταχύτητα μέτρου $2\pi m/s$. Δύο σημεία Κ και Λ τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $x_K = 0{,}5m$ και $x_\Lambda = 0{,}6m$ έχουν κάποια χρονική στιγμή $t_1$ στιγμή φάσεις $\varphi_K = 1{,}5\pi\, rad$ και $\varphi_\Lambda = \pi\, rad$ αντίστοιχα.
**α.** Βρείτε την κατεύθυνση διάδοσης και γράψτε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.
**β.** Υπολογίστε τη χρονική στιγμή $t_1$ και σχεδιάστε το στιγμιότυπο την ίδια στιγμή.
**γ.** Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του Ο όταν η ταχύτητα του Κ γίνει μέγιστη.
Αν τη στιγμή $t_1$ η απόσταση των σημείων Κ και Λ είναι $d$ και τη στιγμή $t_2$ ξαναγίνεται ίση με $d$ για δεύτερη φορά μετά τη στιγμή $t_1$
**δ**. Δείξτε γραφικά την φάση της ταλάντωσης των σημείων του θετικού ημιάξονα $Ox$ τη χρονική στιγμή $t_2$.
**ε.** Σχεδιάστε το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t_2$

Απ. [α.$y = 0{,}2\eta\mu 2\pi(5t - 2{,}5x)$, β.$0{,}4s$, γ. $0m/s, -200m/s^2$]

**Κατεύθυνση διάδοσης Κύματος**

Κάποιο σημείο αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $\tau$. Από τη στιγμή $\tau$ μέχρι κάποια στιγμή $t$ η φάση της ταλάντωσης του σημείου έχει αυξηθεί κατά $\Delta\varphi$

$$\varphi_\kappa = \omega\Delta t = \omega(t - \tau)$$

Για δύο σημεία Κ και Λ για τα οποία το Κ ταλαντώθηκε πριν από το Λ ισχύει:

$$\tau_K < \tau_\Lambda \Rightarrow -\tau_K > -\tau_\Lambda \Rightarrow t - \tau_K > t - \tau_\Lambda \Rightarrow \varphi_K > \varphi_\Lambda$$

**Απόσταση δύο σημείων του ελαστικού μέσου Εγκάρσιου κύματος**

Στο στιγμιότυπο εγκάρσιου κύματος παρατηρούμε όρη και κοιλάδες.
Η απόσταση $d$ δύο σημείων είναι πάντα:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Οι θέσεις ισορροπίας βρίσκονται στον άξονα $xx$ και η απόσταση τους είναι:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

Η απόσταση δύο σημείων μένει σταθερή όταν τα δύο σημεία ταλαντώνονται σε συμφωνία φάσης.

$$d = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \;\Rightarrow\; \Delta\varphi = 2\kappa\pi \;\; (\Sigma\upsilon\mu\varphi\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \varphi\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma)$$

Αν η διαφορά φάσης δύο σημείων είναι $\pi/2$ τότε όταν το ένα βρίσκεται σε ακραία θέση το άλλο βρίσκεται στην θέση ισορροπίας και η απόσταση τους τότε είναι d τότε μετά από χρόνο $T/4$ η απόσταση τους θα είναι και πάλι ίση με $d$

**4.55 Λύση**

**α.** $\varphi_K > \varphi_\Lambda$ διάδοση από το **Κ προς το Λ** (προς την θετική κατεύθυνση).

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_K - \varphi_\Lambda = 2\pi \dfrac{d}{\lambda} \\ \varphi_K - \varphi_\Lambda = \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 2\pi\frac{d}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4d \Rightarrow \lambda = 4 \cdot 0{,}1 = \mathbf{0{,}4m}$$

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{2}{0{,}4} = 5Hz \Rightarrow T = 0{,}2s \Rightarrow \omega = 10\pi rad/s$$

Το πλάτος θα το υπολογίσουμε από την μέγιστη ταχύτητα

$$V_{max} = \omega A \Rightarrow 2\pi = 10\pi A \Rightarrow A = 0{,}2m$$

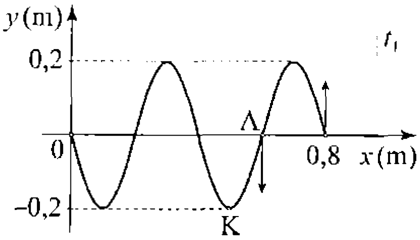
$$\boldsymbol{y = 0{,}2\eta\mu 2\pi(5t - 2{,}5x)}$$

**β.** Την χρονική στιγμή $t_1$ θα την υπολογίσουμε από την φάση του Κ ή του Λ

$$\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$1{,}5\pi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{0{,}5}{0{,}4}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{t_1}{T} - \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{t_1}{T} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{t_1 = 2T = 0{,}4s}$$




Τη στιγμή $t_1 = 2T$ το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $2\lambda = 0{,}8m$.

**γ.** Όταν η ταχύτητα του Κ γίνει μέγιστη τότε η ταχύτητα του Λ θα είναι μηδέν ενώ η απομάκρυνση του θα είναι $y_\Lambda = -A$

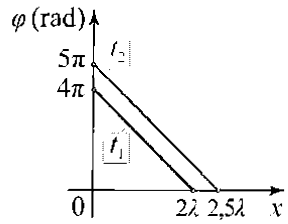
Τα σημεία Ο και Λ ταλαντώνονται με αντίθεση φάσης διότι η απόσταση τους είναι ίση με $x_\Lambda = 1{,}5\lambda$. Έτσι τα σημεία Ο και Λ θα έχουν κάθε στιγμή αντίθετη απομάκρυνση, ταχύτητα και επιτάχυνση.

$$V_o = -V_\Lambda = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad y_o = -y_\Lambda = A$$

$$a_o = -a_\Lambda = -\omega^2 A = -100\pi^2 0{,}2 = \boldsymbol{-200m/s^2}$$

**δ.** Θα υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή $t_2$.

Η απόσταση $d$ των σημείων Κ και Λ τη στιγμή $t_1$ είναι υποτείνουσα $K\Lambda$ ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές $A$ και $\lambda/4$.



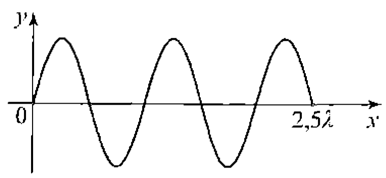

Μετά από χρόνο $T/4$ το $K$ θα είναι στον άξονα $xx$ ενώ το Λ θα είναι στη θέση $y = -A$ και η απόσταση των Κ και Λ θα είναι πάλι ίση με $d$.

Μετά από χρόνο $T/2$ η απόσταση των Κ και Λ θα είναι ίση με d για δεύτερη φορά μετά την $t_1$.

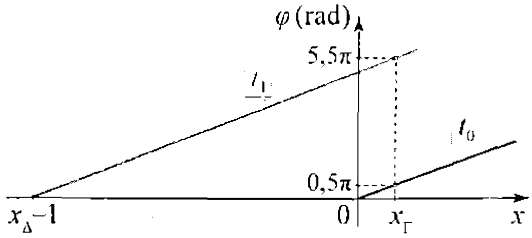
Η στιγμή $t_2$ είναι:

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2} = 2{,}5T$$

**ε.** Το στιγμιότυπο τη στιγμή $t_2$ φαίνεται στο σχήμα



**4.56** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται στον άξονα $x'x$. Η μέγιστη ταχύτητα του σημείου $O(x=0)$ είναι $V_{max} = \pi\upsilon$. Στο σχήμα βλέπουμε τις φάσεις ταλάντωσης των σημείων του μέσου τις χρονικές στιγμές $t_o = 0$ και $t_1 = 0{,}5s$. Τα σημεία Γ και Δ έχουν τετμημένες $x_\Gamma$ και $x_\Delta = -1$.




**α.** Εξηγείστε ποια είναι φορά διάδοσης του κύματος και γράψτε την εξίσωση του.
**β.** Γράψτε τις χρονικές εξισώσεις της φάσης των σημείων $\Gamma$ και $\Delta$ και δείξτε γραφικά πως μεταβάλλονται με το χρόνο οι φάσεις των σημείων αυτών.
**γ.** Δείξτε γραφικά πως μεταβάλλεται με το χρόνο η απομάκρυνση του σημείου $\Gamma$
**δ.** Βρείτε τη στιγμή χρονική στιγμή $t_2 = 0{,}65s$ πόσα σημεία μεταξύ των $\Gamma$ και $\Delta$ έχουν ταχύτητα μέγιστου μέτρου.

Απ. [α.$\Gamma \to \Delta$ , $y = 0{,}2\eta\mu 2\pi(5t + 2{,}5x)$, β. $2\pi(5t + 0{,}25)$, $2\pi(5t - 2{,}5)$, δ. 6 ]

**Διερεύνηση του τύπου $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ σε ένα αρμονικό κύμα**

**α.** Μεταβολή φάσης ενός σημείου $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

Το $\Delta t$ παίρνει οποιαδήποτε τιμή και έτσι η $\Delta\varphi$ είναι πάντα θετική.

**β.** Διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων Κ και Λ

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

Το $\Delta t$ παίρνει μία τιμή και είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα για να διαδοθεί από το ένα σημείο στο άλλο.

$$\Delta t = \frac{|\Delta x|}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\frac{|\Delta x|}{\upsilon} = 2\pi\frac{|\Delta x|}{\lambda}$$

**Σημεία που το κύμα έχει φτάσει πριν φτάσει στο σημείο O(x=0)**

Το σημείο $O(x=0)$ δεν είναι υποχρεωτικό να είναι η πηγή του κύματος. Είναι η αρχή του άξονα $x'x$ . Όταν το κύμα φτάνει στο Ο ξεκινάμε να μελετάμε το κύμα μηδενίζοντας το χρονόμετρο.

Αν υπάρχουν σημεία που ταλαντώθηκαν πριν το κύμα φτάσει στο Ο τότε τη χρονική στιγμή $t_o$ η φάση αυτών των σημείων θα είναι μεγαλύτερη του μηδενός.
Έτσι το σημείο Γ θα το αντιμετωπίσουμε ως ένα σημείο που κάνει αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση $\pi/2$

**4.56 Λύση**

**α.** Το κύμα διαδίδεται προς την **αρνητική κατεύθυνση**.

Από τη στιγμή $t_o = 0$ ως την $t_1 = 0{,}5s$ η φάση του σημείου Γ αυξάνει κατά $5\pi$ .

Το ίδιο αυξάνει και η φάση του Ο οπότε η φάση του Ο τη στιγμή $t_1$ είναι ίση με $5\pi$

Η εξίσωση της φάσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}5s$ είναι: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

$$x = 0 \Rightarrow \varphi_{(o)} = 2\pi\frac{t_1}{T} \Rightarrow 5\pi = 2\pi\frac{t_1}{T} \Rightarrow \frac{t_1}{T} = 2{,}5 \Rightarrow t_1 = 2{,}5T \Rightarrow$$

$$T = t_1/2{,}5 = 0{,}5/2{,}5 = \boldsymbol{0{,}2s} \Rightarrow f = 5Hz \Rightarrow \omega = 10\pi\, rad/s$$

$$x = -1 \quad \text{είναι } \varphi_\Delta = 0 \Rightarrow 0 = 2\pi\left(2{,}5 + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow -2{,}5 = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow$$

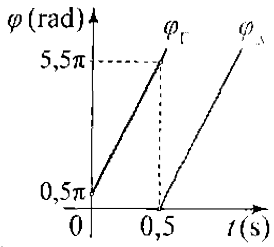
$$x = -2{,}5\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{-1}{2{,}5} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0{,}4m}$$

$$\upsilon = \lambda f = 0{,}4 \cdot 5 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 2m/s}$$

$$V_{max} = \omega A \Rightarrow \pi\upsilon = 10\pi A \Rightarrow A = 0{,}2m \Rightarrow \boldsymbol{y = 0{,}2\eta\mu 2\pi(5t + 2{,}5x)}$$

**β**. Τα σημεία Γ και Ο έχουν διαφορά φάσης $\pi/2$ άρα $x_\Gamma = \lambda/4$

$$\varphi_\Gamma = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_\Gamma}{\lambda}\right) = \boldsymbol{2\pi(5t + 0{,}25)}$$



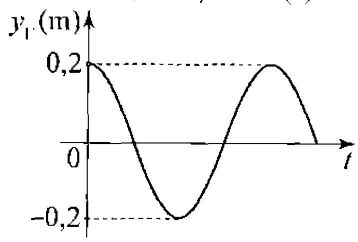

$t = 0$ είναι $\varphi_\Gamma = \pi/2$ για $t = 2{,}5T$ είναι $\varphi_\Gamma = 5\pi$

$$\varphi_\Delta = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_\Delta}{\lambda}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_\Delta = 2\pi(5t - 2{,}5)}$$

$$\varphi_\Delta \geq 0 \Rightarrow \frac{t}{T} \geq 2{,}5 \Rightarrow t \geq 0{,}5s$$

Οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες (σχήμα)

**γ.** Η απομάκρυνση του σημείου Γ είναι:




$$y_\Gamma = 0{,}2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_\Gamma}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4}\right)$$

Για $t = 0$ είναι $\varphi_\Gamma = \pi/2$ και έτσι θα είναι:

$$y_\Gamma = A\eta\mu\,\pi/2 = A = 0{,}2$$

**δ.** $t_2 = 0{,}65s = 0{,}6 + 0{,}05 = 3T + \frac{T}{4} = 13\frac{T}{4}$ το κύμα έχει προχωρήσει κατά: $d = \upsilon(13T/4) = 13\,\lambda/4$ και έχει φτάσει στο $x = -13\lambda/4$.

Τα σημεία που έχουν μέγιστη ταχύτητα κατά μέτρο θα είναι τα σημεία των οποίων η φάση τη χρονική στιγμή $t_2$ θα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pi$

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{13}{4} + \frac{x}{\lambda}\right) = \kappa\pi \Rightarrow \frac{13}{4} + \frac{x}{\lambda} = \frac{\kappa}{2} \Rightarrow \frac{x}{\lambda} = \frac{\kappa}{2} - \frac{13}{4} \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{13}{4}\right)\lambda = \left(2\frac{\kappa}{4} - \frac{13}{4}\right)\lambda \Rightarrow x = (2\kappa - 13)\frac{\lambda}{4}$$

$$-13\frac{\lambda}{4} < x < x_\Gamma \Rightarrow -13\frac{\lambda}{4} < (2\kappa - 13)\frac{\lambda}{4} < \frac{\lambda}{4} \Rightarrow -13 < 2\kappa - 13 < 1 \Rightarrow$$

$$0 < 2\kappa < 14 \Rightarrow 0 < \kappa < 7 \Rightarrow \kappa = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$$

Άρα υπάρχουν **6 σημεία**

**4.57** Η εξίσωση ενός γραμμικού αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του άξονα $x'x$ είναι:

$$y = 0{,}4\eta\mu 2\pi(2t - 5\frac{x}{6}) \quad (SI)$$

Αν κάθε σημείο ξεκινά να ταλαντώνεται με θετική ταχύτητα.

**α.** Να υπολογίσετε το μήκος κύματος $\lambda$ ,την ταχύτητα διάδοσης του κύματος $\upsilon$ και την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου.

**β.** Τη χρονική στιγμή $\tau = 1{,}25s$ δείξτε γραφικά

**i.** Την φάση ταλάντωσης των σημείων του άξονα $x'x$.

**ii.** Την απομάκρυνση των σημείων του μέσου από την θέση ισορροπίας.

**γ.** Τη στιγμή **τ** δύο σημεία Κ και Λ έχουν απομάκρυνση $y = A/2$ και η θέση ισορροπίας του Κ από το Ο είναι η ελάχιστη δυνατή ενώ η θέση ισορροπίας του Λ είναι η μέγιστη δυνατή βρείτε:

**i.** Την απόσταση των θέσεων ισορροπίας των σημείων Κ και Λ.

**ii.** Ποιο από τα σημεία Κ και Λ θα φτάσει πρώτο στη θέση ισορροπίας του μετά τη στιγμή **τ**.

Απ.[ α. $1{,}2m, 2{,}4\frac{m}{s,}, 1{,}6\pi\ \frac{m}{s}$ β. i. $2\pi\left(2{,}5 - 5\frac{x}{6}\right), 0{,}4\eta\mu 2\pi\left(2{,}5 - 5\frac{x}{6}\right)$,γ.i $2{,}8m$ ii.Κ]

**Σημεία που έχουν ίδια απομάκρυνση κάποια χρονική στιγμή**

Το πλήθος των σημείων του ελαστικού μέσου που έχουν την ίδια απομάκρυνση κάποια στιγμή μπορούμε να το υπολογίσουμε με δύο τρόπους.

**Α. γραφικά**

Κάνουμε το στιγμιότυπο τη στιγμή που μας ζητάνε και δείχνουμε στο σχήμα τα σημεία που ζητάμε

**Β υπολογιστικά** [Εστω $y = A/2$ ] τη χρονική στιγμή $t = 2{,}5T$

$$y = \frac{A}{2} \Rightarrow A\eta\mu 2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu 2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \left(\frac{29}{12} - \kappa\right)\lambda \quad (A)$$

$$2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \left(\frac{25}{12} - \kappa\right)\lambda \quad (B)$$

Το πλησιέστερο σημείο στο Ο προκύπτει από την (Β) για $\kappa = 2$ και είναι:

$$x = \frac{\lambda}{12}$$

Το πιο απομακρυσμένο σημείο από το Ο προκύπτει από την (Α) για $\kappa = 0$ και είναι:

$$x = \frac{29}{12}\lambda$$

**4.57 Λύση**

**α.** Από την $y = 0{,}4\eta\mu 2\pi(2t - 5\frac{x}{6})$ προκύπτει:

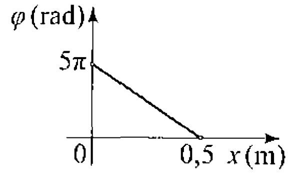
$$f = 2Hz \Rightarrow T = 0{,}5s \Rightarrow \omega = 2\pi f = 4\pi\frac{rad}{s} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{6} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 1{,}2m}$$

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 2{,}4m/s} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad V_{max} = 4\pi \cdot 0{,}4 = \boldsymbol{1{,}6\pi m/s}$$

**β. i.** $\tau = 1{,}25s = 2{,}5T$ έχει διαδοθεί σε απόσταση $2{,}5\lambda$.

$$\boldsymbol{\varphi = 2\pi\left(2{,}5 - 5\frac{x}{6}\right)}, \quad \varphi \geq 0 \Rightarrow x \leq 2{,}5\lambda \Rightarrow x \leq 0{,}3m$$

$$\gamma\iota\alpha \quad x = 0 \Rightarrow \varphi = 5\pi \quad \kappa\alpha\iota\, \gamma\iota\alpha \quad x = 3 \Rightarrow \varphi = 0$$

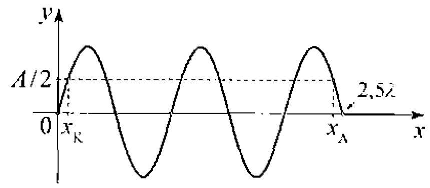



**ii.** Η εξίσωση απομάκρυνσης τη στιγμή $\tau = 2{,}5T$ είναι:

$$\boldsymbol{y = 0{,}4\eta\mu 2\pi\left(2{,}5 - 5\frac{x}{6}\right)}, x \leq 3m = 2{,}5\lambda$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$x = 2{,}5\lambda \Rightarrow y = 0$$
$$x = \lambda/4 \Rightarrow y = +A$$

Η γραφική παράσταση (στιγμιότυπο) στο σχήμα.




**γ. i.** Τα σημεία Κ και Λ φαίνονται στο διάγραμμα και έχουν:

$$y = \frac{A}{2} \Rightarrow A\eta\mu\varphi = \frac{A}{2} \Rightarrow \varphi_{\varepsilon\lambda} = \frac{\pi}{6}$$

Η ελάχιστη φάση αντιστοιχεί στο σημείο $\Lambda(x_\Lambda)$. Το κύμα έχει φτάσει ως το $Z(x_Z = 2{,}5\lambda)$

$$\varphi_\Lambda - \varphi_Z = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2\pi\frac{x_Z - x_\Lambda}{\lambda} \Rightarrow x_\Lambda = x_Z - \frac{\lambda}{12} = 5\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{12} = 29\frac{\lambda}{12} = 29\frac{1{,}2}{12} = 2{,}9m$$

Από την συμμετρία στο διάγραμμα του στιγμιότυπου θα είναι: $x_K = \lambda/12 = 0{,}1m$

Η απόσταση των θέσεων ισορροπίας θα είναι: $d = 29\frac{\lambda}{12} - \frac{\lambda}{12} = 28\frac{\lambda}{12} = \boldsymbol{2{,}8m}$

**Διαφορετικά:** $y = \frac{A}{2} \Rightarrow A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = \frac{A}{2}$ Τη στιγμή $\tau = 2{,}5T$

$$A\eta\mu 2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu 2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$x = 2{,}9 - 1{,}2\kappa \Rightarrow x = 2{,}9m, 1{,}7m, 0{,}5m$$

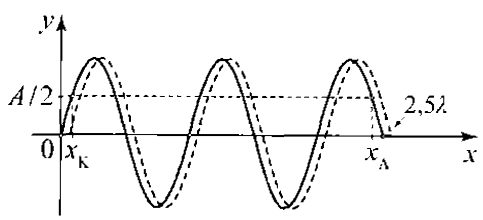
$$2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2{,}5 - \frac{x}{\lambda} = \kappa + \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{x}{\lambda} = \frac{25}{12} - \kappa \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{25}{12} - \kappa\right)\lambda \Rightarrow x = 2{,}5 - 1{,}2\kappa \Rightarrow x = 2{,}5m, 1{,}3m, 0{,}1m$$

Άρα : $x_K = 0{,}1m$, $x_\Lambda = 2{,}9m$ και $d = 2{,}8 - 0{,}1 = 2{,}8m$

**ii.** Τη στιγμή $\tau = 2{,}5T$ από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι $V_K < 0$ και $V_\Lambda > 0$

Άρα το Κ θα φτάσει πρώτο στη θέση ισορροπίας



**4.58** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται στον άξονα $x'x$ και η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Ο$(x = 0)$ δίδεται από τη σχέση:

$$V = \pi\sigma\upsilon\nu 5\pi t$$

Αν τη χρονική στιγμή $t_1$ που το κύμα φτάνει στο σημείο Δ $(x_\Delta = 2{,}25m)$ η φάση της ταλάντωσης του Ο είναι $\varphi_O = 4{,}5\pi$. Βρείτε:

**α.** Την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και γράψτε την εξίσωση του κύματος.

**β.** Την ταχύτητα ταλάντωσης του Ο τη χρονική στιγμή $\tau$ που η φάση του $\Delta$ είναι $\pi/2$.

**γ.** Αν τη στιγμή $\tau$ το κύμα έχει φτάσει στο σημείο $Z$ δείξτε γραφικά πως μεταβάλλεται με το χρόνο η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου $\Gamma$ μέχρι τη χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο $Z$. Το $\Gamma$ είναι ένα σημείο που η θέση ισορροπίας του είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζεται από τις θέσεις ισορροπίας των σημείων $O$ και $Z$.

**δ.** Σχεδιάστε το στιγμιότυπο τη στιγμή **τ**.

**ε.** Από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $\tau$ να βρείτε την κατεύθυνση της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων $(0), K(\,0{,}4m), M(1{,}2m\ \Lambda(2m)\kappa\alpha\iota\ Z$

Απ. [α. $2{,}5m/s$, $y = 0{,}2\eta\mu 2\pi(2{,}5t - x)$, β. $V_O = -\pi m/s$,]

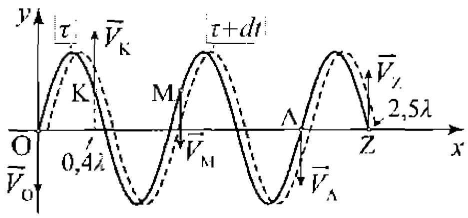
**Ταχύτητα ταλάντωσης κάποιου σημείου**

Αν το κύμα είναι εγκάρσιο τότε όλα τα σημεία ταλαντώνονται στον άξονα $y'y$

Η ταχύτητα ταλάντωσης κάθε σημείου δίδεται από την εξίσωση

$$V = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Την κατεύθυνση της ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου κάποια χρονική στιγμή μπορούμε να την υπολογίσουμε και γραφικά από το στιγμιότυπο κύματος.




Σχεδιάζουμε τα στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές $\tau$ και $\tau + dt$

Έτσι βλέπουμε στο σχήμα που βρίσκεται κάθε σημείο τις δύο χρονικές στιγμές και προς τα που μετατοπίστηκε στον άξονα $yy$.

Τα σημεία που μετατοπίστηκαν προς τα πάνω $(K, Z)$ έχουν θετική ταχύτητα

Τα σημεία που μετατοπίστηκαν προς τα κάτω (Ο, Μ,Λ) έχουν αρνητική ταχύτητα.

**Προσοχή!**

Αν μας ζητάνε το διάγραμμα της ταχύτητας ταλάντωσης $V_Z$ ενός σημείου του ελαστικού μέσου πρέπει να γνωρίζουμε ότι τη στιγμή $t_Z$ που αρχίζει να ταλαντώνεται το Ζ έχει μέγιστη ταχύτητα

$$V_Z = (max) = \omega A$$

**4.58 Λύση**

**α.** Η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega = 5\pi$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{5\pi}{2\pi} = 2{,}5Hz \Rightarrow T = 0{,}4s$$

Το κύμα διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση.
Τη στιγμή $t_1$ το κύμα φτάνει στο Δ και η φάση του Δ είναι: $\varphi_\Delta = 0$ οπότε:

$$2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Delta}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \frac{t_1}{T} = \frac{x_\Delta}{\lambda} \Rightarrow t_1 = \frac{x_\Delta}{\lambda}T \quad (1)$$

Την ίδια στιγμή $t_1$ η φάση του Ο είναι $4{,}5\pi$:

$$\varphi_o = 2\pi\frac{t_1}{T} \Rightarrow 4{,}5\pi = 2\pi\frac{t_1}{T} \Rightarrow t_1 = 2{,}25T \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{x_\Delta}{\lambda}T = 2{,}25T \Rightarrow x_\Delta = 2{,}25\lambda \Rightarrow 2{,}25 = 2{,}25\lambda \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 1m}$$

$$\upsilon = \lambda f = 1 \cdot 2{,}5 = \boldsymbol{2{,}5m/s}$$

$$V_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{V_{max}}{\omega} = \frac{\pi}{5\pi} \Rightarrow \boldsymbol{A = 0{,}2m}$$

$$\boldsymbol{y = 0{,}2\eta\mu 2\pi(2{,}5t - x)}$$

**β.**

$$\varphi_o - \varphi_\Delta = 4{,}5\pi \Rightarrow \varphi_o = 4{,}5\pi + \varphi_\Delta = 4{,}5\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_o = 5\pi}$$

$$\varphi_o = 5\pi \Rightarrow 2\pi\frac{\tau}{T} = 5\pi \Rightarrow \tau = 2{,}5T = 1s$$

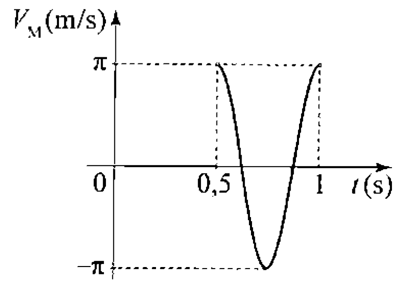
$$V_O = V_{max}\sigma\upsilon\nu 5\pi\pi = \boldsymbol{-\pi m/s}$$

**γ.**
Η θέση του σημείου Γ στον άξονα $x'x$ είναι:

$$x_\Gamma = \frac{x_Z}{2}$$

Το κύμα φτάνει στο σημείο Γ τη χρονική στιγμή $\tau'$

$$\tau' = \frac{\tau}{2} = 1{,}25T = T + \frac{T}{4} = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5s$$



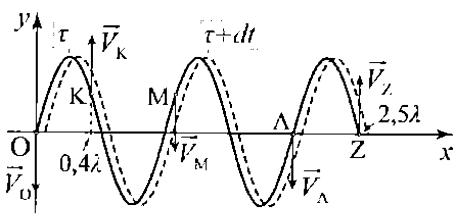

**δ.** Η χρονική στιγμή τ που το κύμα φτάνει στο Ζ είναι:

$$\tau = 2{,}5T$$

και το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση 2,5λ

**ε.** Από το σχήμα προκύπτει:

$V_o < 0\,, V_K > 0\,,\ V_M < 0\,, V_\Lambda < 0,\ V_Z > 0$



**4.59** Στον άξονα $x'x$ διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα προς την αρνητική κατεύθυνση. Η απομάκρυνση του σημείου Ο ως συνάρτηση του χρόνου είναι $y = 0{,}2\eta\mu\omega t$. Κάποια στιγμή $t_1$ δύο σημεία Κ και Λ με $x_K = -\lambda$ και $x_\Lambda$ έχουν ίδια απομάκρυνση ίδια ταχύτητα και έχουν διανύσει διαστήματα $s_K, s_\Lambda$ για τα οποία ισχύει $s_K - s_\Lambda = 0{,}8m$ ενώ η απόσταση τους είναι $d = 0{,}4m$. Το κύμα διαδίδεται από το ένα σημείο στο άλλο σε χρόνο $\Delta t = 0{,}2s$. Βρείτε:

**α.** Την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και γράψτε την εξίσωση του κύματος.

**β.** Το λόγο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του άξονα $x'x$ προς την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

**γ.** Την εξίσωση της φάσης των σημείων του άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή $t_2$ που αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Λ και κάντε την γραφική παράσταση.

**δ.** Την εξίσωση που δείχνει την θέση των σημείων του άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή $t_2$ και κάντε την γραφική παράσταση.

Απ. [α. Κ→Λ, $0{,}2\eta\mu 2\pi(5t + 2{,}5x)$,β. $\pi$, γ. $2\pi\left(2 + \frac{x}{\lambda}\right)$, δ.$0{,}2\eta\mu 2\pi\left(2 + \frac{x}{\lambda}\right)$

**Χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται κάποιο σημείο**

Έστω κύμα διαδίδεται με ταχύτητα υ σε γραμμικό ελαστικό μέσον που συμπίπτει με τον άξονα $x'x$ . Το σημείο Γ που βρίσκεται στην θέση $x_\Gamma$ αρχίζει να ταλαντώνεται κάποια στιγμή $t_\Gamma$την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε με δύο τρόπους. 

**Α τρόπος.**

- Αν το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση είναι $x_\Gamma > 0$

$$t_\Gamma = \frac{x_\Gamma}{\upsilon}$$

- Αν το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση είναι $x_\Gamma < 0$

$$t_\Gamma = \frac{x_\Gamma}{-\upsilon}$$

Πχ Για κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση το σημείο Ζ($x_Z = -2\lambda$)
Αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή

$$t_\Gamma = \frac{x_Z}{-\upsilon} = \frac{-\lambda}{-\upsilon}$$

**Β τρόπος**

Τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται ένα σημείο η φάση της ταλάντωσης του είναι μηδέν. Από τη σχέση $\varphi_\Gamma = 0$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή $t_\Gamma$
Για κύμα που διαδίδεται προς την θετική φορά:

$$\varphi_\Gamma = 0 \Rightarrow 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Gamma}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{x_\Gamma T}{\lambda} \Rightarrow$$

$$t = \frac{x_\Gamma T}{\upsilon T} = \frac{x_\Gamma}{\upsilon}$$

**4.59 Λύση**

**α.** Το Κ διάνυσε μεγαλύτερο διάστημα από το Λ άρα το Κ ταλαντώθηκε περισσότερο χρόνο. Άρα το κύμα διαδίδεται από το Κ προς το Λ.

Τα Κ, Λ ταλαντώνονται με συμφωνία φάσης και κάθε στιγμή απέχουν κατά:

$$d = k\lambda$$

$$s_K - s_\Lambda = 0{,}8 \Rightarrow s_K - s_\Lambda = 4A \Rightarrow s_K = s_\Lambda + 4A$$

Το Κ έχει κάνει μία ταλάντωση παραπάνω οπότε η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν τα κύματα στα σημεία Κ και Λ είναι: $\Delta t = T \Rightarrow T = 0{,}2s$

και η απόσταση $d$ θα είναι: $d = \lambda \;\Rightarrow\; \lambda = 0{,}4m$

$$\boldsymbol{y = 0{,}2\eta\mu 2\pi(5t + 2{,}5x)}$$

**Β.**

$$v = \lambda f \Rightarrow \boldsymbol{v = 0{,}4 \cdot 5 = 2m/s}$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι:

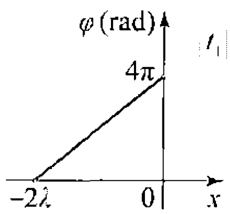
$$V_{max} = \omega A = 2\pi f \cdot A = 10\pi \cdot 0{,}2 = 2\pi \;\text{ άρα }\; \boldsymbol{V_{max}/v = \pi}$$

**γ.** Το σημείο Λ βρίσκεται στην θέση: $x_\Lambda = -2\lambda$

και αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_2 = 2T$

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

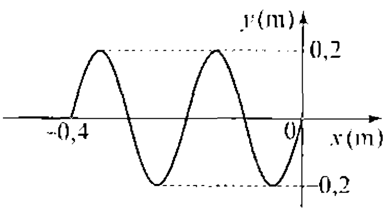
$$t_2 = 2T \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = 2\pi\left(2 + \frac{x}{\lambda}\right)}, x \geq -2\lambda$$




**δ.** Η εξίσωση $y = f(x)$ κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή τ αποτελεί την εξίσωση του στιγμιότυπου κύματος.

Η εξίσωση προκύπτει από την εξίσωση του κύματος και είναι αρμονική συνάρτηση του x.

Για το σχεδιασμό του στιγμιότυπου αρκεί να βρούμε τις τιμές του $y$ που προκύπτουν για διάφορες χαρακτηριστικές τιμές του $x$, όπως $x = 0$ , $x = \lambda/4$ καθώς την τιμή του $x$ που δείχνει μέχρι που έχει διαδοθεί το κύμα τη χρονική στιγμή τ




$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$t = t_2 = 2T \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(2 + \frac{x}{\lambda}\right), \;\; x \geq -2\lambda$$

**4.60** Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η αρχή $O$ ενός γραμμικού ελαστικού μέσου $x'x$ αρχίζει ταλάντωση στον άξονα $y'y$ χωρίς αρχική φάση. Η εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου $Γ$ του ελαστικού μέσου είναι:

$$y_Γ = 0{,}2ημ\,(20πt + π/2)\ \ (SI)$$

Τη στιγμή που το σημείο $Γ$ έχει εκτελέσει δύο πλήρεις ταλαντώσεις αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Δ με συντεταγμένη $x_Δ = -0{,}35m$. Βρείτε:

**α.** Την διαφορά φάσης μεταξύ Γ και Δ.
**β.** Την ταχύτητα διάδοσης και γράψτε την εξίσωση κύματος.
**γ.** Δείξτε γραφικά πως μεταβάλλεται:
**i.** Η φάση των σημείων Γ και Δ με το χρόνο (για $t \geq 0$ )
**ii.** Η φάση του κύματος τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο Δ.
**δ.** Γράψτε την εξίσωση απομάκρυνσης των σημείων του άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο Δ και την γραφική της παράσταση(στιγμιότυπο) στην περιοχή με $x \leq 0{,}15m$.

Απ. [α. $4π$, β. $2m/s$, $y = 0{,}2ημ2π(10t + 5x)$, δ. $y = Aημ2π\left(\frac{7}{4} + \frac{x}{λ}\right)$]

**Από το Διάγραμμα $φ = f(x)$ για δεδομένη στιγμή τ [ευθεία]**

- Βρίσκουμε την φορά προς την οποία διαδίδεται το κύμα
- Υπολογίζουμε την περίοδο $T$ και το μήκος κύματος $λ$ αν ξέρουμε την $τ$
- Μπορούμε να υπολογίσουμε την διαφορά φάσης δύο σημείων

**Από το διάγραμμα $φ = f(t)$ για δεδομένο $x$ [ευθεία]**

- Δεν μπορούμε να βρούμε την φορά διάδοσης του κύματος.
- Υπολογίζουμε την **περίοδο-συχνότητα** αφού η κλίση της της ευθείας είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα
- Μπορούμε να βρούμε την θέση του σημείου από τη χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται.

**Διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων τρέχοντος κύματος**

$$Δφ = 2π\frac{|Δx|}{λ}$$

**Συμφωνία φάσης:** $Δφ = 2κπ \Rightarrow |Δx| = κλ\ \ (κ\ ακέραιος)$

**Αντίθεση φάσης:** $Δφ = (2κ + 1)π \Rightarrow |Δx| = κλ\ \ (κ\ ακέραιος)$

**4.60 Λύση**

**α. i.** Κάθε στιγμή μετά την ταλάντωση του η φάση του Γ είναι μεγαλύτερη του Δ άρα το κύμα διαδίδεται από το Γ προς το Δ. Τη στιγμή που φτάνει το κύμα στο Δ είναι $\varphi_\Delta = 0$ ενώ το Γ έχει κάνει δύο πλήρεις ταλαντώσεις και άρα $\varphi_\Gamma = 4\pi$.

$$\varphi_\Gamma - \varphi_\Delta = 4\pi - 0 = \boldsymbol{4\pi}$$

**β.** Η απόσταση των Γ και Δ είναι: $d = 2\lambda \Rightarrow x_\Gamma - x_\Delta = 2\lambda \Rightarrow \boldsymbol{x_\Gamma = x_\Delta + 2\lambda}$ (1)

Η εξίσωση ταλάντωσης του Γ γράφεται: $y_\Gamma = 0{,}08\eta\mu\, 2\pi(10t + 1/4)$

$$\frac{x_\Gamma}{\lambda} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boldsymbol{x_\Gamma = \frac{1}{4}\lambda} \quad (2)$$

$$(1)\ \kappa\alpha\iota\ (2)\quad x_\Delta + 2\lambda = \frac{1}{4}\lambda \Rightarrow 2\lambda - \frac{1}{4}\lambda = -x_\Delta \Rightarrow 7\frac{\lambda}{4} = 0{,}35 \Rightarrow \lambda = 0{,}2m$$

$$f = 10Hz \Rightarrow T = 0{,}1s \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = \lambda f = \boldsymbol{2m/s}$$

Το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική φορά.

$$\boldsymbol{y = 0{,}2\eta\mu 2\pi(10t + 5x)}$$

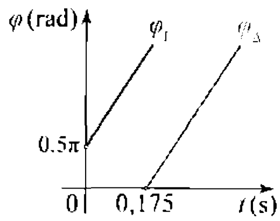
**γ. i.** Την θέση του σημείου Γ την βρίσκουμε από την (1)

$$x_\Gamma = -0{,}35 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}5 = \lambda/4$$

$$\varphi_\Gamma = (20\pi t + \pi/2), \qquad t \geq 0$$

$$\varphi_\Delta = 2\pi(10t + 5x_\Delta) = 20\pi t + 10\pi x_\Delta$$

$$\varphi_\Delta \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{3{,}5}{20} = 0{,}175s = 1{,}75T$$




**ii.** Το κύμα φτάνει στο Δ τη στιγμή $t_\Delta = -x_\Delta/\upsilon = 7T/4$ . Τη χρονική στιγμή $t_\Delta$ είναι:

$$\varphi = f(x) = 2\pi\left(\frac{7}{4} + 5x\right) \quad 1\text{ου βαθμού} \Rightarrow \text{ευθεία}$$

Για x=0 είναι $\varphi = 3{,}5\pi$ και για $x = -0{,}35m$ είναι $\varphi = 0$

Με τα ζεύγη τιμών $(0{,}3{,}5\pi)$ και $(-0{,}35{,}0)$ μπορούμε εύκολα να χαράξουμε την ευθεία

**δ.** Είναι $x_\Delta = -0{,}35m \Rightarrow x_\Delta = -7\lambda/4$ .

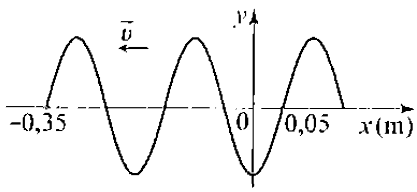
Το κύμα φτάνει στο Δ τη χρονική στιγμή

$$t_\Delta = 7\frac{T}{4}$$

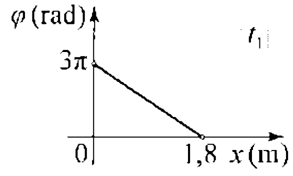
Και η εξίσωση του στιγμιότυπου είναι:

$$y = \boldsymbol{A\eta\mu 2\pi\left(\frac{7}{4} + \frac{x}{\lambda}\right)}, x \geq -7\frac{\lambda}{4}$$

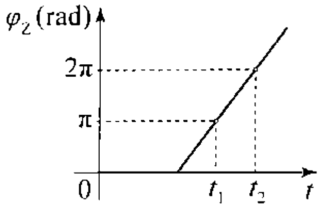
$$x = 0{,}15m = 3\frac{\lambda}{4}$$



**4.61** Σε γραμμικό μονοδιάστατο μέσον που ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$ διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση. Το σημείο Ο($x_o = 0$) κάνει απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση. Στο σχήμα (α) βλέπουμε τις φάσεις ταλάντωσης των σημείων του άξονα $x'x$ τη στιγμή $t_1$ ενώ στο σχήμα (β) βλέπουμε πως μεταβάλλεται με το χρόνο η φάση ενός σημείου Ζ. Αν είναι $t_2 = 0{,}4s$ και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης κάθε σημείου είναι $V = (2\pi/3)\cdot\upsilon$, όπου $\upsilon =$ ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Βρείτε:



**(α)**



**(β)**

**α.** Την θέση του Ζ και την περίοδο του κύματος.
**β.** Την εξίσωση του κύματος και κάντε το στιγμιότυπο κύματος τη στιγμή $t_1$.
**γ.** Την ταχύτητα του σημείου Ζ τη στιγμή $t_2$ αφού πρώτα σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2$
**δ.** Την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του σημείου Ζ, να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις και υπολογίσετε την ταχύτητα του Ζ όταν η απομάκρυνση του γίνεται ίση με $0{,}2m$ για δεύτερη φορά.
**ε.** Το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του $Z$ τις στιγμές $t_1$, και $t_3 = 0{,}35s$.
ζ. Την απόσταση $Z$ και $M(x = 1{,}8m)$ τη $t_3 = 0{,}35s$.



**4.61 Λύση**

**α.** Από το (α) την στιγμή $t_1$ είναι: $\varphi_o = 3\pi \Rightarrow 2\pi\frac{t_1}{T} = 3\pi \Rightarrow \boldsymbol{t_1 = 3/2\,T}$

Η διαφορά φάσης μεταξύ Ο($x = 0$) και $M(x = 1{,}8m)$ είναι:

$$\Delta\varphi = 3\pi \;\Rightarrow 2\pi\frac{x_M}{\lambda} = 3\pi \;\Rightarrow x_M = \frac{3}{2}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}x_M \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 1{,}2m} \quad (1)$$

$t = t_1$: είναι $\varphi_Z = \pi$ όπως προκύπτει από το (β) και $\varphi_M = 0$ όπως προκύπτει από το (α)

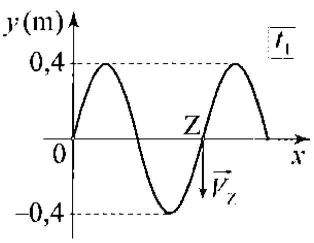
$$\varphi_Z - \varphi_M = 2\pi\frac{x_M - x_Z}{\lambda} \Rightarrow \pi - 0 = 2\pi\frac{x_M - x_Z}{\lambda} \Rightarrow x_M - x_Z = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$x_Z = x_M - \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_Z = 3\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x_Z = \lambda = 1{,}2m}$$

Το Ζ αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t_Z = T$. Από $t_Z$ έως $t_2$ είναι: $\Delta\varphi_Z = 2\pi$

$$\Delta\varphi_Z = 2\pi \Rightarrow \Delta t = T \Rightarrow t_2 - T = T \;\Rightarrow t_2 = 2T \;\Rightarrow T = t_2/2 = \boldsymbol{0{,}2s}$$

**β.** Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3/2\,T$ το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $3\lambda/2$ και το σημείο Ζ έχει ταχύτητα ίση με $-V_{max} = -V$




$$V = \frac{2\pi}{3}\upsilon \Rightarrow \omega A = \frac{2\pi}{3}\upsilon \Rightarrow \frac{2\pi}{T}A = \frac{2\pi}{3}\upsilon \Rightarrow A = \frac{\lambda}{3} = 0{,}4m$$

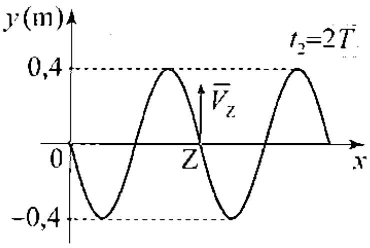
$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \mathbf{0,4\eta\mu 2\pi(5t - \frac{x}{1,2})}$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου τη στιγμή $t_1 = 3/2\,T$ είναι:

$$y = 0,4\eta\mu 2\pi(1,5 - \frac{x}{1,2})$$

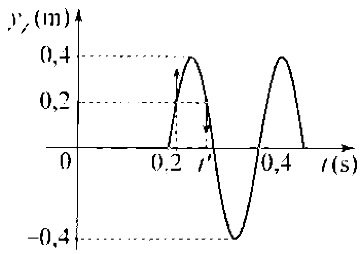
**γ.** Τη χρονική στιγμή $t_2 = 2T$ το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $2\lambda$

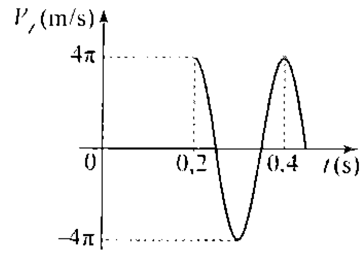
Το Ζ έχει ταχύτητα $+V_{max} = 2\pi f A = \mathbf{4\pi m/s}$




**δ.** Το σημείο Ζ $(x_Z = \lambda = 1,2m)$ αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $T = 0,2s$

$$y_Z = 0,4\eta\mu 2\pi(5t - 1), \quad t \geq 0,2s$$
$$V_Z = 4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(5t - 1), \quad t \geq 0,2s$$




Τη στιγμή $t'$ είναι: $y_Z = A/2$ για 2η φορά $\Rightarrow V_z = -\omega\sqrt{A^2 - A^2/4} = -2\pi \cdot \sqrt{3}$

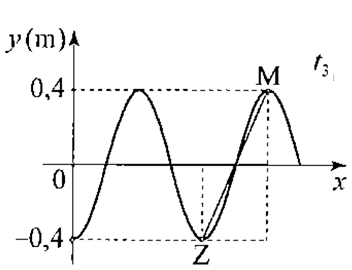
**ε.** $dV_z/dt = a = -\omega^2 y_Z$

$$t = t_1 = 1,5T \Rightarrow \varphi_Z = \pi \Rightarrow y_z = 0 \Rightarrow \boldsymbol{dV_z/dt = 0}$$
$$t = t_3 = 0,35s \Rightarrow \varphi_Z = 7\frac{\pi}{2} = 2\pi + 3\frac{\pi}{2} \Rightarrow y_Z = -A = -0,4$$
$$dV_z/dt = -\omega^2(-A) = \omega^2 A = \mathbf{400m/s^2}$$

**ζ.** $t = t_3 = 0,35s = 0,2 + 0,15 = T + 3/4\,T$
το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $7\lambda/4$.
Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t_3$
Τα σημεία Ζ και Μ έχουν απομακρύνσεις

$$y_Z = -A \;\; \kappa\alpha\iota \; y_M = +A$$

Κάνουμε το στιγμιότυπο τη στιγμή $t_3$ και με πυθαγόρειο θεώρημα :




$$d = \sqrt{(2A)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \mathbf{1m}$$

**4.62** Δύο σύγχρονες πηγές $\Pi_1$, $\Pi_2$ βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας υγρού και ταλαντώνονται κατακόρυφα με εξίσωση απομάκρυνσης $y = 0{,}1\eta\mu 10\pi t$ (SI). Ένα σημείο Ζ βρίσκεται σε απόσταση $r_1 = 0{,}6m$ από την πηγή $\Pi_1$ και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}3s$ με πλάτος ίσο με $0{,}1m$. Τη στιγμή $t_2 = 0{,}7s$ φτάνει στο Σ και το κύμα από την πηγή $\Pi_2$. Τα σημεία που κάνουν ταλάντωση ίδιου πλάτους με το σημείο Ζ βρίσκονται σε ένα κλάδο υπερβολής (μισή υπερβολή) που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ σε απόσταση $0{,}1m$ από το Κ.

**α.** Δείξτε γραφικά πως μεταβάλλεται η απομάκρυνση του Σ μέχρι τη χρονική στιγμή $\tau = 1s$.

**β.** Βρείτε την το πλάτος ταλάντωσης των σημείων της ευθείας ΚΛ που βρίσκονται έξω από το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

**γ.** Βρείτε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

**δ.** Αν μεταβάλλουμε μόνο τη συχνότητα των δύο πηγών και οι πηγές παραμείνουν σύγχρονες να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα των πηγών ώστε το τελικό πλάτος ταλάντωσης του σημείου Ζ να μην μεταβληθεί.

Απ. [β. $A' = 0$ , γ. $5 \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha$ , δ. $7{,}5Hz$]

**Χρονικές στιγμές άφιξης κυμάτων.**

Το κύμα από την πηγή $\Pi_1$ φτάνει πρώτο τη στιγμή $t_1$ και το κύμα από την πηγή $\Pi_2$ φτάνει δεύτερο τη χρονική στιγμή $t_2$

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \quad \kappa\alpha\iota \quad t_2 = \frac{r_2}{\upsilon}$$

**Καμπύλες ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο ΚΛ**

Αρκεί να βρούμε πλήθος σημείων ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το τμήμα ΚΛ
Η εξίσωση μιας καμπύλης ενισχυτικής συμβολής είναι της μορφής:

$$r_1 - r_2 = \kappa\lambda$$

Το κ είναι κάποιος ακέραιος αριθμός
Πχ για $\kappa = 2$ έχουμε την καμπύλη $r_1 - r_2 = 2\lambda$ η οποία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα σε ένα σημείο Ζ που οι αποστάσεις του από τις πηγές είναι $x_1, x_2$ και είναι:

$$x_1 + x_2 = d = \alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \pi\eta\gamma\acute{\omega}\nu$$

$$x_1 - x_2 = 2\lambda \quad (\varepsilon\nu\iota\sigma\chi\upsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta})$$

Αν η απόσταση είναι γνωστή εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $x_1 = x$ οπότε: $x_2 = d - x$

$$x - (d - x) = 2\lambda \Rightarrow 2x = d + 2\lambda \Rightarrow x = \frac{d}{2} + \lambda$$

Με αντικατάσταση του $x$ στη σχέση: $0 < x < d$

Βρίσκουμε τις επιτρεπτές τιμές του κ που είναι τόσες όσο και το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής στο τμήμα ΚΛ.

**4.62 Λύση**

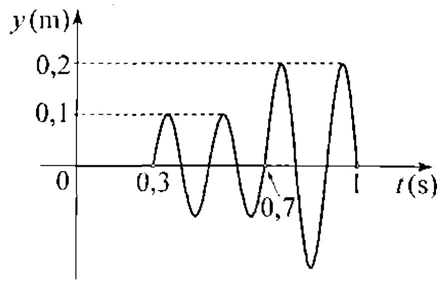
**α.** Η ταχύτητα διάδοσης είναι ίδια για τα δύο κύματα αφού διαδίδονται στο ίδιο μέσον. Αρκεί να υπολογίσουμε την ταχύτητα διάδοσης του ενός κύματος.

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \frac{r_1}{t_1} = 2\frac{m}{s} \quad \kappa\alpha\iota \quad t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \Rightarrow r_2 = \upsilon t_2 = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4m$$

Δίδεται: $y = 0{,}1\eta\mu 10\pi t$ οπότε: $\omega = 10\pi \Rightarrow 2\pi f = 10\pi \Rightarrow f = 5Hz$

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} = 0{,}4m$$

$$r_2 - r_1 = 1{,}4 - 0{,}6 = 0{,}8m$$




Παρατηρούμε ότι: $r_2 - r_1 = 2\lambda$ άρα το Ζ βρίσκεται στην καμπύλη ενισχυτικής συμβολής

$$r_2 - r_1 = \kappa\lambda\,, \quad \mu\varepsilon\ \kappa = 2$$

**β.** Θα υπολογίσουμε την απόσταση των πηγών

Δίδεται: $x_1 = 0{,}1 = 0{,}25\lambda$

$x_2 - x_1 = 2\lambda \Rightarrow x_2 = x_1 + 2\lambda \Rightarrow x_2 = 0{,}25\lambda + 2\lambda \Rightarrow x_2 = 2{,}25\lambda$

Η απόσταση των πηγών ΚΛ είναι: $d = x_2 + x_1 = 2{,}25\lambda + 0{,}25\lambda = 2{,}5\lambda$

Για τυχαίο σημείο εκτός των πηγών ισχύει:

$$|r_2 - r_1| = d = 2{,}5\lambda \Rightarrow \alpha\kappa\upsilon\rho\omega\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta} \Rightarrow \boldsymbol{A' = 0}$$

**γ.** Έστω ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ οι αποστάσεις του από τις πηγές $\Pi_1$, $\Pi_2$ είναι: $x_1 = x$ και $x_2 = d - x$

$$x_1 - x_2 = \kappa\lambda \Rightarrow x - (d - x) = \kappa\lambda \Rightarrow 2x = d + \kappa\lambda \Rightarrow x = \frac{d}{2} + \kappa\frac{\lambda}{2}$$

Για τις τιμές του $x$

$$0 < x < d \Rightarrow 0 < \frac{d}{2} + \kappa\frac{\lambda}{2} < d \Rightarrow -\frac{d}{2} < \kappa\frac{\lambda}{2} < \frac{d}{2} \Rightarrow -d < \kappa\lambda < d \Rightarrow$$

$$-2{,}5\lambda < \kappa\lambda < 2{,}5\lambda \Rightarrow -2{,}5 < \kappa < 2{,}5 \Rightarrow \kappa = -2, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow \boldsymbol{5\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha}$$

**δ.** Το σημείο Ζ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής για τις συχνότητες $f$ και $f'$

Συχνότητα $f \rightarrow$μήκος κύματος $\lambda$ : $r_2 - r_1 = 2\lambda$

Συχνότητα $f' \rightarrow$μήκος κύματος $\lambda'$ : $r_2 - r_1 = \kappa\lambda'$

$$2\lambda = \kappa\lambda' \Rightarrow \lambda = \kappa\frac{\lambda'}{2}$$

Αν $f' < f$ θα είναι $\lambda' > \lambda \Rightarrow \lambda < \lambda' \Rightarrow \frac{\kappa\lambda'}{2} < \lambda' \Rightarrow \kappa < 2 \Rightarrow \kappa = 1$

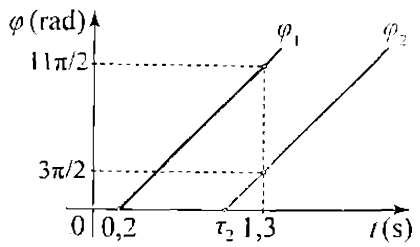
$$2\lambda = \kappa\lambda' \Rightarrow 2\frac{\upsilon}{f} = \kappa\frac{\upsilon}{f'} \Rightarrow 2f' = \kappa f \Rightarrow f' = \frac{1}{2}\kappa f$$

Η μικρότερη τιμή της $f'$ προκύπτει για $\kappa = 1$ και είναι:

$$f'_{\varepsilon\lambda} = \frac{f}{2} \Rightarrow f'_{min} = \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}5 = \boldsymbol{2{,}5Hz}$$

**4.63** Στα σημεία Κ και Λ επιφάνειας υγρού και σε απόσταση $d$ υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $\Pi_1$, $\Pi_2$ που ταλαντώνονται κατακόρυφα με απομάκρυνση

$$y = 0{,}1\eta\mu\omega t$$




Έτσι στην επιφάνεια του υγρού διαδίδονται δύο κύματα με την ίδια ταχύτητα $\upsilon = 0{,}5m/s$. Σε ένα σημείο Γ που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις δύο πηγές φτάνουν τα δύο κύματα. Η φάση ταλάντωσης του σημείου Γ που οφείλεται σε κάθε κύμα φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα Βρείτε:

**α.** Το πλάτος της ταλάντωσης που κάνει το σημείο Γ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων.

**β.** Την περίοδο και το μήκος κύματος των δύο κυμάτων.

**γ.** Την απόσταση $d$ των δύο πηγών.

**δ**. Πόσες καμπύλες ενισχυτικής συμβολής τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα.

**ε.** Αν η συχνότητα των πηγών υποδιπλασιαστεί δείξτε γραφικά την απομάκρυνση του σημείου Γ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απ. [α. $0{,}2m$, β. $0{,}4s$, $0{,}2m$, γ. $d = 3\lambda = 0{,}6m$ δ. $N = 5$ καμπύλες, ε.ακυρωτική]

**Σημεία ενισχυτικής ή ακυρωτικής συμβολής στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ** 

**Ένας τρόπος επαλήθευσης**

Η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων ενισχυτικής συμβολής είναι ίση με: $\lambda/2$
Και η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων ακυρωτικής συμβολής είναι ίση με: $\lambda/2$
Έστω ότι η απόσταση των πηγών είναι $d = 3\lambda$ και το πλήθος των σημείων ενισχυτικής ή ακυρωτικής συμβολής είναι $N$
Η απόσταση $|\Delta x|$ των δύο ακραίων σημείων είναι: $|\Delta x| = (N-1)\frac{\lambda}{2}$
Η απόσταση $|\Delta x|$ είναι μικρότερη της απόστασης $d$ των δύο πηγών.

$$|\Delta x| < d \Rightarrow (N-1)\frac{\lambda}{2} < 3\lambda \Rightarrow N - 1 < 6 \Rightarrow N < 7$$

Πλήθος σημείων ενισχυτικής είναι **περιττός**: $N = 5$
Πλήθος σημείων ακυρωτικής είναι **άρτιος:** $N = 6$

**Πλάτος συνισταμένης ταλάντωσης $A'$**

Το πλάτος της ταλάντωσης που κάνει ένα σημείο παίρνει τιμές:

$$0 \leq A' \leq 2A$$

Η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωση προκύπτει από την αρχή της επαλληλίας

$$y = y_1 + y_2$$

**4.63 Λύση**

**α.** Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων μετά τη συμβολή είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{11\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 4\pi = 2 \cdot 2\pi$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2 \cdot 2\pi \Rightarrow r_2 - r_1 = 2\lambda \Rightarrow \boldsymbol{A' = 2A = 0,2m}$$

**β.** Το κύμα από την πηγή $\Pi_2$ φτάνει στο σημείο Γ τη χρονική στιγμή $\tau_2$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{11\pi/2}{1,3 - 0,2} = 5\pi\frac{rad}{s} \Rightarrow 2\pi f = 5\pi \Rightarrow f = 2,5Hz \Rightarrow \boldsymbol{T = 0,4s}$$

$$\lambda = vT = 0,5 \cdot 0,4 = \boldsymbol{0,2m}$$

**γ.** Θα υπολογίσουμε τις αποστάσεις $r_1, r_2$

$$\tau_1 = \frac{r_1}{v} \Rightarrow r_1 = v \cdot \tau_1 = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1m = \lambda/2$$

$$r_2 - r_1 = 2\lambda \Rightarrow r_2 = 2\lambda + r_1 = 2,5\lambda$$

$$d = r_2 + r_1 = \boldsymbol{3\lambda = 0,6m}$$

**δ.** Έστω τυχαίο σημείο Σ ενισχυτικής συμβολής πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Οι αποστάσεις του Σ από τις πηγές είναι:

$$r_1 = x \quad \kappa\alpha\iota \quad r_2 = d - x$$

Επειδή στο Σ έχουμε ενισχυτική συμβολή θα ισχύει:

$$r_1 - r_2 = \kappa\lambda \Rightarrow x - (d - x) = \kappa\lambda \Rightarrow 2x - d = \kappa\lambda \Rightarrow$$

$$2x = d + \kappa\lambda \Rightarrow x = \frac{d}{2} + \kappa\frac{\lambda}{2}$$

$$0 < x < d \Rightarrow 0 < \frac{d}{2} + \kappa\frac{\lambda}{2} < d \Rightarrow -\frac{d}{2} < \kappa\frac{\lambda}{2} < \frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{3\lambda}{2} < \kappa\frac{\lambda}{2} < \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$-3 < \kappa < 3 \Rightarrow \kappa = -2, -1, 0, 1, 2$$

Άρα το πλήθος των σημείων είναι $\boldsymbol{N = 5}$ **σημεία** ενισχυτικής συμβολής.

**ε.** Αν η συχνότητα υποδιπλασιαστεί η ταχύτητα διάδοσης δεν αλλάζει και έτσι

$$\lambda' f' = \lambda f \Rightarrow \lambda'\frac{3f}{4} = \lambda f \Rightarrow \lambda' = \frac{4}{3}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}\lambda'$$

Στο σημείο Γ ισχύει:

$$r_2 - r_1 = 2\lambda \Rightarrow r_2 - r_1 = 2\frac{3}{4}\lambda' = \frac{3}{2}\lambda'$$

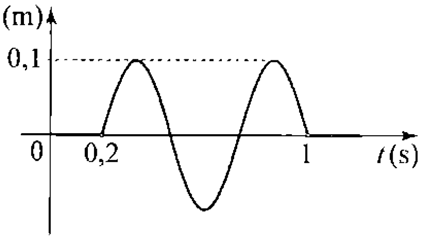
Άρα συμβαίνει **ακυρωτική συμβολή.**

Το κύμα από την πηγή $\Pi_1$ φτάνει στο Γ τη στιγμή $\tau_1 = 0,2s$ και το κύμα από την πηγή $\Pi_2$ φτάνει στο Σ τη στιγμή $\tau_2 = 1s$. Η συχνότητα της νέας ταλάντωσης είναι:

$$f' = \frac{3}{4}f = \frac{3}{4}2,5 = \frac{7,5}{4}$$

Στο χρονικό διάστημα $\Delta\tau = 0,8s$ το Σ θα έχει κάνει Ν ταλαντώσεις:

$$N = f'\Delta t = \frac{7,5}{4} \cdot 0,8 = 1,5 \ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta$$



**4.64** Ελαστική χορδή $O\Gamma$ μήκους $L$ συμπίπτει με τον ημιάξονα $Ox$ και έχει το άκρο της $\Gamma$ στερεωμένο. Διεγείρουμε τη χορδή ώστε να σχηματιστεί στάσιμο κύμα συχνότητας $f$ και παρατηρούμε ότι στη χορδή έχουμε 5 συνολικά δεσμούς ενώ στο άκρο $O$ σχηματίζεται κοιλία. Η απομάκρυνση της ταλάντωσης του σημείου $O$ δίδεται από την εξίσωση $y = 0{,}2\eta\mu\omega t$. Ένα σημείο $Z$ της χορδής που βρίσκεται στην θέση $x_Z = 0{,}6m$ ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος και διανύει διάστημα $4m$ σε χρόνο $\Delta t = 1s$. Αν διεγείρουμε τη χορδή έτσι ώστε η συχνότητα ταλάντωσης να υποτριπλασιαστεί τότε παρατηρούμε ότι δημιουργείται νέο στάσιμο κύμα και στο Ζ σχηματίζεται πάλι κοιλία. Βρείτε:

**α.** Τη συχνότητα $f$ ταλάντωσης της χορδής

**β.** Το μήκος κύματος και το μήκος $L$ της χορδής.

Όταν η χορδή ταλαντώνεται με συχνότητα $f$ βρείτε:

**γ.** Την εξίσωση της ταχύτητας των σημείων Ο και Ζ.

**δ.** Την ταχύτητα του μέσου Μ της ΟΖ τη χρονική στιγμή $t = 0{,}1s$

**ε.** Την εξίσωση της απομάκρυνσης $y = f(x)$ όλων των σημείων της χορδής τη στιγμή $2{,}25s$ και σχεδιάστε την γραφική της παράσταση.

Απ. [α. $5Hz$, β. $0{,}4m$, $0{,}9m$, γ. $2\pi\sigma\upsilon\nu 10\pi t$, $-2\pi\sigma\upsilon\nu 10\pi t$, δ. $-\pi\sqrt{2}\frac{m}{s}$]

**Εξίσωση Στάσιμου κύματος**

Οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας στάσιμου κύματος

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\omega t, \quad V = \omega 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Ισχύουν όταν στην θέση $x = 0$ σχηματίζεται κοιλία.

Σε μία χορδή που το ένα άκρο της είναι στερεωμένο και το άλλο ελεύθερο

Στο στερεωμένο άκρο σχηματίζεται δεσμός.

**Συχνότητες ταλάντωσης μιας χορδής με το ένα άκρο της στερεωμένο**

Αν στο ελεύθερο σχηματίζεται κοιλία τότε

**Πλήθος δεσμών=Πλήθος κοιλιών**

Αν $\kappa$ το πλήθος των δεσμών τότε για το μήκος L της χορδής ισχύει:

$$L = (2\kappa - 1)\frac{\lambda}{4}$$

Αν μεταβληθεί η συχνότητα και γίνει $f'$ τότε μεταβάλλεται και το μήκος κύματος το οποίο γίνεται $\lambda'$ και το πλήθος των δεσμών γίνεται $\kappa'$. Το μήκος της χορδής μένει το ίδιο και γράφουμε:

$$(2\kappa - 1)\frac{\lambda}{4} = (2\kappa' - 1)\frac{\lambda'}{4} \Rightarrow (2\kappa - 1)\lambda = (2\kappa' - 1)\lambda \Rightarrow$$

$$(2\kappa - 1)\frac{\upsilon}{f} = (2\kappa' - 1)\frac{\upsilon}{f'}$$

**4.64 Λύση**

**α.** Το Z είναι κοιλία και ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος $A_Z = A_{max} = 0{,}2m$

$$s = 4m = 20 \cdot 0{,}2 = 20A = 5 \cdot (4A)$$

Άρα το σημείο Z στο χρόνο $\Delta t = 1s$ έχει κάνει 5 ταλαντώσεις ⇒ $\boldsymbol{f = 5Hz}$

$$\omega = 2\pi f = 10\pi \; rad/s$$

**β.** $$L = \frac{\lambda}{4} + (5-1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow L = \frac{9}{4}\lambda \quad (1)$$

Όταν η συχνότητα υποτριπλασιαστεί γίνεται $f'$

$$f' = \frac{f}{3} \Rightarrow \frac{\upsilon}{\lambda'} = \frac{1}{3}\frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow \lambda' = 3\lambda$$

Για το μήκος της χορδής ισχύει:

$$L = \frac{\lambda'}{4} + (\kappa - 1)\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow L = (2k-1)\frac{\lambda'}{4} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow (2k-1)\frac{\lambda'}{4} = \frac{9}{4}\lambda \;\Rightarrow\; (2k-1)\frac{3\lambda}{4} = \frac{9\lambda}{4} \Rightarrow$$

$$2k - 1 = 3 \Rightarrow 2\kappa = 4 \Rightarrow \kappa = 2$$

Δηλαδή σχηματίζονται 2 κοιλίες στις θέσεις $x = 0$ , $x = \lambda'/2$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$x_Z = \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = 2x_Z \Rightarrow 3\lambda = 2x_Z \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}x_Z \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,4m} \quad (3)$$

Από την (1) βρίσκουμε: $L = 9 \cdot 0{,}4/4 \Rightarrow \boldsymbol{L = 0,9m}$

**γ.** $$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu 10\pi t \quad \kappa\alpha\iota \quad V = \omega 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu 10\pi t$$

$$y_O = 0{,}2\eta\mu\omega t = 0{,}2\eta\mu 10\pi t \Rightarrow V_o = 0{,}2 \cdot 10\pi\sigma\upsilon\nu 10\pi t = \boldsymbol{2\pi\sigma\upsilon\nu 10\pi t}$$

$$V_Z = \omega 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x_Z}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow V_Z = -0{,}2 \cdot 10\pi\sigma\upsilon\nu 10\pi t = \boldsymbol{-2\pi\sigma\upsilon\nu 10\pi t}$$

**δ.** $$V = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t = 10\pi A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\omega t = 2\pi\sigma\upsilon\nu 5\pi x\sigma\upsilon\nu 10\pi t$$

$$V_M = 2\pi\sigma\upsilon\nu 5\pi x_M\sigma\upsilon\nu 10\pi t = 2\pi\sigma\upsilon\nu 5\pi\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\pi =$$

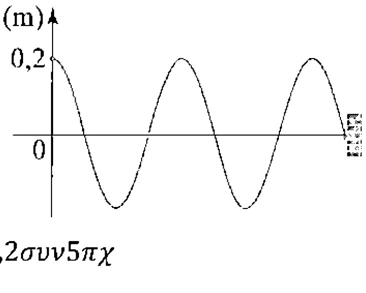
$$2\pi\sigma\upsilon\nu 2{,}25\pi(-1) = -2\pi\sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -2\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{-\pi\sqrt{2}m/s}$$

**ε.** $t = 2{,}25s \Rightarrow t = 2{,}2 + 0{,}05 = 11T + T/4$

Όλα τα σημεία βρίσκονται σε ακραία θέση.

Το σημείο O έχει απομάκρυνση $y = 0{,}2$.

Η εξίσωση στάσιμου κύματος την $t = 2{,}25s$ είναι:



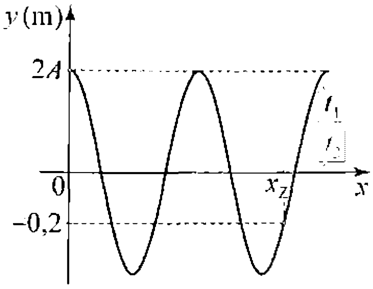

$$y = 0{,}2\sigma\upsilon\nu 5\pi x\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(11T + \frac{T}{4}\right) \Rightarrow$$

$$y = 0{,}2\sigma\upsilon\nu 5\pi x\eta\mu\left(22\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2\sigma\upsilon\nu 5\pi\chi\eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0{,}2\sigma\upsilon\nu 5\pi\chi$$

**4.65** Στάσιμο κύμα δημιουργείται στον άξονα $x'x$ από τη συμβολή δύο κυμάτων που διαδίδονται στον άξονα $xx$ με ταχύτητα $\upsilon = 2m/s$ και οι εξισώσεις τους στο (SI) είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$




Στο σχήμα βλέπουμε δύο στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1$ και $t_2$ οι οποίες διαφέρουν χρονικά κατά $T/4$. Ένα σημείο Ζ του άξονα $x'x$ που βρίσκεται στην θέση $x_Z = (2/3)m$ έχει τη χρονική στιγμή $t_1$ ταχύτητα μέτρου $2\pi m/s$. Βρείτε:

**α.** Τις θέσεις των δεσμών μεταξύ Ο και Ζ.

**β.** Την εξίσωση στάσιμου κύματος και την εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου Ζ.

**γ.** Την ταχύτητα του σημείου Ζ τη χρονική στιγμή $t = 0{,}05s$

**δ.** Την διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων Ο και Ζ

**ε.** Πόσο πρέπει να μεταβληθεί η συχνότητα ώστε στο τμήμα ΟΖ να υπάρχουν δύο δεσμοί και το Ζ να ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος.

Απ. [α. $0{,}1{,}0{,}3, 0{,}5$ , β.$0{,}4\sigma\upsilon\nu 5\pi x\eta\mu 10\pi t$, $200\eta\mu 10\pi t$ γ. $V_Z = 0$, δ. π, ε. $-2Hz$]



**Εξίσωση Στάσιμου κύματος**

Από τη συμβολή δύο αρμονικών κυμάτων

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \kappa\alpha\iota \quad y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

Προκύπτει στάσιμο κύμα με εξισώσεις:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\omega t, V = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\omega t, a = -\omega^2 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\omega t$$

**Θέσεις δεσμών**

Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου είναι ίσο με $2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$

Στους δεσμούς είναι:

$$2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 0 \Rightarrow x_\Delta = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \ldots$$

Στις κοιλίες είναι:

$$2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 2A \Rightarrow x_K = 0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \ldots$$

**Κοιλίες με ίδια φάση**: Αν η απόσταση τους είναι $\lambda, 2\lambda, 3\lambda \ldots$

**Κοιλίες με αντίθεση φάσης**: Αν οι θέσεις ισορροπίας απέχουν $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2 \ldots$

**4.65 Λύση**

**α.** Τη χρονική στιγμή $t_1$ η ταχύτητα του Ζ είναι: $V_Z = -\omega A_Z$.

Το πλάτος ταλάντωσης του Ζ είναι $A_Z = 0{,}2m$. Η εξίσωση ταχύτητας του Ζ είναι:

$$V_Z = -\omega \cdot 0{,}2 = -2\pi \Rightarrow \omega = 10\pi \Rightarrow 2\pi f = 10\pi \Rightarrow f = 5Hz \Rightarrow T = 0{,}2s$$

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \upsilon / f = 2/5 = \mathbf{0{,}4m}$$

Οι δεσμοί βρίσκονται στις θέσεις: $\boldsymbol{x_\Delta = 0{,}1, 0{,}3, 0{,}5}$

**β.**

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{0{,}4} \eta\mu\omega t \Rightarrow y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu 5\pi \frac{2}{3} \eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu \frac{10\pi}{3} \eta\mu\omega t = 2A\sigma\upsilon\nu \left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) \eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu \left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) \eta\mu\omega t \Rightarrow y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$y_Z = -2A\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \eta\mu\omega t \Rightarrow y_Z = -2A \frac{1}{2} \eta\mu\omega t \Rightarrow y_Z = -A\eta\mu\omega t \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει: $A = 0{,}2m$ και έτσι: $\boldsymbol{y = 0{,}4\sigma\upsilon\nu 5\pi x \eta\mu 10\pi t}$

$$a_Z = -\omega^2(-0{,}2\eta\mu\omega t) = \mathbf{200\eta\mu 10\pi t}$$

**γ.** Η περίοδος είναι $T = 0{,}2s$. Η χρονική στιγμή $t = 0{,}05$ είναι:

$$t = 0{,}2/4 = T/4.$$

Άρα το σημείο Ζ βρίσκεται σε ακραία θέση και είναι: $\boldsymbol{V_Z = 0}$

**δ.**

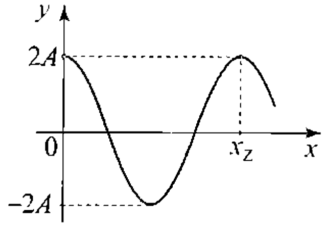
$$y_o = 0{,}4\eta\mu\omega t$$

$$y_Z = -0{,}2\eta\mu\omega t = 0{,}2\eta\mu(\omega t + \pi)$$

Η διαφορά φάσης είναι ίση με $\boldsymbol{\pi}$

**ε.** Το Ζ πρέπει να γίνει κοιλία

Από το στιγμιότυπο διαπιστώνουμε ότι το Ζ είναι η $2^η$ κοιλία μετά το Ο και θα βρίσκεται στην θέση:




$$x_Z = \lambda' \Rightarrow \lambda' = \frac{2}{3} m$$

$$\upsilon = \lambda' f' \Rightarrow f' = \frac{\upsilon}{\lambda'} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3Hz$$

Η αρχική συχνότητα ήταν $f = 5Hz$

$$\Delta f = f' - f = \mathbf{-2Hz}$$

**4.66** Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$ διαδίδονται δύο τρέχοντα αρμονικά κύματα ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους $A$. Τα δύο κύματα διαδίδονται με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα $\upsilon = 0{,}4\ m/s$ αλλά με αντίθετη φορά και συμβάλλοντας δημιουργούν στο ελαστικό μέσο στάσιμο κύμα. Στην αρχή μέτρησης Ο των αποστάσεων ($x = 0$) σχηματίζεται κοιλία. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών που έχουν ίδια φάση είναι ίση με $d = 0{,}4\ m$. Αν τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σημείο $K$ που βρίσκεται στη θέση $x_K = +0{,}8\ m$ ταλαντώνεται με μέγιστη ταχύτητα μέτρου $V_{max} = 0{,}8\pi\ m/s$ και δίνεται $\pi^2 = 10$, να βρείτε:

**α.** Το πλάτος $A$ των δύο κυμάτων και τη χρονική στιγμή $t_1$ που η πλησιέστερη κοιλία στο σημείο Ο θα έχει ταχύτητα $-2\omega A$ για δεύτερη φορά.

**β.** Την εξίσωση επιτάχυνσης του σημείου $\Lambda$ που η θέση ισορροπίας του βρίσκεται στη θέση $x_\Lambda = +1{,}95\ m$ και να κάντε τη γραφική της παράσταση.

**γ.** Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου $\Lambda$ τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι ίση με το πλάτος Α των κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προέκυψε το στάσιμο κύμα.

**δ.** Κάντε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή $t_2$ που το υλικό σημείο Λ βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική του απομάκρυνση.

**ε.** Την ταχύτητα του σημείου Λ όταν το Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με μέγιστη ταχύτητα.

Απ. [α. $A = 0{,}2m$ 1s, β. $-8\eta\mu\omega t$, γ. $0{,}4\pi m/s$, ε. $0{,}4\pi\sqrt{2}m/s$]

**Διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων**

Αν μεταξύ δύο σημείων Κ και Λ υπάρχουν Ν δεσμοί τότε:

Αν $N = άρτιος$ (0,2,4..) τότε τα σημεία Κ και Λ έχουν ίδια φάση

Αν $N = περιττός$ (1,3,5..) τότε τα σημεία Κ και Λ έχουν αντίθετη φάση ($\Delta\varphi = \pi$)

**Στιγμιότυπο Στάσιμου Κύματος σε Χορδή**

Το στιγμιότυπο στάσιμου κύματος είναι εύκολο να σχεδιαστεί αν βρούμε αρχικά τις θέσεις στις οποίες σχηματίζονται δεσμοί και κοιλίες.

**Χρονικές στιγμές $t = NT/2$**

Όλα τα σημεία διέρχονται από την θέση ισορροπίας τους. Αν βρούμε την φορά της ταχύτητα μιας κοιλίας τότε βρίσκουμε την κατεύθυνση κίνησης όλων των σημείων.

**Χρονικές στιγμές $t = T/4, 3T/4, 5T/4$**

Όλα τα σημεία βρίσκονται σε ακραία θέση. Αρκεί να βρούμε τη θέση μιας κοιλίας.

**Τυχαία Στιγμή $t$**

Πρέπει να υπολογίσουμε την απομάκρυνση και την ταχύτητα κάποιων σημείων πχ των δύο πρώτων κοιλιών.

**4.66 Λύση**

**α.** Κ($x_K = 0{,}8m = 2\lambda$) είναι κοιλία ⇒πλάτος ταλάντωσης $2A$

$$V_{Kmax} = \omega 2A \Rightarrow 0{,}8\pi = 2\pi 2A \Rightarrow \boldsymbol{A = 0{,}2m}$$

Δύο διαδοχικές κοιλίες με ίδια φάση απέχουν $d = \lambda$ οπότε: $\lambda = d = 0{,}4m$

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{0{,}4}{0{,}4} = 1Hz \Rightarrow T = 1s \Rightarrow \omega = 2\pi rad/s$$

Η πλησιέστερη κοιλία στο Ο έχει $x = \lambda/2$ και εξισώσεις $y$ και $V$ :

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{\lambda/2}{\lambda}\eta\mu\omega t = 2A\sigma\upsilon\nu\pi\eta\mu\omega t = -2A\eta\mu\omega t$$

$$V = -\omega 2A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Την $t = 0 \rightarrow V = -\omega 2A$ και θα ξαναπάρει την ίδια τιμή μετά χρόνο μιας περιόδου άρα:

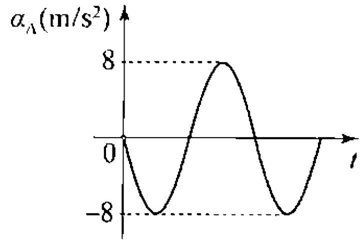
$$\boldsymbol{t_1 = T = 1s}$$

**β.** $x_\Lambda = +1{,}95\,m = 5\lambda - \lambda/8 = 39\lambda/8$

$$y_\Lambda = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x_\Lambda}{\lambda}\eta\mu\omega t = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{5\lambda - \frac{\lambda}{8}}{\lambda}\eta\mu\omega t$$

$$y_\Lambda = 2A\sigma\upsilon\nu\left(5 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\eta\mu\omega t = \boldsymbol{0{,}2\sqrt{2}\eta\mu\omega t}$$

$$a_\Lambda = -\omega^2 y_\Lambda = -4\pi^2 0{,}2\sqrt{2}\eta\mu\omega t = \boldsymbol{-8\eta\mu\omega t}$$



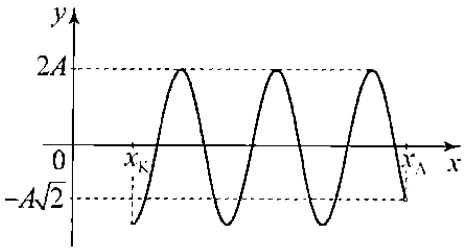

**γ.** Το πλάτος ταλάντωσης του Λ είναι $A_\Lambda = A\sqrt{2}$ . Το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$|V_\Lambda| = \omega\sqrt{A_\Lambda^2 - A^2} = \omega\sqrt{2A^2 - A^2} = \omega A = 2\pi 0{,}2 = \boldsymbol{0{,}4\pi m/s}$$

**δ.** Θέση των Κ , Λ είναι : $x_\kappa = 0{,}8m = 2\lambda$

$$x_\Lambda = 1{,}95m = 5\lambda - \frac{\lambda}{8} = 39\frac{\lambda}{8}$$

Το Κ είναι μία κοιλία, το Λ σε ακραία θέση οπότε όλα τα σημεία είναι σε ακραία θέση.
Από το διάγραμμα φαίνεται ότι μεταξύ Κ και Λ υπάρχουν 6 δεσμοί.




**Απόδειξη:** Ο **κ**-δεσμός βρίσκεται στη θέση: $x_\delta = \frac{\lambda}{4} + (\kappa - 1)\frac{\lambda}{2}$

$$x_\kappa < x_\delta < x_\Lambda \Rightarrow 2\lambda < x_\delta < \frac{39}{8}\lambda \Rightarrow 2\lambda < \frac{\lambda}{4} + (\kappa - 1)\frac{\lambda}{2} < \frac{39}{8}\lambda \Rightarrow$$

$$14 < 4(\kappa - 1) < 37 \Rightarrow 4{,}5 < \kappa < 10{,}25 \Rightarrow \kappa = 5{,}6{,}7{,}8{,}9{,}10$$

**ε.** Τα σημεία Κ και Λ ταλαντώνονται με ίδια φάση.

$$y_K = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x_K}{\lambda}\eta\mu\omega t = 2A\eta\mu\omega t \quad \kappa\alpha\iota \quad y_\Lambda = A\sqrt{2}\eta\mu\omega t = 0{,}2\sqrt{2}\eta\mu\omega t$$

Όταν το Κ έχει ταχύτητα $V_{Kmax}$ το Λ έχει ταχύτητα $V_\Lambda = V_{\Lambda max}$

$$V_\Lambda = \omega A_\Lambda = 2\pi \cdot A\sqrt{2} = 2\pi \cdot 0{,}2\sqrt{2} = 0{,}4\pi\sqrt{2}m/s$$

**4.67** Σε μία χορδή $OA$ μήκους $L$ δημιουργήθηκε στάσιμο κύμα το οποίο προέκυψε από τη συμβολή δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων ίδιου πλάτους $A$, ίδιας συχνότητας και ίδιου μήκους κύματος που διαδίδονται κατά μήκος της χορδής με αντίθετες ταχύτητες. Το άκρο O της χορδής κάνει αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $y = 2A\eta\mu\omega t$ και στη χορδή υπάρχουν 4 ακίνητα σημεία. Δύο σημεία $Γ$ και $Δ$ της χορδής ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος έτσι ώστε η μεταξύ τους απόσταση να μένει σταθερή και ίση με $d = 0{,}6m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο $Z(x_Z = 0{,}1m)$ έχει ταχύτητα $V = 2\pi m/s$ ενώ τη χρονική στιγμή $t = 0{,}2s$ η χορδή γίνεται ευθύγραμμη για τρίτη φορά.

**α.** Βρείτε το μήκος $L$ της χορδής.

**β.** Γράψτε τις εξισώσεις των κυμάτων από τη συμβολή των οποίων δημιουργήθηκε το στάσιμο κύμα και την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

**γ.** Δείξτε γραφικά το πλάτος των σημείων της χορδής.

**δ.** Γράψτε την εξίσωση ταλάντωσης του μέσου Μ της χορδής

**ε.** Μεταβάλλουμε μόνο τη συχνότητα των δύο κυμάτων που συμβάλλουν έτσι ώστε στη χορδή να σχηματιστεί στάσιμο κύμα με κοιλία στο ελεύθερο και διπλάσιο αριθμό δεσμών, βρείτε το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας ταλάντωσης των σημείων της χορδής.

Απ. [α. $1{,}05m$, β.$y_{1,2} = 0{,}2\eta\mu 2\pi(5t \mp \frac{5}{3}x)$, δ. $0{,}2\sqrt{2}\eta\mu 10\pi t$, ε. $(800/7)\%$,]



**Υπολογισμός του πλήθους δεσμών μεταξύ 2 σημείων**

Ο **κ-δεσμός** βρίσκεται στη θέση:

$$x = \frac{\lambda}{4} + (\kappa - 1)\frac{\lambda}{2}$$

Αλλά θέλουμε να είναι:

$$x_K < x_\delta < x_\Lambda \Rightarrow x_K < \frac{\lambda}{4} + (\kappa - 1)\frac{\lambda}{2} < x_\Lambda$$

Το πλήθος των τιμών του κ είναι ίσο με το πλήθος των δεσμών μεταξύ Κ και Λ.

**Αλλαγή συχνότητας**

Όταν αλλάζει η συχνότητα αλλάζει και το μήκος κύματος και έτσι αλλάζει και η θέση των ενδιάμεσων δεσμών και κοιλιών.

Δεν μεταβάλλεται το μήκος της χορδής και η ταχύτητα διάδοσης.

$$L = \frac{\lambda}{4} + (\kappa - 1)\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda'}{4} + (\kappa' - 1)\frac{\lambda'}{2}$$

$\kappa, \kappa'$ είναι το πλήθος δεσμών ή κοιλιών σε κάθε περίπτωση.

$$L = \frac{\lambda}{4} + (\kappa - 1)\frac{\lambda}{2}$$

**4.67 Λύση**

**α.** Στη χορδή θα υπάρχουν 4 δεσμοί και 4 κοιλίες. Το μήκος της χορδής είναι

$$L = 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 7\frac{\lambda}{4}$$

Οι κοιλίες βρίσκονται στις θέσεις: $0, \lambda/2\,, 2\,\lambda/2\,, 3\,\lambda/2$

Οι κοιλίες που βρίσκονται στις θέσεις $\lambda/2$ και $3\lambda/2$ ταλαντώνονται με ίδια φάση και η απόσταση τους είναι σταθερή και ίση με $\lambda$. [ $d = \lambda = 0{,}6m$]

$$L = 7 \cdot \frac{0{,}6}{4} = \mathbf{1{,}05m}$$

**β.** Η χορδή είναι ευθύγραμμη τις χρονικές στιγμές $0, T/2\,, T, ..$

Τη στιγμή $T$ γίνεται ευθύγραμμη για τρίτη φορά οπότε:

$$T = t = 0{,}2s \Rightarrow \omega = 2\pi/0{,}2 = 10\pi rad/s$$

Η απομάκρυνση και η ταχύτητα του Ζ είναι:

$$y_Z = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\omega t = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\eta\mu\omega t = A\eta\mu\omega t$$

$$V_Z = \omega 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\omega t = \omega 2A\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\omega t = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

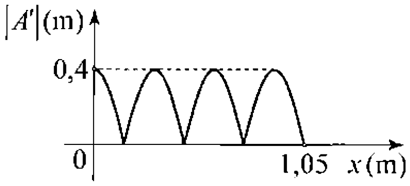
$t = 0 \;\Rightarrow V_Z = \omega A\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow \omega A = 2\pi \Rightarrow 10\pi A = 2\pi \Rightarrow A = 0{,}2m$

$$\boldsymbol{y_1 = 0{,}2\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{5}{3}x\right)} \quad \kappa\alpha\iota \quad \boldsymbol{y_2 = 0{,}2\eta\mu 2\pi(5t + \frac{5}{3}x)}$$

**γ.** Το πλάτος ταλάντωσης διαφόρων σημείων είναι:

$$|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| =$$

$$= 0{,}4\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{0{,}6}\right| = 0{,}4\left|\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi}{3}x\right|$$




**δ.** Το μέσον της χορδής βρίσκεται στην θέση: $x_M = L/2 = 7\lambda/8$

$$y_M = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x_M}{\lambda}\eta\mu\omega t = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{7\lambda}{8\lambda}\eta\mu\omega t = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4}\eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$y_M = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi + 3\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu\omega t = 2A\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu 10\pi t \Rightarrow \boldsymbol{y_M = 0{,}2\sqrt{2}\eta\mu 10\pi t}$$

**ε.** Θα σχηματιστούν **8 δεσμοί** και το μήκος κύματος θα γίνει $\lambda'$.

$$L = 7\frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = \frac{15\lambda'}{4}$$

$$\frac{15\lambda'}{4} = 7\frac{\lambda}{4} \Rightarrow 15\lambda' = 7\lambda \Rightarrow 15\frac{\upsilon}{f'} = 7\frac{\upsilon}{f} \Rightarrow f' = \frac{15}{7}f$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = \frac{f'}{f} - 1 = \frac{15}{7} - \frac{7}{7} = \frac{8}{7} = \frac{\mathbf{800}}{\mathbf{7}}\%$$

**4.68** Σε μία χορδή μήκους $L = 0{,}9m$ με τα άκρα της $O$ και $\Gamma$ στερεωμένα έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα και υπάρχουν μόνο δύο σημεία Κ και Λ που κάνουν αρμονική ταλάντωση με μέγιστο πλάτος και ίδια φάση. Το μέσον Μ της χορδής κάνει ταλάντωση μέγιστου πλάτους και η μέγιστη απόσταση του Μ από το Κ είναι $0{,}5m$ ενώ η ελάχιστη απόσταση του Μ από το Κ είναι ίση με $0{,}3m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Κ έχει απομάκρυνση $y = 0$ και ταχύτητα με αλγεβρική τιμή $V = 2\pi\, m/s$. Βρείτε

**α.** Το μήκος κύματος (λ) και την περίοδο (Τ).
**β.** Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 0{,}15s$
**γ.** Την εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Μ.
**δ.** Το λόγο κινητικής προς την δυναμική ενέργεια της χορδής τη χρονική στιγμή $t = 0{,}025s$ αφού πρώτα δείξετε που βρίσκονται τότε τα σημεία της χορδής.
**ε.** Την μεταβολή της συχνότητας ώστε το πλήθος των δεσμών να αυξηθεί κατά 1
ζ. Την ελάχιστη τιμή της συχνότητας ώστε στο μέσον Μ να σχηματίζεται κοιλία.

Απ. [α. $0{,}6m$, $0{,}2s$, β.$t = 3/4T$, γ. $-2\pi\sigma\upsilon\nu 10t$, δ. 1, ε. $\frac{10}{3}Hz$, ζ. $5/3\, Hz$]

**Διαφορά φάσης δύο σημείων**

Στο στάσιμο κύμα ένα σημείο που ταλαντώνεται μπορεί να έχει φάση

$$\omega t \quad \text{ή} \quad \omega t + \pi$$

Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi$ μεταξύ δύο σημείων είναι:

$$\Delta\varphi = 0 \;\; \text{ή} \;\; \Delta\varphi = \pi$$

**Απόσταση δύο σημείων στα οποία σχηματίζεται κοιλία**
**Κοιλίες που ταλαντώνονται με ίδια φάση ($\Delta\varphi = 0$)**
Αν δύο κοιλίες ταλαντώνονται με ίδια φάση η απόσταση $d$ τους είναι σταθερή και είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ

$$d = \lambda, 2\lambda. 3\lambda..$$

**Κοιλίες που ταλαντώνονται με αντίθεση φάσης ($\Delta\varphi = \pi$)**
Αν δύο κοιλίες ταλαντώνονται με αντίθεση φάσης η απόσταση $d$ τους δεν είναι σταθερή
Έστω δύο διαδοχικές κοιλίες Κ, Μ που ταλαντώνονται με αντίθεση φάσης.
Η ελάχιστη απόσταση των κοιλιών Κ, Μ είναι:

$$d_{\varepsilon\lambda} = \frac{\lambda}{2}$$

Την μέγιστη απόσταση των κοιλιών Κ, Μ θα την βρούμε με το πυθαγόρειο θεώρημα αν σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο στο οποίο η απόσταση των Κ,Μ είναι μέγιστη

$$d_{max} = \sqrt{d_{\varepsilon\lambda}^2 + (2A)^2}$$

**4.68 Λύση**

**α.** Τρείς συνολικά κοιλίες. Η μία κοιλία είναι το μέσον Μ της χορδής και οι άλλες δύο Κ και Λ είναι εκατέρωθεν της μεσαίας ατράκτου και έχουν αντίθεση φάσης με την κοιλία Μ, άρα μεταξύ τους έχουν ίδια φάση. Στα άκρα της χορδής υπάρχουν δεσμοί. Ο συνολικός αριθμός κοιλιών είναι 3 κοιλίες. Η ταλάντωση του Κ είναι: $y = A\eta\mu\omega t$
Οι κοιλίες Μ και Λ είναι διαδοχικές κοιλίες. Η ελάχιστη απόσταση τους είναι ίση με $\lambda/2$.

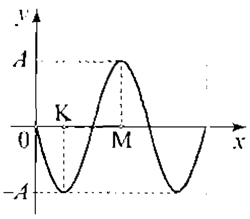
$$\frac{\lambda}{2} = 0{,}3 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,6m}$$

Η μέγιστη απόσταση των $K$ και $M$ είναι η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου που οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 0,3 και $2A$. Πυθαγόρειο θεώρημα: $2A = 0{,}4 \Rightarrow A = 0{,}2m$

$$V_{K(max)} = V = \omega A \Rightarrow \omega = \frac{V}{A} = 10\pi \Rightarrow 2\pi f = 10\pi \Rightarrow f = 5Hz \Rightarrow T = 0{,}2s$$

$$\upsilon = \lambda f = 0{,}6 \cdot 5 = 3m/s$$

**β.** Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}15 = 3T/4$ το σημείο Κ έχει απομάκρυνση $y = -A$ και το Μ έχει απομάκρυνση $+A$. Όλα τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραία θέση. Στο σχήμα βλέπουμε το στιγμιότυπο τη στιγμή $3T/4$




**γ.** Το Μ κάνει αρμονική ταλάντωση με μέγιστη ταχύτητα $V_{max}$ και έχει κάθε στιγμή ταχύτητα αντίθετη της ταχύτητας του Α :

$$\boldsymbol{V_M = -V_K = -2\pi\sigma\upsilon\nu 10t}$$

**δ.** Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}25s$ είναι: $\omega t = 10\pi \cdot 0{,}025 = \frac{\pi}{4}$ και ένα στοιχειώδες τμήμα της χορδής έχει απομάκρυνση $y$: $y = \pm|A_{(y)}|\eta\mu\omega t = \pm|A_{(y)}|\frac{\sqrt{2}}{2}$
και δυναμική ενέργεια: $U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}U_{max}$ άρα και $K = \frac{1}{2}U_{max}$

$$U_{o\lambda} = \frac{1}{2}U_{o\lambda(max)} \Rightarrow K_{o\lambda} = \frac{1}{2}U_{o\lambda(max)} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{K_{o\lambda}}{U_{o\lambda}} = 1}$$

**ε.** Το μήκος της χορδής μένει αναλλοίωτο για κ και για κ+1 δεσμούς:

$$(\kappa - 1)\frac{\lambda}{2} = (k + 1 - 1)\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow 3\frac{\lambda}{2} = 4\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{3}{4}\lambda \Rightarrow \frac{\upsilon}{f'} = \frac{3}{4}\frac{\upsilon}{f} \Rightarrow 4f = 3f' \Rightarrow$$

$$f' = \frac{4}{3}f = \frac{40}{3}Hz \Rightarrow \Delta f = \frac{40}{3} - \frac{30}{3} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta f = \frac{10}{3}Hz}$$

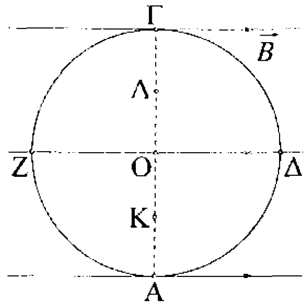
**ζ.** Στο μέσον κοιλία ⇒ το πλήθος κ των δεσμών θα είναι ζυγός $k = 2N$ , $N = 1, 2, 3, \ldots$

$$L = (k-1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow L = (2N-1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2L = (2N-1)\frac{\upsilon}{f} \Rightarrow f = \frac{(2N-1)\upsilon}{2L} =$$

Την ελάχιστη συχνότητα τη βρίσκουμε για $N = 1$

$$f_{\varepsilon\lambda} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 0{,}9} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 0{,}3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}Hz$$

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ




**4.69** Σε μια περιοχή υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ που έχει μέτρο $B = 4 \cdot 10^{-5}$T. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $\alpha = 0{,}2$ m με το επίπεδό του παράλληλο στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Τα σημεία Α, Γ, Δ, Ζ βρίσκονται στην περιφέρεια του κύκλου και αποτελούν ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου έχουν την διεύθυνση της διαμέτρου ΔΖ. Ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός διέρχεται από το Ο, είναι κάθετος στο επίπεδο του κύκλου και διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I$. Αν η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημεία Α είναι $\vec{B}_A = 0$ βρείτε:

**α.** Την ένταση και τη φορά του ρεύματος που διαρρέει τον ευθύγραμμο αγωγό.
**β.** Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στα σημεία Γ , Δ και Ζ.
**γ.** Τον λόγο $B_K/B_\Lambda$ των μέτρων των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου στα σημεία Κ και Λ που είναι τα μέσα των ακτίνων ΟΑ και ΟΓ.
**δ.** Την απόσταση από το Α των σημείων της περιφέρειας στα οποία η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει μέτρο ίσο με $B$.
**ε.** Το άθροισμα $\Sigma B dl$ κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου.
Δίνεται η σταθερά $\mu_o = 4\pi 10^{-7}$N/A$^2$.

Απ. [α. $I = 40$ A, β. $8 \cdot 10^{-5}$T , $4\sqrt{2} \cdot 10^{-5}$T, γ. 1/3, δ. 0,2$m$, ε. $4\pi 10^{-6}\ N/A$]

**Σύνθετο μαγνητικό πεδίο**

Αν το μαγνητικό πεδίο σε κάποιο σημείο Σ δημιουργείται από δύο διαφορετικές πηγές οι οποίες τότε σχεδιάζουμε στο Σ τα διανύσματα $\vec{B}_1, \vec{B}_2$ που δημιουργεί κάθε πηγή. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο Σ είναι $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Η πρόσθεση των διανυσμάτων γίνεται με κανόνα παραλληλογράμμου και το μέτρο της συνισταμένης έντασης $\vec{B}$ είναι:

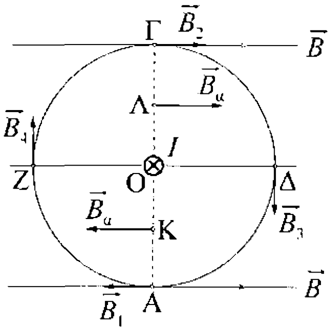
$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

**Προσοχή στο νόμο του Αμπέρ**

$$\Sigma B dl = \mu_o \Sigma i$$

Στο πρώτο μέρος παίρνουμε όλα τα μαγνητικά πεδία που υπάρχουν στην περιοχή της καμπύλης που αναφερόμαστε. Στο δεύτερο μέρος παίρνουμε μόνο τα ρεύματα που περικλείει η καμπύλη

**4.69 Λύση**




**α.** Έστω $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ οι εντάσεις του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο ευθύγραμμος αγωγός στα Α και Γ, αντίστοιχα. Οι εντάσεις $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ έχουν ίδιο μέτρο και είναι:

$$\vec{B}_1 \downarrow\uparrow \vec{B},\ \vec{B}_2 \uparrow\uparrow \vec{B}$$

Στο Α ισχύει: $B_{ολ} = 0 \Rightarrow B_1 - B = 0 \Rightarrow B_1 = B$.

Η φορά του ρεύματος είναι από τον αναγνώστη προς το επίπεδο του σχεδίου.

$$B_1 = B_2 = B \Rightarrow \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{\alpha} = B \Rightarrow I = \frac{2\pi\alpha B}{\mu_o} = \frac{2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4 10^{-5}}{4\pi 10^{-7}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I = 40\ \mathrm{A}}$$

**β.** Στο σημείο Γ είναι:

$$B_\Gamma = 2B = 8 \cdot 10^{-5}\mathrm{T}$$

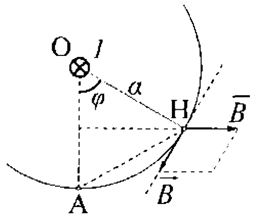
Στα σημεία Δ και Ζ η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο αγωγός έχει μέτρο ίσο με $B$. Επομένως:

$$B_\Delta = B_Z = \sqrt{B^2 + B^2} = B\sqrt{2} \Rightarrow B_\Delta = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-5}\mathrm{T}$$

**γ.** Η ένταση του μαγνητικού πεδίου του αγωγού στα σημεία Κ και Λ έχει μέτρο:

$$B_\alpha = k_\mu \frac{2I}{\alpha/2} = 2k_\mu \frac{2I}{\alpha} = 2B$$

$$\frac{B_K}{B_\Lambda} = \frac{|B - B_\alpha|}{|B + B_\alpha|} = \frac{|B - 2B|}{|B + 2B|} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{B_K}{B_\Lambda} = \frac{1}{3}}$$




**δ.** Σε κάθε σημείο της περιφέρειας του κύκλου η συνισταμένη ένταση είναι ίση με τη συνισταμένη δύο διανυσμάτων που έχουν ίδιο μέτρο ίσο με Β. Το μέτρο της συνισταμένης έντασης είναι:

$$B_{ολ} = B$$

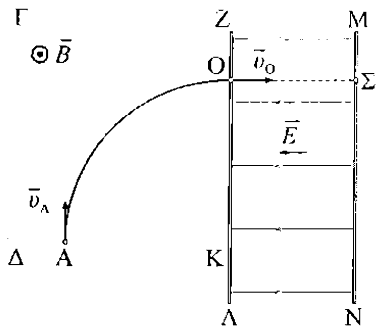
$$B_{ολ} = \sqrt{B^2 + B^2 + 2B \cdot B \cdot συνφ} \Rightarrow$$

$$συνφ = -\frac{1}{2} \Rightarrow φ = 120^o$$

Αυτό συμβαίνει και στο συμμετρικό του Η ως προς την ακτίνα ΟΑ.
Η επίκεντρη γωνία είναι τότε $\varphi = 60°$, οπότε: $(\mathrm{AH}) = \alpha \Rightarrow (\mathrm{AH}) = 0{,}2\ \mathrm{m}$

**ε.** Σύμφωνα με το νόμο του Ampere

$$\Sigma B dl = \mu_o \Sigma i = \mu_o I = 4\pi 10^{-7}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 10A = 4\pi 10^{-6}\frac{N}{A}$$




**4.70** Σωματίδιο μάζας $m = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$kg και φορτίου $q = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$C εισέρχεται στην περιοχή ΓΔΚΖΓ όπου επικρατεί ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 10^{-2}$T, με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ κάθετη στις μαγνητικές γραμμές και κάθετη στη ΔΚ. Το σωματίδιο διαγράφει τεταρτοκύκλιο μέχρι το σημείο Ο, όπου και εξέρχεται από το μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_O = 10^6$m/s. Στο σημείο Ο υπάρχει μικρή οπή μέσω της οποίας το σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που σχηματίζεται ανάμεσα σε δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες ΖΛ και ΜΝ, με ταχύτητα παράλληλη στις δυναμικές του γραμμές. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει ένταση μέτρου $E = 2{,}5 \cdot 10^3$N/C και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α.** Να βρείτε το μέτρο $\upsilon_A$ της ταχύτητας του σωματιδίου, όταν εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο.

**β.** Να υπολογίσετε την ακτίνα της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο μέσα στο μαγνητικό πεδίο.

**γ.** Να υπολογίσετε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών ΖΛ και ΜΝ, ώστε το σωματίδιο να φθάσει με μηδενική ταχύτητα στην πλάκα ΜΝ.

**δ.** Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του καθώς και την μεταβολή του μέτρου της ορμής σωματιδίου κατά την κίνηση του στο μαγνητικό πεδίο.

**ε.** Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος κίνησης του σωματιδίου από τη στιγμή της εισόδου στο μαγνητικό πεδίο μέχρι να φθάσει στην πλάκα ΜΝ.

Η επίδραση του πεδίου βαρύτητας να θεωρηθεί αμελητέα. Δίνεται $\pi = 3{,}14$.

Απ.[α. $10^6$m/s. β.$1m$, γ. $-5 \cdot 10^3$V, δ. $1{,}6\sqrt{2} \cdot 10^{-21}\ kgm/s$, 0 ε. $5{,}57 \cdot 10^{-6}$s]

**Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές Μαγνητικό πεδίο**

Αν δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις , η συνισταμένη δύναμη είναι η δύναμη Lorentz.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_L$$

Η δύναμη Lorentz εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου και την γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\upsilon}$, $\vec{B}$.

$\vec{\upsilon} // \vec{B} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \vec{F}_L = 0 \Rightarrow$ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$\vec{\upsilon} \perp \vec{B} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \vec{F}_L \perp \vec{\upsilon} \Rightarrow$ ομαλή κυκλική κίνηση

Η δύναμη Lorentz αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη και για το μέτρο της ισχύει:

$$F_L = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow B\upsilon|q| = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \boldsymbol{R = \frac{m\upsilon}{B|q|}}$$

$$\upsilon = \frac{s}{t} \Rightarrow \upsilon = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \boldsymbol{T = \frac{2\pi m}{B|q|}}$$

**4.70 Λύση**

**α.** Το σωματίδιο στο μαγνητικό πεδίο κάνει ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφοντας τόξο που είναι τεταρτοκύκλιο.
Το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι το σημείο Κ
Για την ομαλή κυκλική κίνηση στο μαγνητικό πεδίο το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου είναι σταθερό:

$$\upsilon = \upsilon_A = \upsilon_O \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_A = 10^6 \textbf{m/s}}.$$

**β.** Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς υπολογίζεται από τον τύπο της κεντρομόλου δύναμης. Εδώ η κεντρομόλος δύναμη είναι η δύναμη Lorentz

$$F_L = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow B\upsilon|q| = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$$

$$R = \frac{m\upsilon}{B|q|} \Rightarrow \boldsymbol{R = 1\ \textbf{m}}$$

**γ.** Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για τη διαδρομή του Ο → Σ.

Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης είναι:

$$W = q(V_o - V_\Sigma)$$

$$K - K_0 = \Sigma W \Rightarrow -\frac{1}{2}m\upsilon_O^2 = (V_o - V_\Sigma) \Rightarrow V_o - V_\Sigma = -\frac{m\upsilon_O^2}{2q} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V = -5 \cdot 10^3 \textbf{V}}$$

**δ.** Τα διανύσματα $\vec{P}_{\alpha\rho\chi}, \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν ίδιο μέτρο

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} = 1{,}6 \cdot 10^{-21}\, kgm/s$$

$$|\Delta\vec{p}| = p_{\alpha\rho\chi}\sqrt{2} = \boldsymbol{1{,}6\sqrt{2} \cdot 10^{-21}\, kgm/s}$$

$$\Delta|p| = \boldsymbol{0}$$

**ε.** Η κίνηση του σωματιδίου εντός του ηλεκτρικού πεδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με επιτάχυνση μέτρου:

$$|a| = \frac{|q|E}{m}$$

Ο χρόνος παραμονής εντός του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$t_1 = \frac{\upsilon_O}{|a|} = \frac{m\upsilon_O}{|q|E}$$

Ο χρόνος παραμονής εντός του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$t_2 = \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{2|q|B}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{m\upsilon_O}{|q|E} + \frac{\pi m}{2|q|B} = \frac{m}{|q|}\left(\frac{\upsilon_O}{E} + \frac{\pi}{2B}\right) \Rightarrow \boldsymbol{t = 5{,}57 \cdot 10^{-6}\textbf{s}}$$

**4.71** Σε περιοχή εκτός βαρυτικού πεδίου $(g = 0)$ υπάρχει εκτεταμένο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$. Ένα σωματίδιο άλφα είναι πυρήνας Ηλίου ${}_2^4He$ κινείται με ταχύτητα υ κάθετη στις δυναμικές γραμμές προς ακίνητο πυρήνα άνθρακα $({}_6^{12}C)$ και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά τη χρονική στιγμή $t_o = 0$. Θεωρώντας ότι τα σωματίδια έρχονται σχεδόν σε επαφή και αμέσως μετά την κρούση το σωματίδιο άλφα κάνει κυκλική τροχιά με ακτίνα $R$ και περίοδο $T$ να βρείτε:
**α.** Τη διαφορά χρόνου με την οποία οι πυρήνες επιστρέφουν στην θέση της κρούσης.
**β.** Το λόγο των διαστημάτων που θα διανύσουν τα δύο σωματίδια ώσπου να ξανά συγκρουστούν.
**γ.** Το διάστημα που διανύει ο πυρήνας Ηλίου ως τη στιγμή της τρίτης κρούσης.
**δ.** Την περίοδο επανάληψης του όλου φαινομένου.
**ε.** Την μέγιστη απόσταση των δύο πυρήνων και την περίοδο μεγιστοποίησης της.
Δίδεται το φορτίο και η μάζα του πρωτονίου $e, m$. Επίσης στο σύμβολο ${}_Z^AX$ ο αριθμός Z μας δείχνει το πλήθος των πρωτονίων δηλαδή το φορτίο και το σύμβολο A μας δείχνει την μάζα του πυρήνα [ $q = Z\,e$ και $M = Am$]

Απ.[α.0, β. 1, γ. $6\pi R$, δ. 2T, ε. 4R, T]

**Ακτίνα- Περίοδος και Ειδικό φορτίο (q/m)**

Φορτισμένο σωματίδιο που έχει αρχικά ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο T και ακτίνα R που είναι ανάλογες του λόγου $m/q$

$$R = \upsilon\frac{1}{B}\frac{m}{q} \quad , \quad T = 2\pi\frac{1}{B}\frac{m}{q}$$

Οι πυρήνες ${}_2^4He$ και ${}_6^{12}C$ έχουν ίδιο λόγο $q/m$ και έτσι θα κάνουν κυκλικές τροχιές με ίδια περίοδο και μετά την πρώτη κρούση θα ξανά συγκρουστούν στη θέση που έγινε η πρώτη κρούση.
Η ακτίνα είναι ανάλογη της ταχύτητας
Αν οι δύο πυρήνες έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας τότε οι κυκλικές τροχιές των δύο σωματιδίων είναι ίσες.

$$R_1 = R_2$$

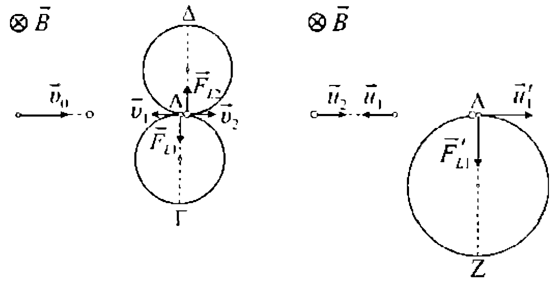
**Προσοχή!**
Αν ένα σωματίδιο μπεί στο μαγνητικό πεδίο από μια εξωτερική περιοχή τότε η τροχιά που διαγράφει είναι τόξο κυκλικής τροχιάς και το χρόνο παραμονής στο πεδίο τον βρίσκουμε από τη γωνιακή του μετατόπιση $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\Delta t$$

Ο υπολογισμός της γωνίας $\Delta\varphi$ γίνεται με βασικές γνώσεις γεωμετρίας.

**4.71 Λύση**

**α.** Για τις μάζες και τα φορτία των πυρήνων ισχύει:
$m_2 = 3m_1$ και $q_2 = 3q_1$
Ο λόγος $q/m$ είναι ίδιος για τους δύο πυρήνες άρα:
$$T_1 = T_2$$
Επιστρέφουν στο αρχικό σημείο ταυτόχρονα την
$$\tau = T_1 = T_2$$



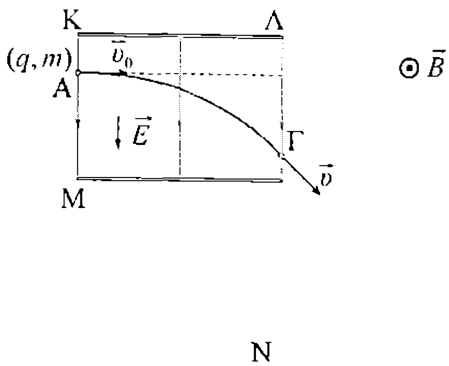
**β.** Μετά την πρώτη κρούση την $(t_o = 0)$ οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι:
$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0 = -\frac{1}{2}\upsilon_0\,, \qquad \upsilon_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0 = \frac{1}{2}\upsilon_0$$
Στη συνέχεια τα σωματίδια κάνουν κυκλικές τροχιές ίδιας ακτίνας: $R_1 = R_2 = R$
με ίδια περίοδο και η δεύτερη κρούση θα γίνει στην ίδια θέση που έγινε και η πρώτη.
Όταν ξανά συγκρουστούν έχουν διανύσει διαστήματα.
$$s_1 = 2\pi R_1,\ \ s_2 = 2\pi R_2$$
$$R_1 = R_2 \Rightarrow s_1 = s_2 \Rightarrow \boldsymbol{s_1/s_2 = 1}$$

γ. Τη χρονική στιγμή $t = T$ συγκρούονται ξανά στην αρχική τους θέση. Λίγο πριν την δεύτερη κρούση έχουν ταχύτητες $u_1, u_2$
$$u_1 = -\upsilon_1 = \frac{1}{2}\upsilon_0 \ \ \kappa\alpha\iota\ u_2 = -\upsilon_2 = -\frac{1}{2}\upsilon_0$$
Μετά την δεύτερη κρούση οι ταχύτητες είναι
$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\frac{1}{2}\upsilon_0) + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(-\frac{1}{2}\upsilon_0) = \upsilon_0$$
$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\left(\frac{1}{2}\upsilon_0\right) + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(-\frac{1}{2}\upsilon_0) = 0$$
Στη συνέχεια ο πυρήνας $He$ κάνει κυκλική τροχιά ακτίνας $R' = 2R$.
Τη χρονική στιγμή $t_2 = 2T$ τα σωματίδια συγκρούονται ξανά στην αρχική τους θέση και ο πυρήνας Ηλίου έχει διανύσει διάστημα s.
$$s = 2\pi R + 2\pi 2R \Rightarrow \boldsymbol{s = 6\pi R}$$

**δ.** Η τρίτη κρούση γίνεται τη χρονική στιγμή $2T$ και λίγο πριν την τρίτη κρούση οι πυρήνες έχουν ξανά τις αρχικές τους ταχύτητες και έτσι το φαινόμενο επαναλαμβάνεται με περίοδο $\boldsymbol{2T}$

**ε.** $t_1 = T/2$ βρίσκονται στα Γ και Δ και η απόσταση τους είναι $4R$ και είναι μέγιστη.
$$d_{max} = 2R + 2R = 4R$$
Όμοια τη στιγμή $1{,}5T$ η απόσταση είναι μέγιστη και ίση με $2(2R) = 4R$

**Η περίοδος μεγιστοποίησης της είναι ίση με Τ**




**4.72** Δύο παράλληλες πλάκες ΚΛ και ΜΝ είναι οριζόντιες και έχουν αντίθετα φορτία. Η πάνω πλάκα έχει θετικό φορτίο. Σωματίδιο μάζας $m = 10\mu g$ και φορτίου $q = 1\mu C$ εισέρχεται στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο των πλακών σε πολύ σε ένα σημείο $A$ κοντά στην θετική πλάκα με ταχύτητα $\vec{v}_o$ η οποία είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές και έχει μέτρο $v_o = 100\,m/s$. Το σωματίδιο εξέρχεται από το ηλεκτρικό πεδίο των πλακών από ένα σημείο $\Gamma$ κοντά στην αρνητική πλάκα μετά από χρόνο $t = \sqrt{3}ms$. Η τάση μεταξύ των σημείων Α και Γ είναι $75V$. Στη συνέχεια το σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μεγάλης έκτασης που εκτείνεται πέρα από την κατακόρυφη ευθεία ΛΝ. Το σωματίδιο εξέρχεται από το μαγνητικό πεδίο σε σημείο Δ που απέχει από το Γ απόσταση $d = 20cm$ και βρίσκεται στην ευθεία ΛΝ

**α**. Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου στο σημείο Γ.

**β.** Την ένταση του μαγνητικού πεδίου.

**γ.** Την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

**δ**. Το χρόνο κίνησης του σωματιδίου στο μαγνητικό πεδίο καθώς και το διάστημα που διάνυσε σε αυτό το χρόνο.

**ε**. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής κατά την κίνηση του σωματιδίου στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Απ. [α. $200m/s$, β. $B = 5T$, γ. $1000N/C$ , δ. $\pi/3500\,s$, ε. $10^{-6}\sqrt{3}kgm/s$]

**Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο**

Η κίνηση σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ισοδυναμεί με κίνηση σε βαρυτικό πεδίο έντασης $\vec{g}' = \vec{a}$ που έχει μέτρο:

$$g' = a = \frac{F}{m} = \frac{|q|E}{m}$$

Αν η αρχική ταχύτητα είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$x'x \rightarrow \begin{cases} v_x = \sigma\tau\alpha\theta = v_o \\ x = v_o t \end{cases} \qquad y'y \rightarrow \begin{cases} v_y = at \\ y = \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Το μέτρο της ταχύτητας μπορούμε να το υπολογίσουμε και με ΘΜΚΕ

Το έργο της δύναμης του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$W = mg'h = |q|Eh$$

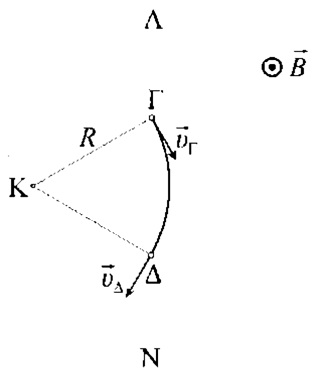
**4.72 Λύση**

**α.** ΘΜΚΕ από το Α στο Γ

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = qV \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_o^2 + \frac{2qV}{m}} = \sqrt{10000 + \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 75}{10\cdot 10^{-9}}} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{10000+30000} = \sqrt{40000} = \mathbf{200m/s}$$




Το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει γωνία φ με τον οριζόντιο άξονα για την οποία:

$$συνφ = \frac{v_o}{v} = \frac{1}{2} \Rightarrow φ = 60^o$$

**β.** Το σωματίδιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα η οποία σχηματίζει γωνία $\theta = 30^o$ με την ευθεία ΛΝ. Η κίνηση του σωματιδίου στο μαγνητικό πεδίο είναι ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα R και κέντρο Κ. Οι γωνίες ΚΓΔ και ΚΔΓ είναι ίσες και κάθε μια είναι 60 $^o$ άρα και γωνία ΚΓΔ θα είναι ίση με 60 $^o$ και το τρίγωνο ΚΓΔ είναι ισόπλευρο οπότε:

$$R = ΓΔ = 0{,}2m$$

$$R = \frac{mv}{Bq} \Rightarrow B = \frac{mv}{qR} = \frac{10^{-8}\cdot 10^2}{10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{-1}} \Rightarrow \boldsymbol{B = 5T}$$

**γ.** Την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μπορούμε να τη βρούμε από την επιτάχυνση.

$$v_y = \sqrt{v^2 - v_o^2} = 100\sqrt{3}m/s$$

$$v_y = at \Rightarrow a = \frac{v_y}{t} = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 10^{-3}} = 10^5 m/s^2$$

$$a = \frac{qE}{m} \Rightarrow E = \frac{ma}{q} = \frac{10^{-8}10^5}{10^{-6}} \Rightarrow \boldsymbol{E = 1000N/C}$$

**δ.** Η γωνιακή μετατόπιση είναι

$$Δφ = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{6}2\pi \Rightarrow$$

$$Δt = \frac{1}{6}T = \frac{1}{6}\frac{2\pi m}{Bq} = \frac{\pi m}{3Bq} = \frac{\pi 10^{-8}}{3\cdot 5\cdot 10^{-6}} \Rightarrow \boldsymbol{Δt = \frac{\pi}{3500}s}$$

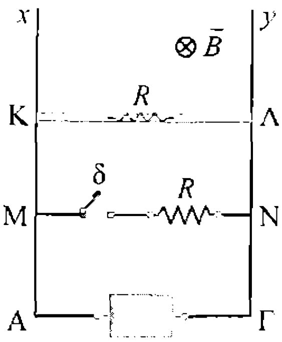
$$s = Rφ = \frac{R\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{30}m}$$

**ε.** Για την κίνηση στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο:

$$Δp_x = 0$$

$$Δp_x = mv_y = 10^{-8}\cdot 100\sqrt{3} = 10^{-6}\sqrt{3}kgm/s$$

$$\boldsymbol{|Δp| = 10^{-6}\sqrt{3}kgm/s}$$




**4.73** Ο αγωγός ΚΛ του σχήματος με αντίσταση $R = 4\Omega$, μάζα $m = 200g$ και μήκος $l = 0{,}5m$, μπορεί να κινείται χωρίς τριβές παραμένοντας συνέχεια οριζόντιος με τα άκρα του να είναι σε επαφή με τους κατακόρυφους μεταλλικούς αγωγούς $Ay, \Gamma y$. Στην περιοχή υπάρχει οριζόντιο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$, ( $B = 1T$) του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στο επίπεδο των αγωγών $Ay, \Gamma y$. Στα κάτω άκρα Α και Γ των κατακόρυφων αγωγών συνδέεται ένα μαύρο κουτί μπορεί να περιέχει αντίσταση $R_x$ ή ιδανική πηγή $(\mathcal{E}, r = 0)$ ή μη ιδανική πηγή συνεχούς τάσης $(\mathcal{E}, r \neq 0)$. Όταν ο διακόπτης δ είναι ανοιχτός ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί ενώ μόλις κλείσουμε το διακόπτη αποκτά αρχική επιτάχυνση μέτρου $g/4$ . Βρείτε:

**α.** Τι μπορεί να περιέχει το κουτί.

**β.** Την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του αγωγού μόλις κλείσουμε το διακόπτη.

**γ.** Την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ πριν και μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

**δ.** Την τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ ($V_{K\Lambda}$) πριν και μετά το κλείσιμο του διακόπτη

**ε.** Πόσο τοις εκατό πρέπει να μεταβάλλουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου ώστε ο ΚΛ να ισορροπεί και μετά το κλείσιμο του διακόπτη (Δίδεται $g = 10m/s^2$)

Απ. [α. $(\mathcal{E}, r)$, β. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{g}$, γ. $4A$, δ. $16V$, $12V$, ε. $(100/3)\%$]



**Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων**

Στην παράλληλη σύνδεση δύο αντιστατών με αντιστάσεις $R_1, R_2$ ισχύουν τα εξής:

- Οι αντιστάτες έχουν ίδια τάση $V_1 = V_2$
- Σε κάθε αντιστάτη ισχύει ο νόμος του Ohm
- Η ολική αντίσταση είναι πιο μικρή και από την μικρότερη των δύο αντιστάσεων.
- Διαρρέονται από ρεύματα εντάσεων $I_1 = I_2$ που είναι αντιστρόφως ανάλογες των αντιστάσεων

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

**Πολική τάση πηγής**

$$V_\pi = \mathcal{E} - ir$$

Αν $r = 0$ (ιδανική πηγή) τότε $V_\pi = \mathcal{E}$

Αν $i = 0$ (ανοιχτό κύκλωμα) τότε $V_\pi = \mathcal{E}$

Από την τελευταία προκύπτει ένας απλός και πιο κατανοητός ορισμός για την ΗΕΔ μιας πηγής.

« ΗΕΔ πηγής ($\mathcal{E}$) είναι η τάση στους πόλους πηγής που δεν διαρρέεται από ρεύμα»

**4.73 Λύση**

**α.** Ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί άρα δέχεται κάποια δύναμη αντίθετη του βάρους του. Αυτή η δύναμη οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο και ο αγωγός πρέπει να είναι ρευματοφόρος . Άρα στο μαύρο κουτί θα υπάρχει πηγή $(\mathcal{E} \neq 0)$

Αν η πηγή είναι ιδανική τότε $r = 0$ : Η ένταση του ρεύματος στον αγωγό ΚΛ ς πριν και μετά το άνοιγμα του διακόπτη θα ήταν ή ίδια.

$$I_{\pi\rho} = I_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Άρα το κουτί περιέχει μη ιδανική πηγή $\mathcal{E}, r \neq 0$

**β. Διακόπτης ανοιχτός:** Ο ΚΛ και η πηγή διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα $I$

$$I_{K\Lambda} = I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

**Διακόπτης Κλειστός:** Η πηγή διαρρέεται από ρεύμα $I'$

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R_{\varepsilon\xi} + r} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + r} = \frac{2\mathcal{E}}{R + 2r}$$

Οι αντιστάσεις $R_{K\Lambda}$ και $R$ είναι ίσες θα διαρρέονται από ίσα ρεύματα

$$I'_{K\Lambda} = \frac{1}{2} I' = \frac{1}{2} \frac{2\mathcal{E}}{R + 2r} \Rightarrow I'_{K\Lambda} < I \Rightarrow F'_L < F_L$$

άρα και η επιτάχυνση θα έχει ίδια φορά με την $\vec{g}$

**γ. Διακόπτης ανοιχτός**: Ο αγωγός ισορροπεί άρα δύναμη Laplace προς τα πάνω και ι η φορά του ρεύματος θα είναι από το Κ προς το Λ :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow BI_{K\Lambda} l = mg \Rightarrow I_{K\Lambda} = \frac{mg}{Bl} = 4A$$

**Διακόπτης κλειστός:** $\Sigma F = ma \Rightarrow mg - F_L = ma \Rightarrow F_L = \frac{3}{4} mg \Rightarrow$

$$I'_{K\Lambda} = (3/4) I_{K\Lambda} = (3/4)4 = 3A$$

**δ.** Διακόπτης ανοιχτός: $\mathcal{E} = I(R + r) \Rightarrow \mathcal{E} = 4(4 + r) \quad (1)$

Διακόπτης κλειστός: $\mathcal{E} = I'(R_{\varepsilon\xi} + r) \Rightarrow \mathcal{E} = 6(2 + r) \quad (2)$

$$4(4 + r) = 6(2 + r) \Rightarrow 16 + 4r = 12 + 6r \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = 2\Omega$$

$$\mathcal{E} = 4(4 + r) = 4 \cdot 6 = 24V$$

Η τάση στα άκρα του αγωγού είναι η πολική τάση της πηγής. Από την φορά του ρεύματος προκύπτει ότι ο θετικός πόλος της πηγής βρίσκεται στο Α οπότε $V_K > V_\Lambda$

$$V_{K\Lambda} = \mathcal{E} - Ir = 24 - 4 \cdot 2 = 16V$$

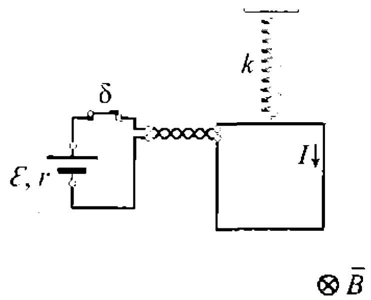
$$V'_{K\Lambda} = \mathcal{E} - Ir = 24 - 6 \cdot 2 = 12V$$

**ε.** Για να παραμείνει σε ισορροπία ο αγωγός ΚΛ πρέπει

$$B' I'_{K\Lambda} l = B I_{K\Lambda} l \Rightarrow B' = \frac{I}{I'_{K\Lambda}} \cdot B = \frac{4}{3} B$$

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\frac{1}{3} B}{B} = \frac{100}{3} \%$$

**4.74** Τετράγωνο μεταλλικό πλαίσιο πλευράς $\alpha = 40$ cm, αντίστασης $R = 2\ \Omega$ και μάζας $m = 0{,}4$ kg, έχει συνδεθεί μέσω διακόπτη στους πόλους ηλεκτρικής πηγής με ΗΕΔ $\mathcal{E}$ και εσωτερικής αντίστασης $r = 0{,}5\ \Omega$. Το μέσον της ανώτερης πλευράς του πλαισίου συνδέεται στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 10$ N/m και το επίπεδο του πλαισίου είναι κατακόρυφο. Κάθετα στο επίπεδο του πλαισίου υπάρχει οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 0{,}5T$ όπως φαίνεται στο σχήμα.




Όταν ο διακόπτης είναι ανοιχτός το πλαίσιο ισορροπεί σε κάποια θέση (Ι) έτσι ώστε το μισό πλαίσιο να βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο. Απομακρύνουμε το πλαίσιο προς τα κάτω ώστε να προκαλέσουμε πρόσθετη επιμήκυνση κατά $d$ και να φτάσει σε μία θέση (ΙΙ) στην οποία το συγκρατούμε ακίνητο. Κάποια χρονική στιγμή κλείνουμε τον διακόπτη και ταυτόχρονα αφήνουμε το πλαίσιο ελεύθερο. Παρατηρούμε ότι το πλαίσιο παραμένει ακίνητο στη θέση (ΙΙ)

**α.** Εξηγήστε γιατί η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι μικρότερη από $\alpha/2$.

Αν στη θέση (ΙΙ) είναι $d = 10$ cm να βρείτε:

**β.** Την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν το πλαίσιο είναι στην θέση (ΙΙ)

**γ.** Τη δύναμη που δέχεται το πλαίσιο από το μαγνητικό πεδίο στη θέση (ΙΙ)

**δ.** Την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο και την ΗΕΔ της πηγής.

**ε.** Αν στην θέση (ΙΙ) κάποια στιγμή ανοίξουμε το διακόπτη βρείτε την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης του πλαισίου αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη θεωρώντας ως θετική φορά προς τα πάνω.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Απ. [β. 1,8$j$, γ. 1 N, δ. 5 A, 12,5 V, ε. 2,5$m/s^2$]

**Δύναμη Laplace σε κλειστό πλαίσιο**

Αν το πλαίσιο βρίσκεται ολόκληρο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο τότε

Η **συνισταμένη δύναμη** που δέχεται από το μαγνητικό πεδίο είναι: $\Sigma F_L = 0$

Στην περίπτωση του τετράγωνου πλαισίου οι δυνάμεις Laplace που δέχονται δύο απέναντι πλευρές είναι αντίθετες διότι διαρρέονται από ρεύματα ίδιας έντασης που έχουν αντίθετη φορά.

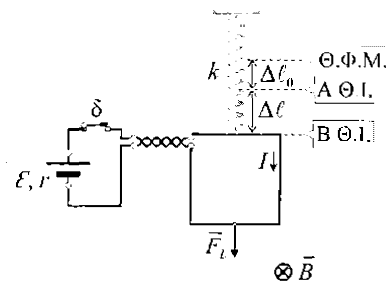
Η **συνισταμένη ροπή** που ασκείται στο πλαίσιο μπορεί να είναι

$\Sigma\tau = 0$ όταν το επίπεδο του πλαισίου είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ή

$\Sigma\tau \neq 0$ όταν το επίπεδο του πλαισίου είναι παράλληλο στις δυναμικές γραμμές

Στην περίπτωση που μελετάμε ισχύει $\Sigma F_L = 0$ και $\Sigma\tau = 0$

**4.74 Λύση**




**α.** Στην αρχική θέση ισορροπίας το πλαίσιο δέχεται το βάρος του και την δύναμη από το ελατήριο και είναι:

$$mg = k\Delta l_o \Rightarrow \Delta l_o = \frac{mg}{k} = 0{,}4m = 40 \text{ cm}$$

Αν η πρόσθετη επιμήκυνση του ελατηρίου είναι μεγαλύτερη του $\alpha/2$ το πλαίσιο θα βρεθεί ολόκληρο εντός του μαγνητικού πεδίου και η συνισταμένη δύναμη Laplace θα είναι μηδέν.
Το μέτρο της ελατηριακής δύναμης θα αυξηθεί και θα είναι μεγαλύτερο του $mg$

$$\Sigma F = k(d + \Delta l) - mg = kd + k\Delta l - mg = k\Delta l \neq 0$$

Άρα για να μπορεί να ισορροπεί το πλαίσιο στη θέση ΙΙ πρέπει η πρόσθετη επιμήκυνση του ελατηρίου να είναι μικρότερη του $\alpha/2$

**β.** Στην θέση (ΙΙ) η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι

$$\Delta l = \Delta l_o + d = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6m$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 0{,}36 = \mathbf{1{,}8j}$$

**γ.** Στη τελική θέση ισορροπίας του πλαισίου [θέση ΙΙ] η συνισταμένη δύναμη Laplace είναι η δύναμη που δέχεται η κάτω πλευρά του.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L + mg - k(d + \Delta l) = 0 \Rightarrow$$

$$F_L - k\Delta l = 0 \Rightarrow F_L = k\Delta l \Rightarrow F_L = \mathbf{1\ N}$$

**Σημείωση:** Οι κατακόρυφες πλευρές του πλαισίου δέχονται αντίθετες δυνάμεις από το μαγνητικό πεδίο.

**δ.** Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο υπολογίζεται από τη δύναμη Laplace που δέχεται η κατώτερη πλευρά του πλαισίου.

$$F_L = BI\alpha \Rightarrow I = \frac{F_L}{B\alpha} \Rightarrow I = \mathbf{5\ A}$$

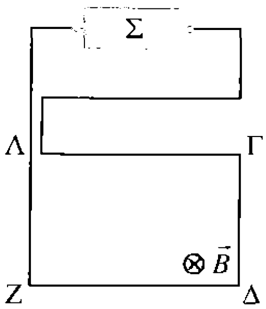
Η ΗΕΔ της πηγής υπολογίζεται από τον νόμο του Ohm:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \Rightarrow \mathcal{E} = I(R + r) \Rightarrow \mathcal{E} = \mathbf{12{,}5\ V}$$

**ε.** Από ταλαντώσεις θα είναι:

$$\alpha = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}(-d) = \frac{k}{0{,}4}0{,}1 = \frac{10}{4} = 2{,}5m/s^2$$

**4.75** Οριζόντιο τετράγωνο πλαίσιο πλευράς $\alpha = 1m$ και αντίστασης $R_{\pi} = 20\Omega$ είναι συνδεδεμένο σε σειρά με συσκευή η οποία έχει ενδείξεις κανονικής λειτουργίας $P_{\kappa} = 0{,}8W, V_{\kappa} = 8V$. Κάθετα στο επίπεδο του πλαισίου υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο η ένταση του οποίου μεταβάλλεται όπως δείχνει το διάγραμμα του σχήματος. . Αν η πλευρά ΑΓ είναι το άνω όριο του μαγνητικού πεδίου.

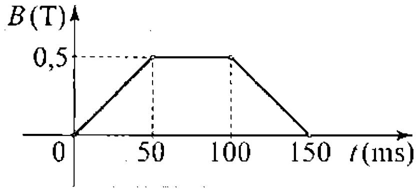



**α.** Δείξτε γραφικά πως μεταβάλλεται

**i.** Η ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

**ii.** Η ισχύς που καταναλώνει η συσκευή και εξετάστε λειτουργεί κανονικά.

**β.** Υπολογίσετε το φορτίο που πέρασε μέσα από τη συσκευή




**γ.** Την θερμότητα που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο στο χρονικό διάστημα που η μαγνητική ροή μειώνεται.

Απ. [α.i. $-0{,}1A, 0{,}0{,}1A$, ii. $0{,}8W, 0{,}0{,}8W$,β. $10mC$ , γ. $0{,}04joule$]

**Περί επαγωγικού φορτίου**

Σε κάποιες περιπτώσεις θα υπολογίζουμε το $q$ ενώ σε άλλες θα υπολογίζουμε το $|q|$ Σε κάθε περίπτωση καλό είναι να βρίσκουμε αυτό που περιέχει περισσότερη πληροφορία για το φορτίο που μετακινήθηκε.



**α. Η ένταση του ρεύματος έχει συνέχεια την ίδια φορά τότε το $q = \pm|q|$**

Το $|q|$ μας δείχνει ποσότητα του φορτίου που μετακινήθηκε

Το πρόσημο δείχνει την φορά της κίνησης

Το $q$ περιέχει περισσότερη πληροφορία από το $|q|$

**β. Η ένταση του ρεύματος στο χρονικό διάστημα που μελετάμε αλλάζει φορά**

Το $|q|$ περιέχει περισσότερη πληροφορία και για να το βρούμε υπολογίζουμε ξεχωριστά τα επαγωγικά φορτία $q_1, q_2, q_2$ στα χρονικά διαστήματα $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ με τον τύπο του Neumann ή με εμβαδομέτρηση στο διάγραμμα έντασης –χρόνου

Το φορτίο που μετακινήθηκε είναι

$$|q| = |q_1| + |q_2| = 2C$$

Και περιέχει όλη την πληροφορία για το φορτίο που μετακινήθηκε

Από τα **στοιχεία κανονικής λειτουργίας** μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση μιας **θερμικής** συσκευής

**Θερμική** ονομάζεται η συσκευή που υπακούει στο νόμο του Ohm.

**4.75 Λύση**

**α.** Από τα στοιχεία $P_K, V_K$ θα υπολογίσουμε αρχικά την ένταση κανονικής λειτουργίας της συσκευής $I_K$.

$$P_K = V_K I_K \Rightarrow I_K = \frac{P_K}{V_K} = 0{,}1A$$

Η αντίσταση της συσκευής υπολογίζεται από τον ορισμό

$$R_\Sigma = \frac{V_\Sigma}{I_\Sigma} = \frac{8}{0{,}1} = 80\Omega$$

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι: $R_{o\lambda} = R_{\pi\lambda} + R_\Sigma = 20 + 80 = 100\Omega$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει κάθε στιγμή το κύκλωμα είναι: $i = \mathcal{E}_{\varepsilon\pi}/R_{o\lambda}$

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο είναι: $\Phi = BA$

$$\Delta\Phi = A\Delta B$$

**i.**

$(0 \to 50ms) \quad \Rightarrow \mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -10V \Rightarrow i = \mathbf{-0,1A}$

$(50 \to 100ms) \Rightarrow \mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = 0 \Rightarrow i = \mathbf{0}$

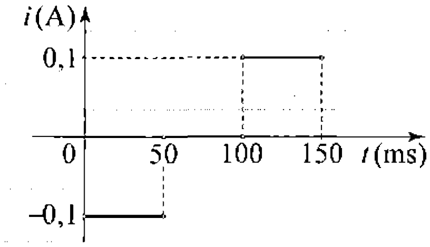
$(100 \to 150ms) \Rightarrow \mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = -N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 10V \Rightarrow i = \mathbf{0,1A}$

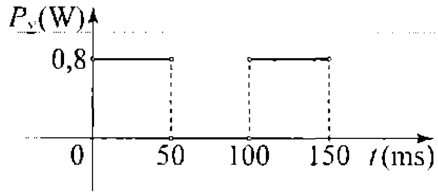
**ii.**

$(0 \to 50ms) \Rightarrow P_\Sigma = i^2 R_\Sigma = 0{,}01 \cdot 80 = 0{,}8W$ ⇒Λειτουργεί κανονικά

$(50 \to 100ms) \Rightarrow P_\Sigma = 0$

$(100 \to 150ms) \Rightarrow P_\Sigma = i^2 R_\Sigma = 0{,}01 \cdot 80 = 0{,}8W$ ⇒Λειτουργεί κανονικά




**β.** Το φορτίο που πέρασε από τη συσκευή είναι:

$$|q| = |q_1| + |q_2| + |q_3|$$

Το επαγωγικό φορτίο υπολογίζεται ή με τον τύπο του Neumann ή από το διάγραμμα $i - t$ με εμβαδομέτρηση.

$$q_1 = \varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu(1) = i_1 \Delta t_1 = -0{,}1A \cdot 0{,}05s = -5mC$$

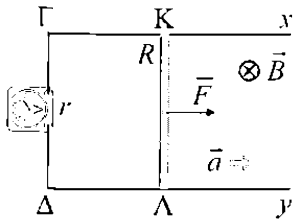
$$q_2 = 0$$

$$q_3 = \varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu(3) = i_3 \Delta t_3 = 0{,}1A \cdot 0{,}05s = 5mC$$

$$|q| = |q_1| + |q_2| + |q_3| = 10mC$$

**γ.** Η μαγνητική ροή μειώνεται στο χρονικό διάστημα ($100ms$ $\omega\varsigma$ $150ms$)

$$Q = P \cdot \Delta t = 0{,}8 \cdot 0{,}05 = \mathbf{0,04 joule}$$




**4.76** Τα άκρα Γ και Δ δύο παράλληλων οριζόντιων αγωγών Γ$x$ και Δ$y$, αμελητέας αντίστασης, συνδέονται με βολτόμετρο αντίστασης $R_V = 2\ \Omega$. Στο επίπεδο των δύο αγωγών είναι τοποθετημένος κάθετα στη διεύθυνσή τους, ένας άλλος ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ που έχει μήκος $l = 1$ m, μάζα $m = 2$ kg, αντίσταση $R = 8\ \Omega$ και μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές έχοντας τα άκρα του σε επαφή με τους αγωγούς Γ$x$ και Δ$y$. Το σύστημα των αγωγών βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1$ T, που είναι κάθετο στο επίπεδο των αγωγών. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, που ο αγωγός ΚΛ είναι ακίνητος, ασκείται σ’ αυτόν εξωτερική δύναμη $\vec{F}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο αγωγός ΚΛ αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a$. Κάποια χρονική στιγμή $t$ ο ρυθμός αύξησης της κινητικής ενέργειας του αγωγού είναι $16$ J/s και την ίδια στιγμή ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας στο κύκλωμα είναι 1,28 J/s. Τη χρονική στιγμή $t$ βρείτε:

**α.** Την επαγωγική ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο κύκλωμα.

**β.** Την ένδειξη του βολτομέτρου.

**γ.** Το φορτίο που έχει διέλθει από το βολτόμετρο μέχρι τη στιγμή $t$

**δ.** Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

**ε.** Τον ρυθμό της προσφερόμενης ενέργειας από τη δύναμη $\vec{F}$.

**Απ.[α.** $\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = 4$ V, **β.** $V_V = 0{,}8$ V, **γ.** $q = 0{,}4$ C, **δ.** $F = 2{,}4$ N, **ε.** $P_F = 9{,}6$ J/s**]**

**Το (-) στο νόμο της επαγωγής**

Αν η μεταβολή της μαγνητικής ροής $\Delta\Phi$ έχει συνέχεια το ίδιο πρόσημο τότε η $\mathcal{E}_{\varepsilon\pi}$ έχει συνέχεια την ίδια πολικότητα και την δείχνουμε στο σχήμα και η τιμή της επαγωγικής ΗΕΔ που υπολογίζουμε δεν χρειάζεται πρόσημο

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = \frac{d\Phi}{dt}$$

Σε **κινούμενο αγωγό** τιμή της επαγωγικής ΗΕΔ μπορεί να υπολογιστεί με τον τύπο

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = Bvl$$

Όταν η ταχύτητα του είναι κάθετη στον αγωγό και στην ένταση $\vec{B}$

Την πολικότητα της επαγωγικής ΗΕΔ την σημειώνουμε στο σχήμα και την βρίσκουμε ή με κανόνα Lenz ή με τη βοήθεια της δύναμης Lorentz.

Αν το κύκλωμα είναι ανοιχτό τότε εξετάζουμε τι θα συνέβαινε αν ήταν κλειστό.

Σε περιπτώσεις που η μεταβολή ροής ΔΦ παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές πχ σε ασκήσεις με διαγράμματα θα γράφουμε και το (-) στον τύπο της επαγωγής.

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

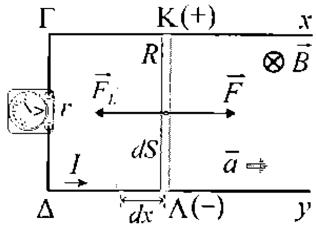
**4.76 Λύση**

**α.** Η επαγωγική ΗΕΔ αναπτύσσεται στον αγωγό ΚΛ και είναι:

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = Blv \ \ (1)$$

Την πολικότητα θα την σημειώσουμε στο σχήμα και μπορούμε να την καθορίσουμε με δύο τρόπους.

- Με τη δύναμη Lorentz στα ηλεκτρόνια που έχουν την ταχύτητα $v$ του αγωγού.
- Με τη δύναμη Laplace στον αγωγό ΚΛ που είναι αντίρροπη της ταχύτητας του.




Ο αγωγός ΚΛ δέχεται από το μαγνητικό πεδίο δύναμη Laplace μέτρου:
Για τον ρυθμό παραγωγής θερμότητας στην R ισχύει:

$$\frac{dQ}{dt} = i^2R = \frac{B^2l^2v^2}{R+R_V}R$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε την ταχύτητα:

$$12{,}8 = \frac{1\cdot 1\cdot v^2}{10}8 \Rightarrow v = 4\ \mathrm{m/s} \Rightarrow \mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = Blv \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = 4\ \mathrm{V}}$$

**β.** Η ένταση του ρεύματος είναι: $i = \mathcal{E}_{\varepsilon\pi}/(R+R_V) \Rightarrow i = 4/10 = 0{,}4A$
Η ένδειξη του βολτομέτρου είναι: $V_V = IR_V = 0{,}4\cdot 2 \Rightarrow \boldsymbol{V_V = 0{,}8\ \mathrm{V}}$

**γ.** Για τη συνισταμένη δύναμη ισχύει η σχέση $\Sigma F = ma$.

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} = \Sigma F\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = mav$$

Από την τελευταία με αντικατάσταση βρίσκουμε την επιτάχυνση:

$$16 = 2\cdot a\cdot 4 \Rightarrow a = 2\ \mathrm{m/s^2}$$

Η χρονική στιγμή t υπολογίζεται από την: $v = at \Rightarrow t = 4/2 = 2s$
Η μετατόπιση του αγωγού έως τη χρονική στιγμή $t$ είναι: $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 = 4\ \mathrm{m}$
Στον ίδιο χρόνο η μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι:

$$\Delta\Phi = Bl\Delta x = 4\ \mathrm{Wb}$$

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R+R_V} \Rightarrow q = 0{,}4\ \mathrm{C}$$

Μπορούμε να βρούμε το φορτίο από το διάγραμμα της έντασης $i = f(t)$

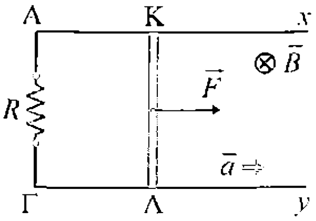
$$i = \frac{Blv}{R_{o\lambda}} = \frac{1\cdot 1\cdot at}{10} = 0{,}2t \ \Rightarrow \ q = \frac{1}{2}2\cdot 0{,}4 = \boldsymbol{0{,}4C}$$

**δ.** Η δύναμη Laplace έχει μέτρο που δίνεται από την σχέση: $F_L = BIl = 0{,}4\ \mathrm{N}$
Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη θεμελιώδη εξίσωση:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L = ma \Rightarrow F = F_L + ma \Rightarrow F = \boldsymbol{2{,}4\ \mathrm{N}}$$

**ε.** Ο ρυθμός της προσφερόμενης ενέργειας από τη δύναμη $\vec{F}$ είναι:

$$P_F = \frac{dE}{dt} = \frac{dW_F}{dt} = \frac{Fdx}{dt} = Fv = 2{,}4\cdot 4 \Rightarrow P_F = \boldsymbol{9{,}6\ \mathrm{J/s}}$$




**4.77** Δύο παράλληλοι οριζόντιοι αγωγοί $Ax$ και $\Gamma y$, με αμελητέα αντίσταση, απέχουν μεταξύ τους απόσταση $l = 1$ m και τα άκρα τους Α και Γ συνδέονται με αγωγό αντίστασης $R = 5\ \Omega$. Ένας άλλος αγωγός ΚΛ, με μάζα $m = 0{,}5$ kg και αμελητέα αντίσταση, μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές μένοντας κάθετος και σε επαφή με τους παράλληλους αγωγούς $Ax$ και $\Gamma y$. Το σύστημα των τεσσάρων αγωγών βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο που είναι κάθετο στο επίπεδό τους και έχει ένταση μέτρου $B = 0{,}5$ T. Ο αγωγός ΚΛ είναι αρχικά ακίνητος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στον αγωγό ΚΛ δύναμη $\vec{F}$, ίδιας διεύθυνσης με αυτή των παράλληλων αγωγών, η οποία τον αναγκάζει να κινηθεί με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$. Αν το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 6$ s, είναι 50,4 J. Βρείτε:

**α.** Την τάση $V_{K\Lambda} = f(t)$ στα άκρα του αγωγού και κάντε τη γραφική παράσταση.
**β.** Τη δύναμη που ασκείται στον αγωγό ΚΛ σε συνάρτηση με τον χρόνο.
**γ.** Τη θερμότητα που παράγεται στον αντιστάτη $R$ ως τη χρονική στιγμή $t$.
**δ.** Τον ρυθμό αύξησης της κινητικής ενέργεια του αγωγού τη χρονική στιγμή $t = 6$ s.
**ε.** Τον ρυθμό παραγωγής θερμότητας στον αντιστάτη αντίστασης $R$ τη χρονική στιγμή $t = 6$ s.

**Απ.[α.** $1t$ (SI), **β.** $0{,}1t + 1$ (SI), **γ.** 14,4 J, **δ.** = 12 J/s, **ε.** 7,2 J/s**]**

**Μελέτη κίνησης αγωγού -Θεμελιώδης νόμος και Ενεργειακή προσέγγιση**

Στην μελέτη κίνησης αγωγού που κάνει μεταφορική κίνηση σε ομογενές μαγνητικού πεδίου μπορούμε να εφαρμόσουμε θεμελιώδη νόμο

$$\Sigma F = ma$$

Για την ενεργειακή μελέτη προτιμότερο είναι να εφαρμόζουμε την ΑΔΕ ώστε να αναδεικνύουμε τις ενεργειακές μεταβολές που συμβαίνουν.

Όσοι προτιμούν να εφαρμόζουν το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας (ΘΜΚΕ) πρέπει να γνωρίζουν την φυσική σημασία του έργου της δύναμης Laplace

« Το έργο της δύναμης Laplace εκφράζει την μηχανική ενέργεια που αφαιρεί η δύναμη Laplace από τον αγωγό και την μετατρέπει σε ηλεκτρική ενέργεια η οποία τελικά γίνεται θερμότητα joule στα σύρματα του κυκλώματος»

$$W_{FL} = \Delta E_{\eta\lambda} = Q$$

Η δύναμη Laplace σε έναν αγωγό που διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα έχει μέτρο

$$|F_L| = \frac{B^2 l^2}{R_{o\lambda}} \upsilon$$

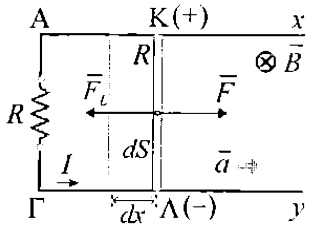
Είναι μία δύναμη της μορφής: $F_L = -b\upsilon$ με $b = B^2 l^2 / R_{o\lambda}$

**4.77 Λύση**

**α.** Ο αγωγός ΚΛ επιταχύνεται και κάθε χρονική στιγμή έχει ταχύτητα

$$\upsilon = at$$

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το κύκλωμα μεταβάλλεται και έτσι αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ:

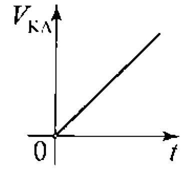



$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = Bl\upsilon = Blat \Rightarrow \mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = 1t \text{ (SI)}$$

Επειδή ο αγωγός ΚΛ έχει μηδενική αντίσταση, η τάση στα άκρα του θα είναι ίση με την επαγωγική ΗΕΔ.

$$V_{K\Lambda} = iR = \frac{\mathcal{E}_{\varepsilon\pi}}{R}R = \mathcal{E}_{\varepsilon\pi} \Rightarrow \boldsymbol{V_{K\Lambda} = 1t} \text{ (SI)}$$

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία (Σχήμα)



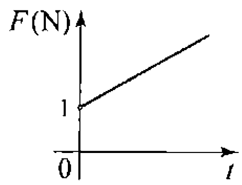

**β.** Η ένταση του ρεύματος υπολογίζεται από τον νόμο του Ohm:

$$i = \frac{\mathcal{E}_{\varepsilon\pi}}{R} = \frac{1t}{5} \Rightarrow i = 0{,}2t \text{ (SI)}$$

Η δύναμη Laplace που ασκείται στον αγωγό ΚΛ έχει μέτρο $F_L = Bil$ και είναι αντίρροπη της ταχύτητας.
Από τον θεμελιώδη νόμο έχουμε:

$$F - F_L = ma \Rightarrow F = Bil + ma \Rightarrow \boldsymbol{F = 0{,}1t + 1} \text{ (SI)}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F = f(t)$ είναι ευθεία και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.




**γ.** Τη χρονική στιγμή $t = 6$ s ο αγωγός ΚΛ έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon = at = 12$ m/s, οπότε η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 36 \text{ J}$$

Από τη διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

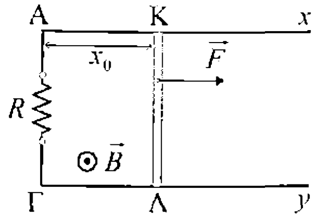
$$W_F = K + Q \Rightarrow Q = W_F - K \Rightarrow Q = 14{,}4 \text{ J}$$

**ii.** Ο ρυθμός αύξησης της κινητικής ενέργεια του αγωγού τη χρονική $t = 6$ s είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} = ma\upsilon \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 12 = 12 \text{ J/s}$$

**iii.** Τη χρονική στιγμή $t = 6$ s η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι $i = 0{,}2 \cdot 6 = 1{,}2$ A, οπότε ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας στον αντιστάτη $R$ είναι:

$$\frac{dQ_R}{dt} = i^2R = 7{,}2 \text{ J/s}$$




**4.78** Ο αγωγός ΚΛ του σχήματος έχει μήκος $\ell = 0{,}4m$, αντίσταση $r = 0{,}2\Omega$, μάζα $m = 0{,}1kg$ και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε επαφή με δυο παράλληλους οριζόντιους αγωγούς $Ax$ και $\Gamma y$, μέσα σε ένα ομογενές κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0{,}5T$. Οι αγωγοί $Ax$ και $\Gamma y$ δεν παρουσιάζουν αντίσταση, Τα άκρα Α και Γ συνδέεται αντιστάτης με $R = 0{,}3\Omega$. Αρχικά $t_o = 0$ ο αγωγός ΚΛ βρίσκεται στην θέση $x_o = \mathbf{1}m$ με αρχή του άξονα $x'x$. στο Α, Ο αγωγός ΚΛ, με την επίδραση μιας κατάλληλης οριζόντιας δύναμης, κινείται προς τα δεξιά έτσι ώστε η κινητική του ενέργεια μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την μετατόπιση $\Delta x$ σύμφωνα με τη σχέση $K = 0{,}2\Delta x$ . Βρείτε:

**α** . Την μαγνητική ροή που διέρχεται από το κύκλωμα ως συνάρτηση του χρόνου και κάντε τη γραφική της παράσταση ως τη στιγμή $t_2 = 2s$

**β.** Την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σαν συνάρτηση του χρόνου μέχρι τη στιγμή $t_1$ και κάντε την γραφική της παράσταση

**γ.** Το φορτίο που μετακινήθηκε στη διάρκεια του δεύτερου δευτερολέπτου

**δ.** Την ενέργεια που πρόσφερε η δύναμη $F$ αν η θερμότητα που αναπτύχθηκε στον αγωγό ΚΛ ως τη στιγμή $t_1$ είναι $0{,}16j$

**ε.** Τη στιγμή $t_1$ καταργούμε την δύναμη $F$ και ο αγωγός επιβραδύνεται και σταματάει αφού διανύσει διάστημα $s = 5m$ μετά τη στιγμή $t_1$ βρείτε:

**i.** Την μέγιστη μαγνητική ροή που διέρχεται από το κύκλωμα

**ii.** Το φορτίο που μετακινήθηκε στο κύκλωμα ώσπου να σταματήσει ο αγωγός.

**iii.** Το ρυθμό μεταβολής της τάσης στα άκρα του αγωγού τη στιγμή $t_1 = 1s$

Απ. [α. $0{,}2 + 0{,}2 \cdot t^2$, β. $0{,}8t$, γ. $1{,}2C$, δ. $1{,}2j$, ε.i. $2Wb$, ii. $3{,}6C$ iii. $0{,}24V/s$]

**Πως βρίσκουμε το είδος της κίνησης από τη σχέση $K = \lambda\Delta x$ (λ=σταθ)**

Από την $K = \lambda\Delta x$ προκύπτει η σχέση

$$dK = \lambda dx \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \lambda\frac{dx}{dt} \Rightarrow m\alpha\upsilon = \lambda\upsilon \Rightarrow m\alpha = \lambda = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \alpha = \sigma\tau\alpha\theta$$

**Λόγος θερμοτήτων $Q_1/Q_2$ σε δύο αντιστάσεις $R_1, R_2$**

Σύνδεση σε σειρά (ίδιο ρεύμα $i$ )

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\Sigma dQ_1}{\Sigma dQ_2} = \frac{R_1\Sigma i^2 dt}{R_2\Sigma i^2 dt} = \frac{R_1}{R_2}$$

Σύνδεση παράλληλα (ίδια τάση $v$ )

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\Sigma dQ_1}{\Sigma dQ_2} = \frac{\Sigma\frac{v^2}{R_1}dt}{\Sigma\frac{v^2}{R_2}dt} = \frac{R_2}{R_1}$$

**4.78 Λύση**

**α.** $K = 0{,}2x \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 0{,}2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \Sigma F\upsilon = 0{,}2\upsilon \Rightarrow ma = 0{,}2 \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$

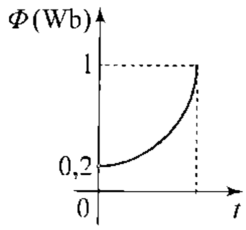
Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση: $\upsilon = \alpha t$

$$x = x_o + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x = 1 + 1t^2$$

$$\Phi = BA = Blx = 0{,}5 \cdot 0{,}4(1 + 1t^2) = \mathbf{0{,}2 + 0{,}2 \cdot t^2}$$

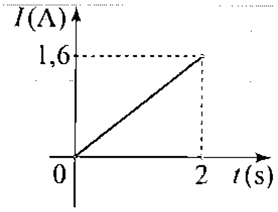
$$t = 0 \Rightarrow \Phi = 0{,}2Wb$$

$$t = 2 \Rightarrow \Phi = 1Wb$$




**β.** Τυχαία $(t)$ είναι: $\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = Bl\upsilon$

$$i = \frac{Bl\upsilon}{R} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 2t}{0{,}5} = \mathbf{0{,}8t}$$




**γ.** Η μετατόπιση στην διάρκεια του $2^{ου}$ δευτερολέπτου υπολογίζεται από το διάγραμμα $\upsilon - t$ ή από την εξίσωση θέσης:

$$x = 1 + 1t^2 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = 2m \\ \\ t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 5m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta x = 3m$$

$$\Delta\Phi = Bl\Delta x = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 3 = 0{,}6Wb \xrightarrow{\text{Τύπος Neumann}} : \ q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{0{,}6}{0{,}5} = \mathbf{1{,}2C}$$

**δ.** Τη στιγμή $t_2 = 2s$ ο ΚΛ βρίσκεται στη θέση $x_2 = 5\ m$ και η κινητική του ενέργεια είναι: $K = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8j$. Οι θερμότητες στις αντιστάσεις έχουν λόγο

$$\frac{Q_r}{Q_R} = \frac{2}{3} \Rightarrow Q_R = \frac{3}{2}Q_r \Rightarrow Q_R = \frac{3}{2}0{,}16 = 0{,}24$$

$$Q = Q_R + Q_r \Rightarrow Q = 0{,}4j$$

Από Διατήρηση Ενέργειας: $E_{\pi\rho} = K + Q = 0{,}8 + 0{,}4 = \mathbf{1{,}2j}$

**ε.** **i.** Η μαγνητική ροή γίνεται μέγιστη όταν σταματάει ο αγωγός $(\upsilon = 0)$ και αυτό συμβαίνει όταν βρίσκεται στην τελική του θέση $(x)$

$$x = x_2 + s = 2x_2 \Rightarrow \Phi_{max} = 2\Phi_1 = \mathbf{2Wb}$$

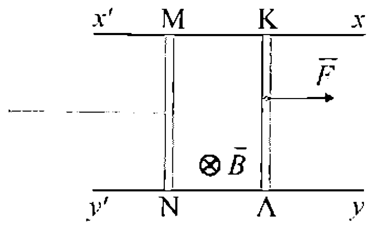
**ii.** Τύπος Neumman:

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R_{o\lambda}} = \frac{\Phi_{max} - \Phi_o}{R_{o\lambda}} = \frac{2 - 0{,}2}{0{,}5} = \frac{1{,}8}{0{,}5} = \mathbf{3{,}6C}$$

**iii.** Η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι :

$$V_{K\Lambda} = V_R = IR = \frac{Bl\upsilon}{R_{o\lambda}}R = \frac{R}{R_{o\lambda}}Bl\upsilon = \frac{12}{100}\upsilon$$

$$\frac{dV_{K\Lambda}}{dt} = \frac{12}{100}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{12}{100}a = \mathbf{0{,}24V/s}$$




**4.79** Δύο οριζόντιες και παράλληλες σιδηροτροχιές $x'x$ και $y'y$ έχουν μεγάλο μήκος ,αμελητέα αντίσταση και η απόσταση τους είναι $l = 1m$. Οι μεταλλικοί ομογενείς αγωγοί ΚΛ και ΜΝ είναι και φτιαγμένοι από το ίδιο υλικό και έχουν ίδιο μήκος $l = 1m$ και αντιστάσεις $R_{K\Lambda} = R_1 = 1{,}5\Omega$ και $R_{MN} = R_2 = 0{,}5\Omega$ ,ο αγωγός ΚΛ έχει μάζα $m_1 = 0{,}5kg$. Οι δύο αγωγοί μπορούν να ολισθαίνουν στις σιδηροτροχιές χωρίς τριβές με τα άκρα τους σε επαφή με τους αγωγούς $x'x$ και $y'y$.

Η διάταξη βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο $B = 1T$. Ο αγωγός ΜΝ είναι στερεωμένος με μονωτικό νήμα το οποίο συνδέει το μέσον του με σταθερό σημείο έτσι ώστε το νήμα να είναι τεντωμένο και οριζόντιο, το όριο θραύσης του νήματος είναι $4N$. Αρχικά οι δύο αγωγοί ΚΛ και ΜΝ είναι ακίνητοι και τη στιγμή $t_o = 0$ ασκούμε στον αγωγό ΚΛ σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου $F = 10N$ την οποία καταργούμε τη στιγμή που σπάει το νήμα. Βρείτε:

**α.** Την μέγιστη ταχύτητα που αποκτά ο αγωγός ΚΛ.
**β.** Την τάση στα άκρα των αγωγών τη στιγμή που σπάει το νήμα.
γ. Την μάζα του αγωγού ΜΝ
**δ.** Τις τελικές ταχύτητες που θα αποκτήσουν οι δύο αγωγοί.
**ε.** Την θερμότητα που αναπτύσσεται σε κάθε αγωγό μετά το σπάσιμο του νήματος.

Απ.[α.$8m/s$, β. $2V$, γ. $1{,}5kg$, δ. $2m/s$, ε. 9j, 3j]

Οι μάζες των αγωγών είναι ανάλογες των εμβαδών διατομής τα οποία θα υπολογίσουμε από τη σχέση των αντιστάσεων.

**Κύκλωμα με δύο πηγές 2ος -Κανόνας Kirchhoff**

Μετά το σπάσιμο του νήματος στο κύκλωμα υπάρχουν δύο πηγές με ΗΕΔ

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi 1},\ \ \mathcal{E}_{\varepsilon\pi 2}$$

Οι δύο πηγές έχουν αντίθετη πολικότητα και ο δεύτερος κανόνας Kirchhoff γράφεται:

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi 1} - \mathcal{E}_{\varepsilon\pi 2} = iR_{o\lambda} \Rightarrow Bu_1 l - Bu_2 l = iR_{o\lambda}$$

$u_1, u_2$ οι ταχύτητες των αγωγών ΚΛ και ΜΝ

**Κίνηση αγωγών**

Οι αγωγοί ΚΛ και ΜΝ δέχονται αντίθετες δυνάμεις ,έτσι ο ΚΛ επιβραδύνεται και η ταχύτητα $u_1$ μειώνεται ενώ ο ΜΝ επιταχύνεται και αυξάνει η ταχύτητα $u_2$.

Κάποια στιγμή θα έχουν ίδιες ταχύτητες: $u_1 = u_2 = u$ και τότε $i = 0$

Το σύστημα των δύο αγωγών μετά το σπάσιμο του νήματος είναι **μονωμένο** και η **ορμή του διατηρείται.**

**4.79 Λύση**

**α.** Λόγω της δύναμης $\vec{F}$ ο αγωγός ΚΛ επιταχύνεται και μετά από λίγο έχει ταχύτητα $\vec{υ}$ και αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ. $\mathcal{E}_{επ} = Bυl$

Κάποια στιγμή ο ΚΛ έχει ταχύτητα υ και τότε δέχεται δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = Bil = B^2l^2υ\ /R_{ολ}$$

Ο ΜΝ δέχεται δύναμη Laplace $\vec{F}_L'$ προς τα δεξιά αντίθετη της $\vec{F}_L$. Όσο το νήμα δεν σπάει ο αγωγός ΜΝ ισορροπεί. Από την ισορροπία του αγωγού ΜΝ:

$$ΣF = 0 \Rightarrow F_L' = T \Rightarrow \frac{B^2l^2υ}{R_{ολ}} = T \Rightarrow υ = \frac{TR_{ολ}}{B^2l^2}$$

Ο αγωγός ΚΛ αποκτά μέγιστη ταχύτητα όταν γίνει $T = T_θ = 10N$

$$υ = \frac{TR_{ολ}}{B^2l^2} = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 8m/s$$

Αν το νήμα δεν έσπαγε τότε ο ΚΛ θα αποκτούσε οριακή ταχύτητα

$$υ_{ορ} = FR_{ολ}/B^2l^2 = 20/1 = 20m/s$$

**β.** Στον ΚΛ είναι: $\mathcal{E}_{επ} = Bυl = 1 \cdot 8 \cdot 1 = 8V$

$$i = \frac{\mathcal{E}_{επ}}{R_{ολ}} = \frac{8}{2} = 4A \quad \Rightarrow \quad V_{ΚΛ} = V_{MN} = iR_{MN} = 4 \cdot 0{,}5 = 2V$$

**γ.** Θα υπολογίσουμε αρχικά την μάζα $m_2$ του αγωγού ΜΝ

$$R_1 = 3R_2 \Rightarrow ρ\frac{l_1}{A_1} = 3ρ\frac{l_2}{A_2} \Rightarrow A_2 = 3A_1$$

Οι αγωγοί ΚΛ και ΜΝ έχουν ίδια πυκνότητα (ρ) . Η μάζα είναι ανάλογη του όγκου .Ο ο αγωγός ΜΝ έχει τριπλάσιο όγκο από τον αγωγό ΚΛ.

$$V_2 = 3V_1 \Rightarrow ρV_2 = 3ρV_1 \Rightarrow m_2 = 3m_1 = 1{,}5kg$$

**δ.** Μετά το σπάσιμο του νήματος το σύστημα των 2 αγωγών ισχύει $ΣF_{εξ} = 0$. Στο μονωμένο η ορμή διατηρείται: Ο ΚΛ επιβραδύνεται ενώ ο ΜΝ επιταχύνεται έτσι κάποια στιγμή θα αποκτήσουν ίσες ταχύτητες. Τότε $i = 0$ και στη συνέχεια οι δύο αγωγοί θα κινούνται με την ίδια σταθερή ταχύτητα $\vec{u}$

Από την ΑΔΟ: $m_1υ = m_1u_1 + m_2u_2$

Τελικά $u_1 = u_2 = u$ και γράφουμε: $m_1υ = m_1u + m_2u \Rightarrow u = \frac{m_1}{m_1+m_2}υ = 2m/s$

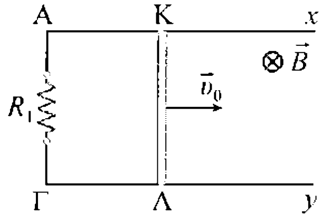
**ε.**. Από διατήρηση ενέργειας: $\frac{1}{2}m_1υ^2 = \frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2 + Q \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}0{,}5 \cdot 64 = \frac{1}{2}(0{,}5 + 1{,}5) \cdot 4 + Q \Rightarrow 16 = 4 + Q \Rightarrow Q = 12j$$

$$Οι\ αντιστάσεις\ συνδέονται\ στη\ σειρά: \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{3}{1} \Rightarrow Q_1 = 3Q_2$$

$$Q_1 + Q_2 = 12 \Rightarrow 4Q_2 = 12 \Rightarrow Q_2 = 3j$$

$$Q_1 = 3Q_2 = 9j$$




**4.80** Στη διάταξη του σχήματος οι παράλληλοι και οριζόντιοι αγωγοί έχουν αμελητέα αντίσταση και τα άκρα τους Α και Γ συνδέονται με αγωγό αντίστασης $R = 3{,}2\Omega$. Κάθετα στο επίπεδο των αγωγών υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1T$. Η μεταλλική ράβδος ΚΛ με μήκος $l = 0{,}5m$, μάζα $m = 0{,}2kg$, αντίσταση $r = 0{,}8\Omega$ και διατηρείται συνεχώς σε επαφή με τις σιδηροτροχιές $Ax$ και $\Gamma y$ ώστε να είναι κάθετη σε αυτές. Κάποια χρονική $t_o = 0$ εκτοξεύουμε τη ράβδο με ταχύτητα $\upsilon_o = 2m/s$ έτσι ώστε ο αγωγός να απομακρύνεται από το σύρμα ΑΓ και ταυτόχρονα εφαρμόζουμε κατάλληλη δύναμη $F$ ομόρροπη της αρχικής ταχύτητας που προσφέρει ενέργεια στη διάταξη με σταθερό ρυθμό $4j/s$. Αν δεν υπάρχουν τριβές να βρείτε:

**α**. Την επιτάχυνση του αγωγού ΚΛ τη στιγμή $t_o = 0$.
**β.** Το είδος κίνηση του αγωγού και η τελική ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος.
**γ.** Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου ΚΛ.
**δ.** Την κινητική ενέργεια του ΚΛ τη στιγμή $t$ που έχει επιτάχυνση $2{,}5m/s^2$
**ε.** Το ρυθμό μεταβολής της τάσης στα άκρα του αγωγού ΚΛ τη στιγμή $t$.
Δίδεται $\sqrt{5} \approx 2{,}25$

Αρτέμιος Σαράντης

Απ. [α. $7{,}5m/s^2$, β. $8m/s$, γ. $3{,}75j/s$, 0, δ. $2{,}5j$, ε. $0{,}5V/s$]



**Ισχύς Δύναμης ($p_F$)**
Ισχύς δύναμης ή ρυθμός παραγωγής έργου ή ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας

$$p_F = \frac{dW_F}{dt}$$

Όταν η δύναμη και η ταχύτητα έχουν ίδια κατεύθυνση

$$p_F = \frac{dW_F}{dt} = Fv$$

**Μέγιστη – ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής κινητικής ενέργειας**
Η αρχή διατήρησης της ενέργειας γράφεται: $dE_{\pi\rho} = dQ + dK \Rightarrow$

$$\frac{dE_{\pi\rho}}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dK}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = p - i^2 R_{o\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = p - \frac{B^2 l^2 v^2}{R_{o\lambda}}$$

Η μέγιστη τιμή προκύπτει για $\upsilon = (min) = 0$

Η ελάχιστη τιμή προκύπτει για $\upsilon = (max) = 0$

**4.80 Λύση**

**α.** Ο ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας είναι η ισχύς της δύναμης $F$

$$p_F = \frac{dW_F}{dt} = \frac{Fdx}{dt} = F \cdot \upsilon \Rightarrow F = \frac{p_F}{\upsilon}$$

Η αρχική τιμή της δύναμης έχει μέτρο $F_o$

$$F_o = \frac{p}{\upsilon_o} = 2N$$

Τα μεγέθη $F, \upsilon$ είναι αντιστρόφως ανάλογα

Αρχικά ο αγωγός ΚΛ δέχεται δύναμη Laplace αντίρροπη της $\upsilon_o$ μέτρου

$$F_{Lo} = \frac{B^2 l^2 \upsilon_o}{R_{o\lambda}} = 0,5N$$

$$\Sigma F = ma_o \Rightarrow F_o - F_{Lo} = ma_o \Rightarrow a_o = \mathbf{7,5m/s^2}$$

**β.** Η συνισταμένη δύναμη έχει την κατεύθυνση της $\vec{\upsilon}_o$ και η κίνηση του αγωγού ΚΛ θα είναι επιταχυνόμενη μέχρι να αποκτήσει μέγιστη σταθερή ταχύτητα.

Η οριακή ταχύτητα είναι μέγιστη όταν:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \Rightarrow \frac{p}{\upsilon} = \frac{B^2 l^2 \upsilon}{R_{o\lambda}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{pR_{o\lambda}}{B^2 l^2}} = 8m/s$$

**γ.** Η αρχή διατήρησης ενέργειας $E_{\pi\rho o\sigma} = K + Q$ γράφεται και ως εξής

$$\frac{dE_{\pi\rho o\sigma}}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dQ}{dt} \Rightarrow p = \frac{dK}{dt} + i^2 R_{o\lambda} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = p - i^2 R_{o\lambda}$$

$$\frac{dK}{dt} = p - \frac{B^2 l^2 \upsilon^2}{R_{o\lambda}} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = p - \frac{1}{16}\upsilon^2$$

$$\acute{o}\tau\alpha\nu\ \upsilon = max = 8m/s \Rightarrow \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\varepsilon\lambda} = 4 - 4 = 0$$

$$\acute{o}\tau\alpha\nu\ \upsilon = min = 2m/s \Rightarrow \left(\frac{dK}{dt}\right)_{max} = 4 - 0,25 = 3,75j/s$$

**δ.**

$$\Sigma F = ma \Rightarrow \frac{p}{\upsilon} - \frac{B^2 l^2}{R_{o\lambda}}\upsilon = ma \Rightarrow \frac{4}{\upsilon} - \frac{\upsilon}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \upsilon = 5m/s$$

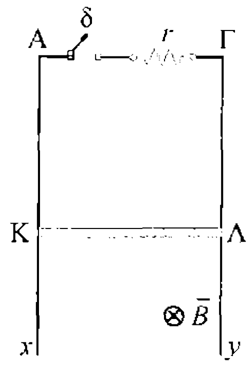
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}0,2 \cdot 25 = 2,5j$$

**ε.** Η τάση στα άκρα του ΚΛ είναι ίση με την τάση στα άκρα της αντίστασης R

$$V_{K\Lambda} = iR = \frac{B\upsilon l}{R_{o\lambda}}R = \frac{3,2}{4}Bl\upsilon = 0,8 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot \upsilon = 0,4\upsilon$$

$$\frac{dV_{K\Lambda}}{dt} = \frac{0,4d\upsilon}{dt} = 0,4 \cdot 2,5 = 1V/s$$

**4.81** Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Α και Γ συνδέονται μέσω διακόπτη με αντίσταση $r = 1\Omega$. Ο αγωγός ΚΛ βρίσκεται αρχικά ακίνητος πολύ κοντά στη θέση ΑΓ σε επαφή με δύο κατακόρυφους αγωγούς $Ax, \Gamma y$ που έχουν αμελητέα αντίσταση. Ο αγωγός ΚΛ έχει μήκος $l = 1m$ και μάζα $m = 400g$ και αντίσταση $R = 1\Omega$. Η διάταξη βρίσκεται σε οριζόντιο και ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 2T$ κάθετο στο επίπεδο των δύο κατακόρυφων αγωγών. Τη στιγμή $t_o = 0$ αφήνουμε ελεύθερο τον αγωγό να κινηθεί χωρίς τριβές και τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}2s$ κλείνουμε το διακόπτη δ. Αν δίδεται $g = 10\,m/s^2$ να βρείτε:




**α.** Την τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη και να την συγκρίνετε με την τιμή που είχε λίγο πριν το κλείσιμο του διακόπτη.
**β**. Την μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει ο αγωγός ΚΛ
**γ.** Το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του αγωγού ΚΛ πριν και μετά το κλείσιμο του διακόπτη.
**δ.** Το φορτίο που μετακινήθηκε στο κύκλωμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 0{,}6s$
**ε.** Το έργο της δύναμης Laplace όταν ο ΚΛ έχει διανύσει διάστημα $s_{ολ} = 1m$.
**ζ.** Τη θερμότητα λόγω φαινομένου joule σε κάθε αντίσταση ως τη στιγμή $t_2$

Απ. [α. $4V$, $2V$, β. $2m/s$, γ. 0, $8j/s$, δ. $0{,}8C$, ε. $-3{,}2j$, ζ. $1{,}6j$]

**Τάση στα άκρα αγωγού αντίστασης R**
Αν ο αγωγός είναι ένας αντιστάτης τότε η τάση στα άκρα του είναι:

$$V = iR$$

Αν ο αγωγός είναι κινούμενος μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο που κινείται έτσι ώστε να αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ ίση με $Bvl$ τότε ο αγωγός συμπεριφέρεται σαν πηγή $(\mathcal{E}, r)$ με:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{επ} = (Bvl) \text{ και } r = R.$$

Η τάση στα άκρα του αγωγού υπολογίζεται σαν πολική τάση πηγής

$$V = \mathcal{E} - ir$$

Όπου $i$ η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

- Αν το κύκλωμα είναι ανοιχτό $(i = 0)$ τότε η τάση στα άκρα του αγωγού είναι ίση με την επαγωγική ΗΕΔ

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{επ} = Bvl$$

- Αν η τάση που επικρατεί στα άκρα του αγωγού εφαρμόζεται σε κάποιο τμήμα του κυκλώματος που έχει εξωτερική αντίσταση $R_{εξ}$ και ισχύει:

$$V = iR_{εξ}$$

**4.81 Λύση**

**α.** Πριν κλείσουμε το διακόπτη η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι ίση με την επαγωγική ΗΕΔ:

$$V_{K\Lambda} = \mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = Blv = Blgt = 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot t = 20t \xrightarrow{t_1=0,2s} V_{K\Lambda} = \mathbf{4V}$$

Αμέσως μετά το κλείσιμο διακόπτη είναι:

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = 4V, \quad i = \mathcal{E}_{\varepsilon\pi}/R_{o\lambda} = 4/2 = 2A$$

$$V'_{K\Lambda} = iR_{A\Gamma} = 2 \cdot 1 = 2V$$

**β.** Αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης $i = 2A$ και δέχεται δύναμη Laplace αντίρροπη της ταχύτητας που έχει μέτρο.

$$F_L = Bil = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4N$$

Παρατηρούμε ότι είναι: $F_L = mg$ οπότε: : $\Sigma F = 0 \Rightarrow$ ο ΚΛ στη συνέχεια θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και έτσι η μέγιστη ταχύτητα είναι

$$v = gt = 10 \cdot 0{,}2 = \mathbf{2m/s}$$

**γ.** Η μηχανική ενέργεια πριν το κλείσιμο του διακόπτη διατηρείται διότι η μόνη δύναμη είναι το βάρος (συντηρητική)

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = \mathbf{0}$$

Μετά το κλείσιμο του διακόπτη

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = \frac{dW_{\mu\eta\ \sigma\upsilon\nu\tau\eta\rho\eta\tau\iota\kappa\acute{\omega}\nu}}{dt} = \frac{dW_{FL}}{dt} = -F_L v \xrightarrow{F_L=mg}$$

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = -mgv = -4 \cdot 2 = \mathbf{-8j/s}$$

ή

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = \frac{dU}{dt} = -8j/s$$

**δ.** Από 0 έως 0,2s ο αγωγός δεν διαρρέεται από ρεύμα.

Από $0{,}2s - 0{,}6s$ το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης

$$i = \frac{Bvl}{R_{o\lambda}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 2A$$

$$q = I\Delta t = 2 \cdot 0{,}4 = \mathbf{0{,}8C}$$

**ε.** Από 0 έως 0,2 s ο αγωγός έχει διανύσει διάστημα $x = \frac{1}{2}gt^2 = 0{,}2m$

Η δύναμη Laplace ασκείται για μετατόπιση $\Delta x = 1 - 0{,}2m = 0{,}8m$ και είναι:

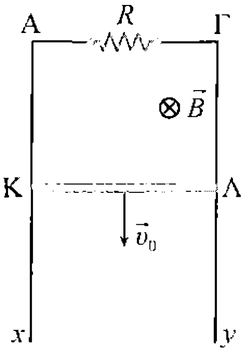
$$W_{FL} = -F_L s = -4 \cdot 0{,}8 = \mathbf{-3{,}2j}$$

**ζ.** Το έργο της δύναμης Laplace ισούται με τη θερμότητα joule.

Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1 = 0{,}4s$ η ένταση του ρεύματος είναι σταθερή $i = 2A$

$$Q = I^2 R\Delta t = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}4 = 3{,}2j$$

$$Q_R = Q_r = \mathbf{1{,}6j}$$




**4.82** Δύο κατακόρυφα σύρματα Αx και Γy συνδέονται στα πάνω άκρα τους με ένα σύρμα ΑΓ μήκους $l = 1m$ και αντίστασης $R = 0{,}5\Omega$ . Ένα ευθύγραμμος αγωγός μήκους $l = 1m$ και μάζας $m = 1kg$ μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές ώστε να είναι οριζόντιος με τα άκρα σε επαφή με τους κατακόρυφους αγωγούς. Κάθετα στο επίπεδο των κατακόρυφων αγωγών υπάρχει οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B$ . Αρχικά $t_o = 0$ ο αγωγός ΚΛ αμελητέας αντίστασης βρίσκεται σε απόσταση $x_o$ από το σύρμα ΑΓ και τότε του δίνουμε κατακόρυφη αρχική ταχύτητα $\upsilon_o$.
Αν η αρχική ταχύτητα έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο $\upsilon_o = 5m/s$ τότε ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης. Βρείτε:
**α.** Την ένταση του ομογενούς μαγνητικού πεδίου.
**β.** Το ρυθμό μεταβολής της μαγνητική ροής που διέρχεται από το κύκλωμα.(μέτρο)
Αν $\upsilon_o = 8m/s$ με φορά προς τα κάτω τότε να βρείτε:
**γ.** Το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του αγωγού τη χρονική στιγμή $t_o = 0$.
**δ.** Την τελική ταχύτητα του αγωγού και να εξετάσετε αν είναι μέγιστη ή ελάχιστη;
**ε.** Τη θερμότητα που αναπτύχθηκε στον αγωγό ΑΓ ως τη στιγμή που ο αγωγός έχει κατέβει κατά $h = 14m$ αν θεωρήσουμε ότι κινείται με ταχύτητα που είναι σχεδόν ίση με την οριακή του ταχύτητα.
ζ. Αν $\upsilon_o = 8m/s$ με φορά προς τα πάνω που είναι μικρότερη από την ταχύτητα που απαιτείται για να συγκρουστούν οι αγωγοί ΚΛ και ΑΓ βρείτε αν η τελική σταθερή ταχύτητα που αποκτά είναι μέγιστη ή ελάχιστη και να την υπολογίσετε. [πάρτε θετική φορά προς τα κάτω].

Απ. [ α. $1T$, β. $5Wb/s$ γ. $-6m/s^2$, δ. $\upsilon_{\varepsilon\lambda} = 5m/s$, ε.159,5$j$, ζ. $5\,m/s$]

**Μέγιστη ή ελάχιστη οριακή ταχύτητα**
Η τελική οριακή ταχύτητα του αγωγού ΚΛ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{mgR_{o\lambda}}{B^2 l^2}$$

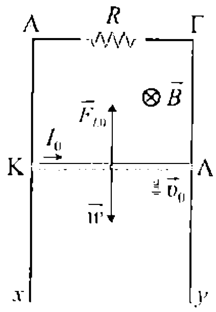
Και μπορεί να είναι μέγιστη ή ελάχιστη και εξαρτάται από την τιμή της $\upsilon_o$

$$\upsilon_o < \upsilon_{o\rho} \Rightarrow \ \upsilon_{o\rho} = \mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau\eta$$

$$\upsilon_o > \upsilon_{o\rho} \Rightarrow \ \upsilon_{o\rho} = \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\eta$$

Παρατηρούμε ότι η οριακή ταχύτητα είναι ανάλογη της ολικής αντίστασης. Αν μεταβάλλουμε την ολική αντίσταση τότε θα μεταβληθεί και οριακή ταχύτητα.
Αν στα σημεία Α,Γ συνδέσουμε μία οποιαδήποτε αντίσταση η οριακή ταχύτητα θα μειωθεί διότι στην παράλληλη σύνδεση ισχύει: $R_{o\lambda} < R$

**4.82 Λύση**




**α.** $i = σταθ \Rightarrow Bvl/R_{ολ} = σταθ \Rightarrow v = σταθερή \Rightarrow$

$$ΣF = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow\Rightarrow \frac{B^2l^2}{R}v = mg \Rightarrow B = \sqrt{\frac{mgR}{l^2v}} = \mathbf{1T}$$

**β.** Θεωρώντας το διάνυσμα $\vec{A}$ ομόρροπο του $\vec{B}$ η αρχική ροή είναι θετική .Επειδή αυξάνει το εμβαδόν θα είναι $dΦ/dt > 0$

$$\mathcal{E}_{επ} = \frac{dΦ}{dt} = Bvl = 1 \cdot 5 \cdot 1 = \mathbf{5Wb/s}$$

**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση του αγωγού ΚΛ

$$\mathcal{E}_{επ(o)} = Blv_o = 8V \quad \Rightarrow \quad i_o = \frac{\mathcal{E}_{επ(o)}}{R} = \frac{8}{0{,}5} = 16A$$

Τότε η δύναμη Laplace είναι αντίρροπη του βάρους και έχει μέτρο

$$F_{Lo} = BI_ol = 16N > mg = 10N$$

Με θετική φορά την φορά της αρχικής ταχύτητας:

$$ΣF = ma \Rightarrow mg - F_{Lo} = ma_o \Rightarrow$$

$$a_o = \frac{mg - F_{Lo}}{m} = g - \frac{F_{Lo}}{m} = 10 - \frac{16}{1} = \mathbf{-6m/s^2}$$

Άρα η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη αφού τα διανύσματα $\vec{v}, \vec{a}$ είναι αντίρροπα και το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται και έτσι μειώνεται και το μέτρο της δύναμης Laplace.

**δ.** Τελικά ο αγωγός θα έχει αποκτήσει σταθερή ταχύτητα ίση με $5m/s$, που είναι η ελάχιστη ταχύτητα και την υπολογίζουμε από τη σχέση:

$$ΣF = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow BIl = mg \Rightarrow B\frac{Bvl}{R}l = mg \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2l^2} \Rightarrow \boldsymbol{v_{ελ} = 5m/s}$$

**ε.** $E_{ολ} = σταθ \Rightarrow ΔE_{ολ} = 0 \Rightarrow ΔE_{μηχ} + ΔE_{ηλ} = 0 \Rightarrow ΔK + ΔU + ΔE_{ηλ} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}mv_{ελ}^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 - mgh + ΔE_{ηλ} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}1 \cdot 25 - \frac{1}{2}1 \cdot 64 - 1 \cdot 10 \cdot 14 + ΔE_{ηλ} = 0 \Rightarrow$$

$$12{,}5 - 32 - 140 + ΔE_{ηλ} = 0 \Rightarrow ΔE_{ηλ} = 159{,}5j \Rightarrow \boldsymbol{Q = 159{,}5j}$$

**ζ.** Η αρχική ταχύτητα έχει φορά προς τα πάνω

Η δύναμη Laplace έχει φορά προς τα κάτω και έτσι ο αγωγός ΚΛ επιβραδύνεται και αφού φτάσει σε κάποιο ύψος $h$ η ταχύτητα του μηδενίζεται. Στη συνέχεια ο αγωγός κατέρχεται επιταχυνόμενος.

$$ΣF = ma \Rightarrow mg - F_l = ma \Rightarrow a = g - \frac{B^2l^2}{mR}v$$

Επειδή η ταχύτητα του αγωγού στην καθοδική του κίνηση αυξάνει συνέχεια θα αποκτήσει κάποια μέγιστη τιμή όταν

$$a = 0 \Rightarrow g - \frac{B^2l^2}{mR}v = 0 \Rightarrow v = \frac{mRg}{B^2l^2} = \frac{1 \cdot 0{,}5 \cdot 10}{1 \cdot 1} = \mathbf{5m/s}$$

Είναι η μέγιστη ταχύτητα της καθοδικής κίνησης