ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Από τη δοθείσα εξίσωση $x = 0,2\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (S.I.) σε σύγκριση με την εξίσωση της θεωρίας $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ συμπεραίνουμε ότι:

- Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 0,2\,m$.
- Η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega = 4\pi\,rad/s$.
- Η αρχική φάση είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad$.

Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}DA^2 \qquad (1)$$

Η σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης είναι:

$$D = m\omega^2 \quad ή \quad D = 0,1\,kg \cdot 16\pi^2\,s^{-2} \quad ή \quad D = 16\,N/m$$

Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης επομένως είναι:

$$\mathbf{E_{ολ} = 32 \cdot 10^{-2}\,J}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι:

$$x_{αρχ} = 0,2\eta\mu\frac{\pi}{6} \quad ή \quad x_{αρχ} = 0,1\,m$$

Η αρχική δυναμική ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_{αρχ} = \frac{1}{2}Dx_{αρχ}^2 \quad ή \quad U_{αρχ} = 8 \cdot 10^{-2}\,J$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας στην απλή αρμονική ταλάντωση την $t = 0$ βρίσκουμε την αρχική κινητική ενέργεια $K_{αρχ}$. Είναι:

$$E_{ολ} = U_{αρχ} + K_{αρχ} \quad ή \quad K_{αρχ} = E_{ολ} - U_{αρχ} \quad ή \quad K_{αρχ} = 24 \cdot 10^{-2}\,J$$

Διαπιστώνουμε ότι την $t = 0$ η κινητική ενέργεια $(K_{αρχ} = 24 \cdot 10^{-2}\,J)$ είναι τριπλάσια της δυναμικής $(U_{αρχ} = 8 \cdot 10^{-2}\,J)$:

$$\mathbf{K_{αρχ} = 3U_{αρχ}}$$

β. Από τη διατήρηση της ενέργειας στην απλή αρμονική ταλάντωση κάθε στιγμή ισχύει:

$$E_{ολ} = U + K$$

Επειδή είναι $K = 3U$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$E_{ολ} = 4U \quad ή$$

$$\frac{1}{2}DA^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dx^2 \quad ή \quad x = \pm\frac{A}{2}$$

Για πρώτη φορά αυτό συμβαίνει, όταν είναι:

$$x = +\frac{A}{2} \quad ή \quad 0,2ημ\left(4πt + \frac{π}{6}\right) = 0,1 \quad ή$$

$$ημ\left(4πt + \frac{π}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad ή \quad ημ\left(4πt + \frac{π}{6}\right) = ημ\frac{π}{6}$$

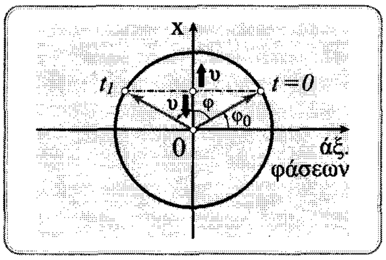
Η δεκτή λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι:

$$4πt_1 + \frac{π}{6} = \frac{5π}{6} \quad ή \quad \mathbf{t_1 = \frac{1}{6}s}$$

Β΄ τρόπος

Επειδή την $t = 0$ είναι $K = 3U$, και το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = +A/2$ ανερχόμενο, αυτό θα ξανασυμβεί, όταν το σώμα περνάει από την ίδια θέση $x = +A/2$ κατερχόμενο.

Μέσα στο ζητούμενο χρόνο t_1 το στρεφόμενο διάνυσμα της ταλάντωσης έχει διαγράψει την επίκεντρη γωνία φ, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Για να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η απομάκρυνση x παίρνει μια ορισμένη τιμή x_1, λύνουμε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης. Δηλαδή:

$$x_1 = Aημ(ωt_1 + φ_0) \quad ή$$

$$ημ(ωt_1 + φ_0) = \frac{x_1}{A} \quad ή$$

$$ημ(ωt_1 + φ_0) = ημθ$$

Οι λύσεις της τελευταίας είναι:

$$ωt_1 + φ_0 = 2κπ + θ \quad ή$$

$$ωt_1 + φ_0 = 2κπ + π - θ$$

με $κ \in \mathbb{Z}$.

Για να επιλέξουμε τη σωστή λύση, πρέπει να λάβουμε υπόψη το πρόσημο της ταχύτητας:

$$υ = υ_{max}συν(ωt_1 + φ_0)$$

εκείνη τη στιγμή.

Αν η ταχύτητα είναι θετική, τότε πρέπει:

$$συν(ωt_1 + φ_0) > 0$$

Είναι $φ = π - 2φ_0$ ή $φ = \frac{2π}{3}$rad. Από τη σχέση $φ = ωt_1$ υπολογίζουμε το ζητούμενο χρόνο t_1:

$$t_1 = \frac{φ}{ω} \quad ή \quad t_1 = \frac{\frac{2π}{3}}{4π s^{-1}} \quad ή \quad \mathbf{t_1 = \frac{1}{6}s}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $\frac{ΔP}{Δt}$ υπολογίζεται, αν εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη γενικότερη διατύπωσή του:

$$\frac{ΔP}{Δt} = ΣF \qquad (2)$$

Η συνισταμένη δύναμη ΣF ή δύναμη επαναφοράς είναι $\Sigma F = -Dx$, άρα η σχέση (2) γράφεται:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = -Dx \qquad (3)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 2\,s$ η απομάκρυνση του σώματος είναι:

$$x = 0,2\eta\mu\left(4\pi\cdot 2+\frac{\pi}{6}\right) \quad ή \quad x = 0,1\,m$$

Από τη σχέση (3) με αντικατάσταση των τιμών παίρνουμε:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = -1,6\,kg\frac{m}{s}$$

Αν εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ για μια στοιχειώδη χρονική διάρκεια Δt κατά την οποία το σώμα μετατοπίζεται κατά Δx, έχουμε:

ΘΜΚΕ: $\Delta K = \Delta W_{\Sigma F}$ *ή*

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{\Sigma F}}{\Delta t} \quad ή$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Sigma F \Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F\upsilon \quad ή \quad \frac{\Delta K}{\Delta t} = -Dx\upsilon \qquad (4)$$

Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2\,s$ είναι:

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \quad ή$$

$$\upsilon = 4\pi s^{-1}\cdot 0,2\,m\cdot\sigma\upsilon\nu\left(4\pi\cdot 2+\frac{\pi}{6}\right) \quad ή$$

$$\upsilon = 0,4\sqrt{3}\pi\ m/s$$

Άρα από τη σχέση (4) παίρνουμε:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -0,64\sqrt{3}\pi\,\frac{J}{s}$$

Επειδή όμως είναι:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon$$

η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F\upsilon$$

Ο ρυθμός ΔΚ/Δt είναι θετικός, αν στη χρονική διάρκεια Δt αυξάνεται η κινητική ενέργεια (ΔΚ > 0) ή αλλιώς αν το σώμα πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας.
Ο ρυθμός ΔΚ/Δt είναι αρνητικός, αν το σώμα απομακρύνεται από τη Θ.Ι.

ΘΕΜΑ 2^{O}

α. Όταν το σώμα έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, δηλαδή έχει ταλαντωθεί για χρόνο μιας περιόδου Τ, έχει περάσει από τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) 2 φορές. Συνεπώς:

Διέρχεται από Θ.Ι. 8 φορές σε χρόνο 40s
Διέρχεται από Θ.Ι. 2 φορές σε χρόνο Τ

Άρα $T = \frac{40\,s\cdot 2}{8}$ ή $T = 10\,s$. Η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ή \quad \omega = \frac{2\pi}{10\,s} \quad ή \quad \omega = \frac{\pi}{5}\frac{rad}{s}$$

Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής σε χρόνο μιας περιόδου διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας του.

β. Από τη διατήρηση της ενέργειας στην γ.α.τ., η ολική ενέργεια E_0 είναι ίση κάθε στιγμή με το άθροισμα της δυναμικής U και της κινητικής ενέργειας K, δηλαδή είναι $E_0 = U + K$.

Επειδή είναι $U = K$, παίρνουμε:

$$E_{ολ} = U + U \quad ή \quad E_0 = 2U \quad ή$$

$$\frac{1}{2}DA^2 = 2\cdot\frac{1}{2}Dx^2 \quad ή \quad x = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Δηλαδή η δυναμική ενέργεια γίνεται ίση με την κινητική στις θέσεις με απομακρύνσεις:

$$x_1 = \frac{A\sqrt{2}}{2} \quad και \quad x_2 = -\frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Η απόσταση d ανάμεσα στις δύο αυτές θέσεις είναι:

$$d = x_1 + |x_2| \quad ή \quad d = \frac{A\sqrt{2}}{2} + \frac{A\sqrt{2}}{2} \quad ή \quad d = A\sqrt{2}$$

Οι θέσεις όπου η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την κινητική είναι:

$$x_1 = +\frac{A\sqrt{2}}{2} \quad και \quad x_2 = -\frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Αυτό προκύπτει, αν εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση:

$$E_0 = U + K \quad ή \quad E_0 = 2U$$

Η απόσταση ανάμεσα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με 2A, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Άρα, $2A = 4\,m$ ή $A = 2\,m$. Επομένως η ζητούμενη απόσταση d είναι:

$$d = 2\sqrt{2}\,m$$

γ. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην αρνητική ακραία θέση της ταλάντωσής του, συνεπώς είναι:

$$x_{αρχ} = -A \quad ή \quad Aημφ_0 = -A \quad ή \quad ημφ_0 = -1 \quad ή \quad φ_0 = +3π/2\ rad$$

Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = Aημ(ωt + φ_0) \quad ή \quad x = 2ημ\left(\frac{π}{5}t + \frac{3π}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Η μέγιστη ταχύτητα $υ_{max}$ του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$υ_{max} = ωA \quad ή \quad υ_{max} = 0{,}4π\ m/s$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης είναι:

$$υ = υ_{max}συν(ωt + φ_0) \quad ή \quad υ = 0{,}4πσυν\left(\frac{π}{5}t + \frac{3π}{2}\right) \quad (S.I.)$$

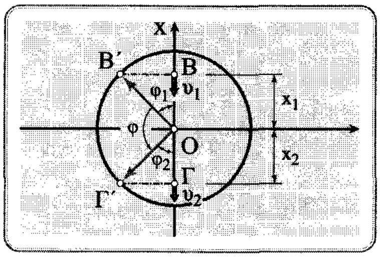
Η μέγιστη επιτάχυνση $α_0$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$α_{max} = ω^2A \quad ή \quad α_{max} = 0{,}8\ m/s^2$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης ταλάντωσης είναι:

$$α = -α_{max}ημ(ωt + φ_0) \quad ή \quad α = -0{,}8ημ\left(\frac{π}{5}t + \frac{3π}{2}\right) \quad (S.I.)$$

δ. Στο ζητούμενο χρόνο t που χρειάζεται το σώμα για να μεταβεί από τη θέση Β $\left(x_1=\sqrt{3}\,m\right)$ στη θέση Γ $\left(x_2=-\sqrt{2}\,m\right)$, το στρεφόμενο διάνυσμα έχει διαγράψει την επίκεντρη γωνία φ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΒΒ΄ και ΟΓΓ΄ έχουμε:



$$\sigma\upsilon\nu\varphi_1=\frac{x_1}{A}\quad ή\quad \sigma\upsilon\nu\varphi_1=\frac{\sqrt{3}\,m}{2\,m}\quad ή\quad \varphi_1=\frac{\pi}{6}\,rad$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_2=\frac{|x_2|}{A}\quad ή\quad \sigma\upsilon\nu\varphi_2=\frac{\sqrt{2}\,m}{2\,m}\quad ή\quad \varphi_2=\frac{\pi}{4}\,rad$$

Άρα:

$$\varphi=\pi-(\varphi_1+\varphi_2)\quad ή\quad \varphi=\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\quad ή\quad \varphi=\frac{7\pi}{12}\,rad$$

Είναι:

$$\varphi=\omega t\quad ή\quad \frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{5}s^{-1}t\quad ή\quad \boxed{t=\frac{35}{12}\,s}$$

ΘΕΜΑ 3ο

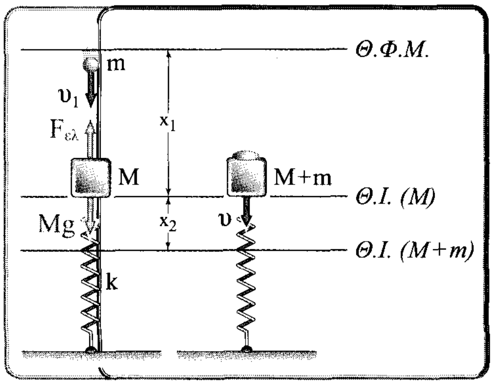
α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση της σταθεράς επαναφοράς:

$$k=(M+m)\omega^2\quad ή\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}}\quad ή\quad \omega=\sqrt{\frac{100\,N/m}{(3+1)\,kg}}\quad ή\quad \omega=5\,rad/s$$

Η μέγιστη ταχύτητα υπολογίζεται απ' τη σχέση $\upsilon_{max}=\omega A$, από την οποία βρίσκουμε το πλάτος Α της ταλάντωσης:

$$A=\frac{\upsilon_{max}}{\omega}\quad ή\quad A=\frac{1\frac{m}{s}}{5\,s^{-1}}\quad ή\quad \boxed{A=0{,}2\,m}$$

β. Στη θέση ισορροπίας της μάζας Μ ισχύει:



$$\Sigma F=0\quad ή\quad F_{\varepsilon\lambda}=Mg\quad ή\quad kx_1=Mg\quad ή$$

$$x_1=\frac{Mg}{k}\qquad (1)\qquad ή\qquad x_1=0{,}3\,m$$

Στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος $(M+m)$ ισχύει:

$$\Sigma F=0\quad ή\quad F'_{\varepsilon\lambda}=(M+m)g\quad ή$$

$$k(x_1+x_2)=(M+m)g$$

ή λόγω της (1):

$$kx_2=mg\quad ή\quad x_2=\frac{mg}{k}\quad ή\quad x_2=\frac{1\,kg\cdot 10\,m/s^2}{100\,N/m}\quad ή\quad \boxed{x_2=0{,}1\,m}$$

Η ταχύτητα υ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται, αν εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση:

$$E_0 = U + K \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2 \quad \text{ή}$$

$$|\upsilon| = \sqrt{\frac{k}{M+m}\left(A^2 - x_2^2\right)} \quad \text{ή} \quad |\upsilon| = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{m/s}$$

Η ταχύτητα υ_1 της μικρής σφαίρας μόλις πριν την κρούση υπολογίζεται, αν εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής κατά την κρούση:

$$\vec{P}_{\Pi P I N} = \vec{P}_{META} \quad \text{ή} \quad m\upsilon_1 = (M+m)\upsilon \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_1 = 2\sqrt{3}\,\text{m/s}$$

Το μέτρο της ταχύτητας υ ενός αρμονικού ταλαντωτή σε μία ορισμένη θέση με απομάκρυνση x υπολογίζεται αν εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση:

$$E_0 = U + K \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

γ. Το συσσωμάτωμα την $t = 0$ έχει απομάκρυνση $x_2 = 0{,}1$ m από τη θέση ισορροπίας του. Η αρχική φάση φ_0 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_2 = A\eta\mu\varphi_0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = \frac{x_2}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}$$

Επειδή η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του συσσωματώματος την $t = 0$ έχει φορά προς τα κάτω, είναι αρνητική $(\upsilon < 0)$, δηλαδή είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi_0 < 0$.

Κατά την κρούση δύο σωμάτων εφαρμόζουμε πάντοτε την αρχή διατήρησης της ορμής, επειδή το σύστημα θεωρείται μονωμένο:

$$\vec{P}_{\Pi P I N} = \vec{P}_{META} \quad \text{ή}$$

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'$$

Επιλέγουμε αυθαίρετα μια φορά ως θετική και προσημαίνουμε κατάλληλα τις ορμές των σωμάτων, οπότε η παραπάνω διανυσματική σχέση μετατρέπεται σε αλγεβρική.

Επομένως η δεκτή λύση της εξίσωσης $\eta\mu\varphi_0 = 1/2$ είναι $\varphi_0 = 5\pi/6$ rad.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή}$$

$$x = 0{,}2\eta\mu\left(5t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

δ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_{E\Lambda AT} = \frac{1}{2}ky^2$$

όπου y η παραμόρφωση του ελατηρίου από τη θέση φυσικού του μήκους (Θ.Φ.Μ.). Θα είναι:

$$U_{E\Lambda AT_{max}} = \frac{1}{2}ky_{max}^2 \quad (2)$$

Η μέγιστη παραμόρφωση y_{max} του ελατηρίου πραγματοποιείται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Δηλαδή είναι:

6

$$y_{max} = x_1 + x_2 + A \quad ή \quad y_{max} = 0{,}6\,m$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$U_{ΕΛΑΤ_{max}} = \frac{1}{2}100\frac{N}{m}\cdot 0{,}36\,m^2 \quad ή \quad \boxed{U_{ΕΛΑΤ_{max}} = 18\,J}$$

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

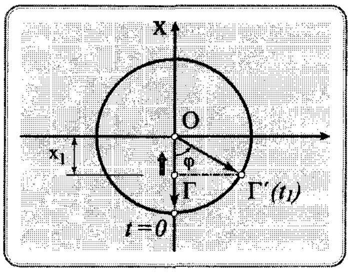
α. ***Α΄ τρόπος***

Το σώμα $Σ_1$ ξεκινά από την αρνητική ακραία θέση της ταλάντωσής του $x_{αρχ} = -A$, επομένως έχει αρχική φάση $φ_0$.

Είναι:

$$x_{αρχ} = Aημφ_0 \quad ή \quad ημφ_0 = \frac{x_{αρχ}}{A} \quad ή \quad ημφ_0 = \frac{-A}{A} \quad ή$$

$$ημφ_0 = -1 \quad ή \quad φ_0 = \frac{3π}{2}\,rad$$



$$συνφ = \frac{|x_1|}{A} \quad ή \quad συνφ = \frac{\frac{A}{2}}{A} \quad ή \quad συνφ = \frac{1}{2} \quad ή$$

$$φ = \frac{π}{3}\,rad$$

Ισχύει:

$$φ = ωt_1 \quad ή \quad \frac{π}{3} = 10t_1 \quad ή \quad \boxed{t_1 = \frac{π}{30}\,s}$$

β. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης, για να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $Σ_1$ μόλις πριν την κρούση.

$$E_0 = U_1 + K_1 \quad ή \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\frac{A^2}{4} + \frac{1}{2}m_1υ_1^2 \quad ή \quad υ_1 = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{3k}{m_1}} \quad ή \quad \boxed{υ_1 = 6\,m/s}$$

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής κατά την κρούση:

$$\vec{P}_{ΠΡΙΝ} = \vec{P}_{ΜΕΤΑ} \quad ή \quad m_1υ_1 - m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ \quad ή \quad υ = 0$$

Δηλαδή το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση δεν έχει ταχύτητα, επομένως βρίσκεται στην αρνητική ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το πλάτος της ταλάντωσής του είναι:

$$A' = \frac{A}{2} \quad ή \quad A' = 0{,}2\sqrt{3}\,m$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x'_{αρχ} = A'$, η ταλάντωσή του θα έχει αρχική φάση $φ'_0$. Είναι:

$$x'_{αρχ} = A'ημφ'_0 \quad ή \quad -A' = A'ημφ'_0 \quad ή$$

$$ημφ'_0 = -1 \quad ή \quad φ'_0 = \frac{3π}{2}\,rad$$

Η γωνιακή συχνότητα ω΄ της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση της σταθεράς επαναφοράς:

Η σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης στο σύστημα ελατήριο – μάζα είναι πάντοτε ίση με τη σταθερά k του ελατηρίου:

$$D = k$$

Η σταθερά επαναφοράς συνδέεται με τη γωνιακή συχνότητα ω με τη σχέση:

7

$$k=(m_1+m_2)\omega'^2 \quad ή \quad \omega' = 5\,rad/s$$

Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος είναι:

$$x = A'ημ(\omega' t + \varphi_0') \quad ή$$

$$x = 0{,}2\sqrt{3}ημ\left(5t+\frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

$k = m\omega^2$
Αν κατά τη διάρκεια ταλάντωσης συμβεί πλαστική κρούση και αλλάξει η μάζα του ταλαντωτή, τότε αλλάζει και η γωνιακή συχνότητα ω και ισχύει:
$k = m_{ολ}\omega'^2$

ΘΕΜΑ 5^{o}

α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ υπολογίζεται από τη σχέση της σταθεράς επαναφοράς:

$$k = m_1\omega_1^2 \quad ή \quad \omega_1=\sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad ή \quad \omega_1=\sqrt{\frac{400\,N/m}{1kg}} \quad ή \quad \omega_1 = 20\,rad/s$$

Η ταχύτητα του $Σ_1$ μόλις πριν την κρούση είναι η μέγιστη γιατί διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

$$\upsilon_{01}=\upsilon_{max}=\omega_1 A \quad ή \quad \upsilon_{01}=20s^{-1}\cdot 0{,}4m \quad ή \quad \upsilon_{01}=8m/s$$

Ο χρόνος t_1 μετάβασης του σώματος $Σ_1$ από τη θέση ισορροπίας στην ακραία θέση της ταλάντωσής του και επιστροφή στη θέση ισορροπίας είναι ίσος με $T_1/2$. Δηλαδή:

$$t_1=\frac{T}{2} \quad ή \quad t_1=\frac{\pi}{\omega} \quad ή \quad t_1=\frac{\pi}{20}s$$

Μέσα στο χρόνο t_1 το σώμα $Σ_2$ έπεσε ελεύθερα από ύψος h. Είναι:

$$h=\frac{1}{2}gt_1^2 \quad ή \quad h=\frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{\pi^2}{400}s^2 \quad ή \quad h=\frac{1}{8}m$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στην οριζόντια διεύθυνση x΄x, στην οποία το σύστημα είναι μονωμένο.

$$\vec{P}_{ΠΡΙΝ_{x'x}}=\vec{P}_{ΜΕΤΑ_{x'x}} \quad ή \quad m_1\upsilon_{01}=(m_1+m_2)\upsilon_{02} \quad ή$$

$$\upsilon_{02}=\frac{m_1\upsilon_{01}}{m_1+m_2} \quad ή \quad \upsilon_{02}=\frac{1kg\cdot 8m/s}{4kg} \quad ή \quad \upsilon_{02}=2m/s$$

Η γωνιακή συχνότητα ω_2 του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση της σταθεράς επαναφοράς.

$$k=(m_1+m_2)\omega_2^2 \quad ή \quad \omega_2=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \quad ή$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{400\,N/m}{4kg}} \quad ή \quad \omega_2=10\,rad/s$$

Επειδή θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του αλλά έχει αρνητική ταχύτητα

Όταν η κρούση δεν είναι μετωπική, δηλαδή τα σώματα δεν κινούνται στην ίδια ευθεία, τότε αναλύουμε τα διανύσματα όλων των ορμών σε ορθογώνιες συνιστώσες και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) σε άξονες x΄x και y΄y.
*Αν όμως δεν επιτρέπεται η κίνηση σε μια ορισμένη διεύθυνση κατά τον ένα άξονα y΄y, εφαρμόζουμε την ΑΔΟ **μόνο** στον άλλο άξονα x΄x.*

8

($\upsilon_{02} < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi_0 < 0$).

Είναι:

$$x_{\alpha\rho\chi} = A_2 \eta\mu\varphi_0 \quad ή \quad 0 = A_2\eta\mu\varphi_0 \quad ή \quad \varphi_0 = \pi\,\text{rad}$$

Το πλάτος A_2 της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση της μέγιστης ταχύτητας:

$$\upsilon'_{max} = \upsilon_{02} = \omega_2 A_2 \quad ή \quad A_2 = \frac{\upsilon_{02}}{\omega_2} \quad ή \quad A_2 = \frac{2\,m/s}{10\,s^{-1}} \quad ή \quad A_2 = 0{,}2\,m$$

Επομένως η εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος είναι:

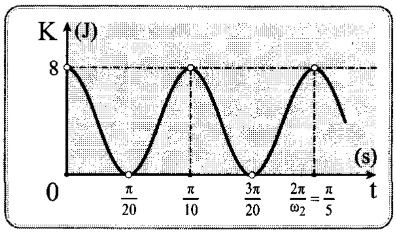
$$x = A_2\eta\mu(\omega_2 t + \varphi_0) \quad ή \quad \mathbf{x = 0{,}2\eta\mu(10t + \pi)} \quad (S.I.)$$

γ. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 \quad ή$$

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_{02}^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega_2 t + \varphi_0) \quad ή$$

$$\mathbf{K = 8\sigma\upsilon\nu^2(10t + \pi)} \quad (S.I.)$$



Η γραφική παράσταση της σχέσης $K = f(t)$ φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα.

δ. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \pi/30\,s$ το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα υ.

$$\upsilon = \upsilon_{02}\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \varphi_0) \quad ή \quad \upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\left(10\frac{\pi}{30} + \pi\right) \quad ή$$

$$\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} \quad ή \quad \upsilon = -1\,m/s$$

Για τον υπολογισμό του έργου της δύναμης του ελατηρίου εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ):

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}} \quad ή \quad 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 = W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}} \quad ή$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}} = -\frac{1}{2}\cdot 4\,kg \cdot 1^2\,\frac{m^2}{s^2} \quad ή \quad \mathbf{W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}} = -2J}$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου $W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}}$ *υπολογίζεται στις πιο πολλές περιπτώσεις με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ). Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του έργου $W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}}$ είναι:*

$$W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} \quad ή$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}} = \frac{1}{2}ky_{\alpha\rho\chi}^2 - \frac{1}{2}ky_{\tau\varepsilon\lambda}^2$$

όπου $y_{\alpha\rho\chi}$, $y_{\tau\varepsilon\lambda}$ η αρχική και τελική παραμόρφωση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος.

<u>ΘΕΜΑ 6^Ο</u>

α. Σε μια ηλεκτρική ταλάντωση ο χρόνος που μεσολαβεί για να μετατραπεί πλήρως η μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι ίσος με T/4, όπου T η περίοδος των ταλαντώσεων. Άρα:

$$\frac{T}{4} = t \quad ή \quad T = 4t \quad ή \quad T = 4\cdot 2\pi\cdot 10^{-3}\,s \quad ή \quad T = 8\pi\cdot 10^{-3}\,s$$

Η γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ή \quad \omega = \frac{2\pi}{8\pi \cdot 10^{-3}\,s} \quad ή \quad \boxed{\omega = 250\,rad/s}$$

β. Η μέγιστη τιμή I της έντασης του ρεύματος είναι:

$$I = \omega Q \quad ή \quad I = 250\,s^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-5}\,C \quad ή \quad \boxed{I = 10^{-2}\,A}$$

γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας στην ηλεκτρική ταλάντωση είναι:

$U_{OB} = U_{OE}$ ή $U_{OB} = 5 \cdot 10^{-6}\,J$ (μέγιστη ενέργεια μαγνητικού πεδίου).

Από τη σχέση $U_{OB} = \frac{1}{2}LI^2$ υπολογίζουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής L του πηνίου:

$$L = \frac{2U_{OB}}{I^2} \quad ή \quad L = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}\,J}{10^{-4}\,A^2} \quad ή \quad \boxed{L = 0{,}1\,H}$$

Από τη σχέση $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ υπολογίζουμε τη χωρητικότητα C του πυκνωτή:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad ή \quad C = \frac{1}{250^2\,s^{-2} \cdot 0{,}1\,H} \quad ή$$

$$\boxed{C = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,F}$$

δ. Η μέγιστη τιμή της τάσης του πυκνωτή V_{OC} είναι:

$$V_{OC} = \frac{Q}{C} \quad ή \quad V_{OC} = \frac{1}{4}V$$

Κάθε στιγμή η τάση στο πηνίο είναι ίση με την τάση στον πυκνωτή, οπότε:

$$V_{OL} = V_{OC} \quad ή \quad \boxed{V_{OL} = \frac{1}{4}V}$$

ε. Επειδή την $t = 0$ το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο, οι εξισώσεις είναι:

- Φορτίο πυκνωτή:

$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ ή $\boxed{q = 4 \cdot 10^{-5}\sigma\upsilon\nu 250t}$ (S.I.)

- Ένταση ρεύματος:

$i = -I\eta\mu\omega t$ ή $\boxed{i = -10^{-2}\eta\mu 250t}$ (S.I.)

Σ' ένα ιδανικό κύκλωμα L – C στο οποίο εκτελείται ηλεκτρική ταλάντωση:

- *Αν την t = 0 το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο (q = Q), οπότε η ένταση του ρεύματος είναι μηδέν (i = 0), τότε οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου q του πυκνωτή και της έντασης i του ρεύματος είναι της μορφής:*

$$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t \quad και \quad i = -I\eta\mu\omega t$$

- *Αν την t = 0 το φορτίο του πυκνωτή είναι ίσο με μηδέν (q = 0), οπότε η ένταση του ρεύματος είναι μέγιστη (i = I), τότε οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου q του πυκνωτή και της έντασης i του ρεύματος είναι της μορφής:*

$$q = Q\eta\mu\omega t \quad και \quad i = I\sigma\upsilon\nu\omega t$$

*ΘΕΜΑ 7^Ο^*

α. Όταν ο μεταγωγός μ είναι συνδεδεμένος στη θέση (1) και ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος, το κύκλωμα ΑΒΓΔ διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1. Από το νόμο του Ohm έχουμε:

$$I_1 = \frac{E}{R_{ολ}} \quad ή \quad I_1 = \frac{E}{R + r} \quad ή \quad I_1 = \frac{120\,V}{(8+4)\Omega} \quad ή \quad I_1 = 10\,A$$

Η τάση του πυκνωτή V_{OC} είναι ίση με την τάση μεταξύ των σημείων Β και Γ στα άκρα του αντιστάτη R. Συνεπώς είναι:

$$V_{OC} = V_{B\Gamma} \quad ή \quad V_{OC} = I_1 R \quad ή \quad V_{OC} = 10\,A \cdot 8\,\Omega \quad ή \quad V_{OC} = 80\,V$$

Το φορτίο του πυκνωτή είναι ίσο με:

$$Q = CV_{OC} \quad ή \quad Q = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 80\,V \quad ή \quad Q = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\,C$$

Όταν ο μεταγωγός μ συνδεθεί στη θέση (2) στο κύκλωμα $L - C$ $(t = 0)$, αρχίζουν ηλεκτρικές ταλαντώσεις και το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο και ίσο με:

$$Q = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\,C$$

Η γωνιακή συχνότητα ω των ταλαντώσεων είναι:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ή \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}\,H \cdot 4 \cdot 10^{-6}\,F}} \quad ή \quad \omega = 5 \cdot 10^3 \frac{rad}{s}$$

Η μέγιστη ένταση I του ρεύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I = \omega Q \quad ή \quad I = 5 \cdot 10^3\,s^{-1} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-4}\,C \quad ή \quad I = 1{,}6\,A$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος $\Delta i/\Delta t$ υπολογίζεται ως εξής:

Κάθε στιγμή είναι:

$$V_{\Pi HN} = V_C \quad ή \quad E_{αυτ} = \frac{q}{C} \quad ή \quad -L\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{q}{C} \quad ή \quad \frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{q}{LC} \qquad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το φορτίο q του πυκνωτή είναι μέγιστο και ίσο με Q. Άρα από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\left(\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)_0 = -\frac{Q}{LC} \quad ή \quad \left(\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)_0 = -8 \cdot 10^3\,A/s$$

γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ηλεκτρικής ταλάντωσης έχουμε:

$$E_0 = U_E + U_B$$

Επειδή η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου U_E είναι ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου U_B, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$E_0 = 2U_E \quad ή \quad \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad ή \quad q = \pm\frac{Q\sqrt{2}}{2}$$

Είναι $U_E = U_B$ για πρώτη φορά, όταν:

$$q = +\frac{Q\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

Επίσης, όταν είναι $U_E = U_B$, έχουμε:

$$E_0 = 2U_B \quad ή \quad \frac{1}{2}LI^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}Li^2 \quad ή \quad i = \pm\frac{I\sqrt{2}}{2}$$

Για πρώτη φορά είναι $U_E = U_B$, όταν:

$$i = -\frac{I\sqrt{2}}{2} \qquad (3)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας που παρέχει ο πυκνωτής υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta t} = P_C \quad ή \quad \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = V_C i \quad ή$$

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta t} = \frac{q}{C}i \qquad (1)$$

Αν είναι $q = Q συνωt$ και $i = -Iημωt$ η σχέση (1) γράφεται:

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta t} = \frac{Q συνωt}{C}(-Iημωt) \quad ή$$

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta t} = -\frac{QI}{2C}ημ2ωt$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του πυκνωτή $\frac{\Delta U_E}{\Delta t}$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ισχύς P_C που παρέχει ο πυκνωτής στο κύκλωμα. Δηλαδή είναι:

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta t} = P_C \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = V_C i \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = \frac{q}{C} i$$

ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta t} = \frac{Q\frac{\sqrt{2}}{2}}{C}\left(-I\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = -64\,\frac{J}{s}$$

Ο ρυθμός $\frac{\Delta U_E}{\Delta t}$ είναι μέγιστος, όταν ημ2ωt = ±1. Δηλαδή:

$$\left|\frac{\Delta U_E}{\Delta t}\right|_{max} = \frac{QI}{2C}$$

Ο ρυθμός $\frac{\Delta U_E}{\Delta t}$ είναι αρνητικός όταν ο πυκνωτής παρέχει ενέργεια, οπότε εκφορτίζεται και αρνητικός, όταν ο πυκνωτής απορροφά ενέργεια, οπότε φορτίζεται.

δ. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$U_E = \frac{1}{2C}q^2 \qquad (4)$$

Η σχέση της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου U_B με το φορτίο q του πυκνωτή προκύπτει, αν εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας στην ηλεκτρική ταλάντωση. Δηλαδή:

$$E_0 = U_E + U_B \quad \text{ή} \quad U_B = E_0 - U_E$$

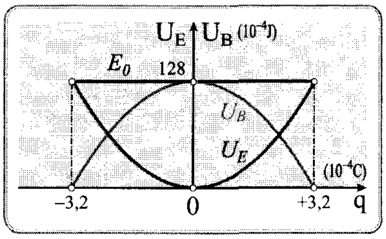
ή λόγω της (4):

$$U_B = E_0 - \frac{1}{2C}q^2 \qquad (5)$$

Η ολική ενέργεια E_0 της ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{ή} \quad E_0 = 128 \cdot 10^{-4}\,J$$

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (4) και (5) φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα.



ΘΕΜΑ 8^Ο^

Α. α. Ο μεταγωγός μ στη θέση (1). Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης στο ιδανικό κύκλωμα $L_1 - C$ υπολογίζεται ως εξής: Είναι:

$$E_{αυτ} = V_C \quad \text{ή} \quad -L\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{q}{C} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{q}{LC} \qquad (1)$$

Επειδή την $t = 0$ ο ρυθμός μεταβολής της έντασης είναι μηδέν, από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι το φορτίο q του πυκνωτή είναι ίσο με μηδέν. Συνεπώς η ένταση $i = 10\,mA$ του ρεύματος είναι η μέγιστη ένταση I_1 του ρεύματος στο κύκλωμα $L_1 - C$. Δηλαδή:

$$I_1 = 10\,mA \quad \text{ή} \quad I_1 = 10^{-2}\,A$$

Η γωνιακή συχνότητα $ω_1$ των ηλεκτρικών ταλαντώσεων είναι:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 10^{-2}\,H \cdot 2\cdot 10^{-6}\,F}} = \frac{1}{2\cdot 10^{-4}\,s} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 5\cdot 10^{3}\,rad/s$$

Το μέγιστο φορτίο Q_1 του πυκνωτή είναι:

$$Q_1 = \frac{I_1}{\omega_1} \quad \text{ή} \quad Q_1 = \frac{10^{-2}\,A}{5\cdot 10^3\,s^{-1}} \quad \text{ή} \quad Q_1 = 2\cdot 10^{-6}\,C$$

Οι χρονικές εξισώσεις της έντασης του ρεύματος και του φορτίου του πυκνωτή είναι

$$i_1 = I_1 συνω_1 t \quad \text{ή} \quad i_1 = 10^{-2} συν(5\cdot 10^3 t) \quad (S.I.)$$

και

$$q_1 = Q_1 ημω_1 t \quad \text{ή} \quad q_1 = 2\cdot 10^{-6} ημ(5\cdot 10^3 t) \quad (S.I.)$$

β. Η ένταση του ρεύματος τη στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{6}\cdot 10^{-3}\,s$ είναι:

$$i_1 = 10^{-2} συν\left(5\cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{6}\cdot 10^{-3}\right) \quad \text{ή} \quad i_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-2}\,A$$

Το φορτίο του πυκνωτή τη στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{6}\cdot 10^{-3}\,s$ είναι:

$$q_1 = 2\cdot 10^{-6} ημ\left(5\cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{6}\cdot 10^{-3}\right) \quad \text{ή} \quad q_1 = 10^{-6}\,C$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας $\Delta U_E/\Delta t$ του πυκνωτή είναι η ισχύς P_C που παρέχει ο πυκνωτής στο κύκλωμα.

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta t} = P_C \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = V_C i \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = \frac{q}{C} i \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = \frac{10^{-6}\,C}{2\cdot 10^{-6}\,F}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-2}\,A\right) \quad \text{ή}$$

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta t} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 10^{-2}\,\frac{J}{s}$$

(Ο ρυθμός μεταβολής $\Delta U_E / \Delta t$ είναι αρνητικός γιατί ο πυκνωτής παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα τη στιγμή $t = \frac{\pi}{6}\cdot 10^{-3}$ s.)

Στο ιδανικό κύκλωμα $L - C$ η ενέργεια που παρέχει ο πυκνωτής ανά μονάδα χρόνου είναι ίση με την ενέργεια που απορροφά το πηνίο στο μαγνητικό του πεδίο ανά μονάδα χρόνου. Δηλαδή είναι:

$$\frac{\Delta U_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta U_E}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta U_B}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 10^{-2}\,\frac{J}{s}$$

Β. Τη στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{6}\cdot 10^{-3}\,s$ που ο μεταγωγός μ μεταφέρεται στη θέση (2) ο πυκνωτής έχει φορτίο $q_1 = 10^{-6}$C. Αυτό είναι το αρχικό φορτίο, δηλαδή το μέγιστο φορτίο Q_0, της φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης στο κύκλωμα $L_2 - R - C$, $Q_0 = 10^{-6}$C. Επομένως η αρχική ενέργεια στο κύκλωμα είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} \quad \text{ή} \quad E_0 = \frac{1}{4}\cdot 10^{-6}\,J$$

Η τελική ενέργεια στο κύκλωμα είναι:

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{16} 10^{-6}\,J$$

*Η **θερμότητα Q_θ** που αναπτύσσεται σε χρόνο t στην αντίσταση R ενός κυκλώματος R – L – C που εκτελείται **φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση**, υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε από την αρχική την τελική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης. Δηλαδή:*

$$Q_\theta = E_{αρχ} - E_{τελ}$$

13

Η θερμότητα Q_θ που αναπτύχθηκε στην αντίσταση R είναι ίση με την απώλεια ενέργειας στο κύκλωμα. Δηλαδή:

$$Q_\theta = E_0 - E \quad ή \quad \mathbf{Q_\theta = \frac{3}{16}\cdot 10^{-6}\ J}$$

ΘΕΜΑ 9^Ο^

α. Κάθε στιγμή η απομάκρυνση x της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων $x_1 + x_2$ των συνιστωσών ταλαντώσεων. Δηλαδή είναι:

$$x = x_1 + x_2 \quad ή \quad x = Aημωt + Aημ\left(ωt + \frac{π}{3}\right) \quad ή$$

$$\sqrt{3} = Aημ\left(\frac{2π}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) + Aημ\left(\frac{2π}{T}\cdot\frac{T}{4} + \frac{π}{3}\right) \quad ή \quad A = \frac{2\sqrt{3}}{3}m$$

Το πλάτος A΄ της συνισταμένης ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AAσυν\frac{π}{3}} \quad ή \quad A' = A\sqrt{3} \quad ή \quad \mathbf{A' = 2\,m}$$

β. Η μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς της συνισταμένης ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$ΣF_{max} = DA' \quad ή \quad ΣF_{max} = mω^2A' \quad ή \quad ω = \sqrt{\frac{ΣF_{max}}{mA'}} \quad ή \quad \mathbf{ω = 10\,rad/s}$$

γ. Η συνισταμένη ταλάντωση προηγείται στη φάση κατά γωνία θ της ταλάντωσης $x_1 = Aημωt$, που έχει τη μικρότερη φάση από τις συνιστώσες ταλαντώσεις. Η γωνία θ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$εφθ = \frac{Aημ\frac{π}{3}}{A + Aσυν\frac{π}{3}} \quad ή \quad εφθ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ή \quad θ = \frac{π}{6}\,rad$$

Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$x = A'ημ(ωt + θ) \quad ή \quad \mathbf{x = 2ημ\left(10t + \frac{π}{6}\right)} \quad (S.I.)$$

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι:

$$υ = ωA'συν(ωt + θ) \quad ή \quad \mathbf{υ = 20συν\left(10t + \frac{π}{6}\right)} \quad (S.I.)$$

Κατά τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας η γωνία θ που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$εφθ = \frac{A_2ημφ}{A_1 + A_2συνφ}$$

αποτελεί τη διαφορά φάσης μεταξύ της φάσης της συνισταμένης ταλάντωσης και της μικρότερης φάσης των συνιστωσών ταλαντώσεων. Στη σχέση:

$$εφθ = \frac{A_2ημφ}{A_1 + A_2συνφ}$$

το πλάτος A_2 είναι το πλάτος της συνιστώσας ταλάντωσης με τη μεγαλύτερη φάση.

δ. Όταν οι απομακρύνσεις x_1, x_2 των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι αντίθετες, η απομάκρυνση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν:

$$x = x_1 + x_2 \quad ή \quad x = 0$$

Δηλαδή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και συνεπώς έχει μέγιστη ταχύτητα:

$$|υ| = ωA' \quad ή \quad |υ| = 10\,s^{-1} \cdot 2\,m \quad ή \quad |υ| = 20\,m/s$$

ΘΕΜΑ 10^Ο

α. Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν το ίδιο πλάτος $A = 10\,cm$ ή $A = 10^{-1}\,m$. Ακόμη είναι:

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2}s \quad ή \quad T = 2s$$

Η γωνιακή συχνότητα ω των ταλαντώσεων είναι:

$$ω = \frac{2π}{T} \quad ή \quad ω = \frac{2π}{2s} \quad ή \quad ω = π\,rad/s$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης Α είναι:

$$x_1 = Aημωt \quad ή \quad x_1 = 10^{-1}ημπt \quad (S.I.)$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{6}s$ η απομάκρυνση x_2 της ταλάντωσης Β γίνεται μέγιστη, δηλαδή είναι:

$$x_2 = A \quad ή \quad Aημ(πt_1 + φ_0) = A \quad ή \quad ημ\left(π\frac{1}{6} + φ_0\right) = 1$$

ή για πρώτη φορά:

$$\frac{π}{6} + φ_0 = \frac{π}{2} \quad ή \quad φ_0 = \frac{π}{3}rad$$

Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης Β είναι:

$$x_2 = Aημ(ωt + φ_0) \quad ή$$

$$x_2 = 10^{-1}ημ\left(πt + \frac{π}{3}\right) \quad (S.I.)$$

β. Το πλάτος Α΄ της συνισταμένης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AAσυν\frac{π}{3}} \quad ή \quad A' = \frac{\sqrt{3}}{10}\,m$$

Η σταθερά επαναφοράς D της συνισταμένης ταλάντωσης είναι $D = mω^2$ ή $D = 0{,}5\,kg \cdot π^2 s^{-2}$ ή $D = 5\,N/m$. Η ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης δίνεται απ' τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA'^2 \quad ή \quad E = 75 \cdot 10^{-3}\,J$$

Κατά τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας στις σχέσεις:

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}$$

$$και \quad εφθ = \frac{A_2ημφ}{A_1 + A_2συνφ}$$

Η γωνία φ είναι η διαφορά των φάσεων των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων. Δηλαδή αν είναι:

$$x_1 = A_1ημ(ωt + φ_{01}) \quad και$$
$$x_2 = A_2ημ(ωt + φ_{02})$$

τότε:

$$φ = ωt + φ_{02} - ωt - φ_{01} \quad ή$$
$$φ = φ_{02} - φ_{01}$$

15

γ. Η διαφορά φάσης θ μεταξύ της συνισταμένης ταλάντωσης και της ταλάντωσης Α, η οποία έχει τη μικρότερη φάση από τις δύο συνιστώσες ταλαντώσεις υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A\eta\mu\varphi}{A + A\sigma\upsilon\nu\varphi} \xrightarrow{\varphi=\pi/3} \varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\frac{\pi}{3}}{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} \quad \acute{\eta} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \acute{\eta} \quad \theta = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$x = A'\eta\mu(\omega t + \theta) \quad \acute{\eta} \quad \mathbf{x = \frac{\sqrt{3}}{10}\eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)} \quad \text{(S.I.)}$$

ΘΕΜΑ 11^{O}

α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης για την απομάκρυνση της συνισταμένης κίνησης $x = 0{,}2\sigma\upsilon\nu\pi t \cdot \eta\mu 101\pi t$ με την εξίσωση της θεωρίας:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cdot \eta\mu\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}$$

συμπεραίνουμε ότι $2A = 0{,}2\,\text{m}$ ή $A = 0{,}1\,\text{m}$ και:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \pi \quad \acute{\eta} \quad \omega_1 - \omega_2 = 2\pi \qquad (1)$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 101\pi \quad \acute{\eta} \quad \omega_1 + \omega_2 = 202\pi \qquad (2)$$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$$\omega_1 = 102\pi\,\text{rad/s} \quad \text{και} \quad \omega_2 = 100\pi\,\text{rad/s}$$

Άρα οι εξισώσεις των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι:

$$\mathbf{x_1 = 0{,}1\eta\mu 102\pi t} \quad \text{(S.I.)} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{x_2 = 0{,}1\eta\mu 100\pi t} \quad \text{(S.I.)}$$

β. Η περίοδος T_δ του διακροτήματος είναι:

$$T_\delta = \frac{1}{f_\delta} \quad \acute{\eta} \quad T_\delta = \frac{1}{f_1 - f_2} \quad \acute{\eta}$$

Σε χρόνο ίσο με την περίοδο T_δ του διακροτήματος:

$$\left(T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}\right)$$

*το πλάτος της συνισταμένης κίνησης μηδενίζεται **μία** (1) φορά. Συνεπώς ο αριθμός N_1 μηδενισμών του πλάτους μέσα σε χρόνο t είναι:*

16

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \quad \acute{\eta} \quad T_\delta = 1\,s$$

Σε χρόνο $T_\delta = 1s$ το πλάτος μηδενίζεται 1 φορά
Σε χρόνο $t = 10s$ το πλάτος μηδενίζεται $N_1 = ;$

$$N_1 = \frac{t}{T_\delta} \quad \acute{\eta} \quad \mathbf{N_1 = 10\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$$

γ. Η περίοδος T της συνισταμένης κίνησης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \acute{\eta} \quad T = \frac{2\pi}{101\pi s^{-1}} \quad \acute{\eta} \quad T = \frac{2}{101}s$$

Σε $T = \frac{2}{101}s$ η απομάκρυνση μηδενίζεται 2 φορές
Σε $T_\delta = 1s$ η απομάκρυνση μηδενίζεται $N_2 = ;$

$$N_2 = 2\frac{T_\delta}{T} \quad \acute{\eta} \quad N_2 = 2\frac{1s}{\frac{2}{101}s} \quad \acute{\eta}$$

$$\mathbf{N_2 = 101\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$$

$$N_1 = \frac{t}{T_\delta}$$

Σε χρόνο ίσο με την περίοδο T της ταλάντωσης:

$$\left(T = \frac{2}{f_1 + f_2}\right)$$

*η απομάκρυνση x της κίνησης μηδενίζεται **δύο** (2) φορές. Συνεπώς ο αριθμός N_2 των μηδενισμών της απομάκρυνσης x μέσα σε χρόνο t είναι:*

$$N_2 = \frac{2t}{T}$$

ΘΕΜΑ 12^{O}

α. Από το διάγραμμα $y = f(t)$ συμπεραίνουμε ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = (4 - 2)\,s \quad \acute{\eta} \quad T = 2\,s$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι το πλάτος είναι $A = 0,2$ m και ότι το σημείο K ($x_1 = 1$ m) αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$\upsilon = \frac{x_1}{t_1} \quad \acute{\eta} \quad \upsilon = \frac{1\,m}{2\,s} \quad \acute{\eta} \quad \upsilon = 0,5\,m/s$$

Το μήκος κύματος λ υπολογίζεται από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής:

$$\lambda = \upsilon T \quad \acute{\eta} \quad \lambda = 0,5\,m/s \cdot 2\,s \quad \acute{\eta} \quad \lambda = 1\,m$$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Με αντικατάσταση των τιμών παίρνουμε:

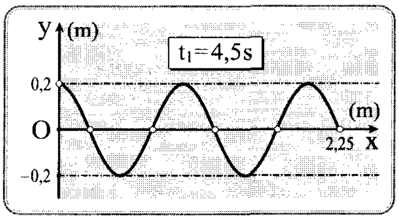
$$\mathbf{y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - x\right)} \quad (S.I.)$$

β. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4{,}5\ s$ το κύμα έχει φτάσει στο σημείο Σ για το οποίο είναι:

$$\varphi_\Sigma = 0 \quad ή \quad \frac{t_1}{2} - x_\Sigma = 0 \quad ή \quad x_\Sigma = 2{,}25\ m$$

Το μήκος $\frac{\lambda}{4} = 0{,}25\,m$ χωράει:

$$N = \frac{x_\Sigma}{\frac{\lambda}{4}} = \frac{2{,}25}{0{,}25} = 9 \text{ φορές στο μήκος } x_\Sigma$$



γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Κ έχουμε:

$$U = E_{ολ} - K \quad ή$$

$$U = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2 \quad ή \quad U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2 \qquad (1)$$

Είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ή \quad \omega = \frac{2\pi}{2s} \quad ή \quad \omega = \pi\ rad/s$$

Με αντικατάσταση των τιμών στη σχέση (1), παίρνουμε:

$$\boxed{U = 36 \cdot 10^{-4}\ J}$$

Για το σχεδιασμό του στιγμιότυπου $y = f(x)$ ενός αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1 κάνουμε τις εξής εργασίες:

α. *Βρίσκουμε τη μέγιστη απόσταση x_{max} από την αρχή Ο ($x = 0$) επιλύοντας την εξίσωση $\varphi = 0$, όπου φ η φάση του σημείου που αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1.*

β. *Βρίσκουμε πόσες φορές "χωράει" το $\lambda/4$ στο x_{max}:*

$$N = \frac{x_{max}}{\lambda/4}$$

και χωρίζουμε την απόσταση x_{max} σε Ν ίσα τμήματα.

γ. *Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο, ξεκινώντας από το μέτωπο κύματος x_{max} κινούμενοι προς τα πίσω, δηλαδή προς το σημείο Ο ($x = 0$). Σε καθένα από τα Ν τμήματα σχεδιάζουμε το ένα τέταρτο ($\lambda/4$) ενός πλήρους μήκους κύματος λ.*

ΘΕΜΑ 13^O

α. Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής Ο των κυμάτων είναι:

$$y = A\etaμ\omega t \quad ή \quad y = 2 \cdot 10^{-2}\,\etaμ\frac{\pi t}{3} \quad (S.I.)$$

Είναι $y = \sqrt{3} \cdot 10^{-2}\ m$ για δεύτερη φορά τη χρονική στιγμή t:

$$\sqrt{3} \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2}\,\etaμ\frac{\pi t}{3} \quad ή \quad \etaμ\frac{\pi t}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ή \quad \frac{\pi t}{3} = \frac{2\pi}{3}\ (2η\ λύση) \quad ή \quad t = 2s$$

Μέσα στο χρόνο $t = 2\ s$ το κύμα διαδόθηκε προς τα θετικά κατά $x = 0{,}2\ m$. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$\upsilon = \frac{x}{t} \quad ή \quad \upsilon = \frac{0{,}2\,m}{2\,s} \quad ή \quad \boxed{\upsilon = 0{,}1 m/s}$$

β. Η περίοδος είναι $T = 2\pi/\omega$ ή $T = 6\,s$ και το μήκος κύματος είναι:

$$\lambda = \upsilon T \quad ή \quad \lambda = 0{,}1\,m/s \cdot 6\,s \quad ή \quad \lambda = 0{,}6\,m$$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad ή \quad \mathbf{y = 2\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{6} - \frac{x}{0{,}6}\right)} \quad (S.I.)$$

γ. Το σημείο Μ που βρίσκεται στη θέση $x_1 = 0{,}75\,m$ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1. Τη στιγμή t_1 το σημείο Μ έχει φάση:

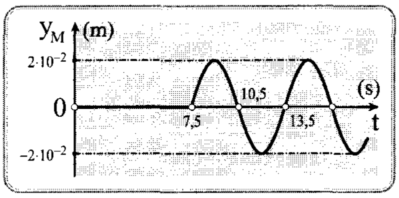
$$\varphi_M = 0 \quad ή \quad 2\pi\left(\frac{t_1}{6} - \frac{0{,}75}{0{,}6}\right) = 0 \quad ή \quad t_1 = 7{,}5\,s$$

Η απομάκρυνση του σημείου σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση:

$$y_M = 2\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{6} - \frac{0{,}75}{0{,}6}\right) \quad ή$$

$$y_M = 2\cdot 10^{-2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{3} - 2{,}5\pi\right) \quad (S.I.) \quad (για\ t \geq 7{,}5\,s)$$

Η γραφική παράσταση της $y_M = f(t)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



*Οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης $y = f(t)$ και της ταχύτητας ταλάντωσης $\upsilon_\tau = f(t)$ ενός σημείου του μέσου αρχίζουν τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το κύμα φτάνει στο θεωρούμενο σημείο. Φυσικά αυτό **δεν** ισχύει, αν υπάρχει αρχική φάση φ_0 στην εξίσωση του κύματος ($\varphi_0 \neq 0$) και τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $y_{αρχ} \neq 0$ και $\upsilon_{αρχ} \neq +\upsilon_0$.*

Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση:

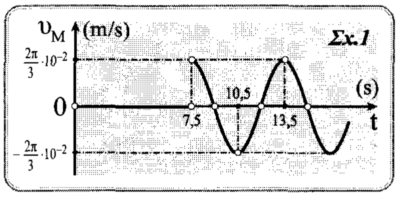
$$\upsilon_M = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad ή$$

$$\upsilon_M = \frac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{6} - \frac{0{,}75}{0{,}6}\right) \quad ή$$

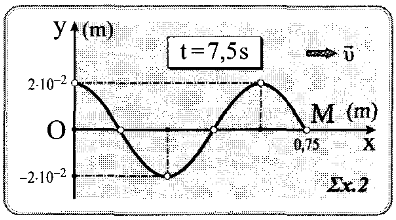
$$\upsilon_M = \frac{2\pi}{3}\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{3} - 2{,}5\pi\right) \quad (S.I.)$$

$$(για\ t \geq 7{,}5\,s)$$

Η γραφική παράσταση της $\upsilon_M = f(t)$ φαίνεται στο σχήμα 1.



δ. Το στιγμιότυπο του κύματος $y = f(x)$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 7{,}5\,s$ που φτάνει το κύμα στο σημείο Μ φαίνεται στο σχήμα 2.



ΘΕΜΑ 14^{Ο}

α. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Ο $(x = 0)$ έχει απομάκρυνση $y_{αρχ} = 0$ κα θετική ταχύτητα $υ_{αρχ} > 0$ συμπεραίνουμε ότι η αρχική φάση $φ_0$ είναι ίση με μηδέν. Απ το στιγμιότυπο του κύματος διαπιστώνουμε ότι είναι:

$$7 \cdot \frac{λ}{4} = 3,5\,\text{m} \quad ή \quad λ = 2\,\text{m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$υ = \frac{x_{max}}{t_1} \quad ή \quad υ = \frac{3,5\,\text{m}}{1,4\,\text{s}} \quad ή \quad υ = 2,5\,\text{m/s}$$

Η περίοδος ταλάντωσης των σημείων του μέσου είναι:

$$T = \frac{λ}{υ} \quad ή \quad T = \frac{2\,\text{m}}{2,5\,\text{m/s}} \quad ή \quad T = 0,8\,\text{s}$$

Επομένως η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) \quad ή \quad \mathbf{y = 0,4ημ2π\left(\frac{t}{0,8} - \frac{x}{2}\right)} \quad \text{(S.I.)}$$

β. Το σημείο Κ όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο που δίνεται βρίσκεται στη θέση:

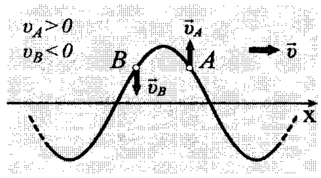
$$x_K = 3 \cdot \frac{λ}{4} \quad ή \quad x_K = 1,5\,\text{m}$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t είναι:

$$υ_τ = ωAσυν2π\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{λ}\right) \quad ή \quad \mathbf{υ_τ = +π\,m/s}$$

Επειδή είναι $υ_τ > 0$, συμπεραίνουμε ότι το σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 κινείται προς τα "πάνω".

Κάθε σημείο του ελαστικού μέσου οποιαδήποτε στιγμή τείνει να κινηθεί προς την απομάκρυνση y των σημείων που βρίσκονται μόλις πριν τη θέση του. Για παράδειγμα:



γ. Το πιο μακρινό σημείο Μ που μπαίνει σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t_2 = 2$ s έχει τη στιγμή αυτή φάση:

$$φ_M = 0 \quad ή \quad 2π\left(\frac{2}{0,8} - \frac{x_M}{2}\right) = 0 \quad ή \quad x_M = 5\,\text{m}$$

Η διαφορά φάσης Δφ μεταξύ των σημείων Κ και Μ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Δφ = φ_K - φ_M \quad ή \quad Δφ = \frac{2π(x_M - x_K)}{λ} \quad ή$$

$$\mathbf{Δφ = 3,5π\,rad}$$

Δύο σημεία Κ $(x = x_K)$ και Λ $(x = x_Λ)$ έχουν μια χρονική στιγμή t διαφορά φάσης Δφ, η οποία είναι:

$$Δφ = φ_K - φ_Λ \quad ή$$

$$Δφ = 2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{λ}\right) - 2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x_Λ}{λ}\right) \quad ή$$

$$Δφ = \frac{2π(x_Λ - x_K)}{λ} \quad ή$$

$$\mathbf{Δφ = \frac{2πd}{λ}}$$

όπου $d = x_Λ - x_K$ η απόσταση των σημείων Κ και Λ.

δ. Η επιτάχυνση της ταλάντωσης του σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$α_K = -ω^2 y_K \quad ή \quad α_K = -\left(\frac{2π}{T}\right)^2 Aημ2π\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_K}{λ}\right) \quad ή$$

$$\mathbf{α_K = -25\,m/s^2}$$

ΘΕΜΑ 15^{o}

α. Από τη δοθείσα εξίσωση ταλάντωσης των δύο πηγών συμπεραίνουμε ότι είναι:

- Το πλάτος $A = 0{,}04\,\text{m}$ και η γωνιακή συχνότητα $\omega = 8\pi\,\text{rad/s}$.
- Η περίοδος Τ είναι $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ή $T = \dfrac{1}{4}\text{s}$.
- Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} \qquad (1)$$

Το σημείο Σ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}5\,\text{s}$ κατά την οποία φτάνει το κύμα από την πλησιέστερη πηγή Π_1. Συνεπώς είναι $r_1 = \upsilon t_1$ ή λόγω της (1):

$$r_1 = \frac{\lambda}{T}t_1 \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{r_1 T}{t_1} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0{,}4\,\text{m}$$

Για να συμβαίνει ενισχυτική συμβολή στο σημείο Σ πρέπει να ισχύει:

$$r_2 - r_1 = N\lambda \quad \text{όπου } N \in \mathbb{Z}$$

Είναι $1{,}6\,\text{m} - 0{,}8\,\text{m} = N \cdot 0{,}4\,\text{m}$ ή $N = 2$, δηλαδή ισχύει η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής.

> **!**
>
> *Ένα σημείο του επιφανειακού μέσου αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή t_1 που φτάνει το κύμα από την πλησιέστερη από τις δύο σύγχρονες πηγές. Η συμβολή αρχίζει, όταν φτάσει τη στιγμή t_2 στο θεωρούμενο σημείο και το κύμα απ’ την πιο μακρινή πηγή.*

β. Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Σ μετά τη συμβολή των κυμάτων είναι:

$$y_\Sigma = 2A\,\text{συν}\frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\,\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \quad \text{ή}$$

$$y_\Sigma = 0{,}08\,\text{ημ}(8\pi t - 6\pi) \quad (\text{S.I.}) \quad (\text{για } t \geq 1\,\text{s})$$

γ. Το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης υ_τ του σημείου Σ υπολογίζεται αν εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης:

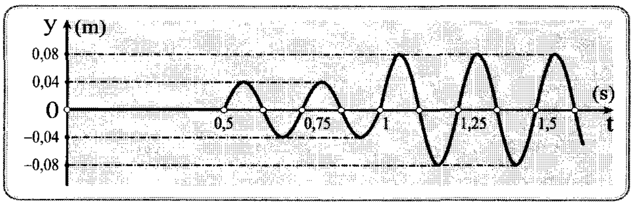
$$E_{ολ} = U + K \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}Dy_\Sigma^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2 \quad \text{ή} \quad m\omega^2 A'^2 = m\omega^2 y_\Sigma^2 + m\upsilon_\tau^2 \quad \text{ή}$$

$$|\upsilon_\tau| = \omega\sqrt{A'^2 - y_\Sigma^2} \quad \text{ή} \quad |\upsilon_\tau| = 0{,}32\pi\,\text{m/s}$$

δ. Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}5\,\text{m}$ το σημείο Σ παραμένει ακίνητο. Τη χρονική στιγμή t_1 ξεκινά να ταλαντώνεται με πλάτος $A = 0{,}04\,\text{m}$, εξαιτίας του κύματος της πηγής Π_1. Η συμβολή των κυμάτων αρχίζει τη στιγμή t_2 που φτάνει και το κύμα από την πηγή Π_2. Είναι:

$$t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{r_2}{\lambda}T \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{1{,}6\,\text{m}}{0{,}4\,\text{m}}\cdot\frac{1}{4}\text{s} \quad \text{ή} \quad t_2 = 1\,\text{s}$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



21

ΘΕΜΑ 16^{ο}

α. Επειδή στο σημείο Μ παρατηρείται ακυρωτική συμβολή ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

Η διαφορά $r_1 - r_2$ είναι ελάχιστη, όταν $N = 0$. Δηλαδή:

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} \quad ή \quad 0{,}1\,m = \frac{\lambda}{2} \quad ή \quad \lambda = 0{,}2\,m$$

Το πλάτος Α΄ της ταλάντωσης σ' ένα σημείο Κ, λόγω της συμβολής των κυμάτων, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A' = 2A\left|συν\frac{\pi}{\lambda}(d_1 - d_2)\right| \quad ή \quad A' = 2\cdot 0{,}2\,m\,συν\left[\frac{\pi}{0{,}2\,m}(1-0{,}75)\,m\right] \quad ή \quad A' = 0{,}2\sqrt{2}\,m$$

β. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ λόγω της συμβολής των κυμάτων είναι:

$$y_K = A'ημ2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right) \quad ή \quad y_K = 0{,}2\sqrt{2}ημ(20\pi t - 8{,}75\pi) \quad (S.I.) \quad (για\ t \geq 0{,}5\,s)$$

γ. Σε ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $(\Pi_1\Pi_2) = d$ που ορίζουν οι δύο πηγές ακυρωτική συμβολή συμβαίνει όταν είναι:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Είναι όμως:

$$r_1 + r_2 = d \qquad (2)$$

Από (1) + (2) προκύπτει:

$$2r_1 = d + (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad ή \quad r_1 = \frac{d}{2} + (2N+1)\frac{\lambda}{4} \qquad (1)$$

Το επόμενο (διαδοχικό) σημείο απόσβεσης θα βρίσκεται στη θέση:

$$r_1' = \frac{d}{2} + (2N+3)\frac{\lambda}{4} \qquad (2)$$

Από την αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (1) προκύπτει:

$$r_1' - r_1 = \frac{\lambda}{2} \quad ή \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

Η απόσταση επομένως δύο διαδοχικών σημείων απόσβεσης πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ είναι:

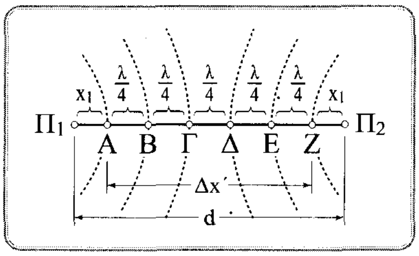
$$\Delta x = \lambda/2 \quad ή \quad \Delta x = 0{,}1\,m$$

Δίνεται ότι στο ευθύγραμμο τμήμα υπάρχουν 6 συνολικά σημεία απόσβεσης, επομένως η απόσταση των ακραίων σημείων απόσβεσης Α και Ζ είναι:

$$\Delta x' = 5\Delta x \quad ή \quad \Delta x' = 5\cdot 0{,}1\,m \quad ή \quad \Delta x' = 0{,}5\,m$$

Η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων απόσβεσης ή ενίσχυσης πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ($\Pi_1\Pi_2$) που ορίζουν οι δύο σύγχρονες πηγές Π_1, Π_2 είναι ίση με λ/2. Επειδή στο μέσο Μ του

Επειδή το πρώτο σημείο απόσβεσης Α απέχει $x_1 =$ $= 0{,}05\,\text{m}$ από την πηγή Π_1, λόγω συμμετρίας και το τελευταίο σημείο απόσβεσης Ζ θα απέχει από την πηγή Π_2 την ίδια απόσταση $x_1 = 0{,}05\,\text{m}$.



*ευθύγραμμου τμήματος είναι $r_1 =$ $= r_2$ ικανοποιείται η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής και τα υπόλοιπα σημεία ενίσχυσης εμφανίζονται συμμετρικά του μέσου Μ, ο συνολικός αριθμός των σημείων που συμβαίνει **ενίσχυση** είναι **περιττός**. Ανάλογα, ο συνολικός αριθμός των σημείων **απόσβεσης** στο ευθύγραμμο τμήμα ($\Pi_1\Pi_2$) είναι **άρτιος**.*

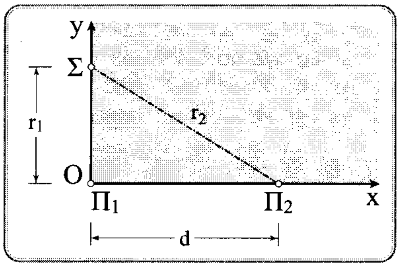
Συνεπώς η απόσταση d των δύο πηγών Π_1, Π_2 είναι:

$$d = 2x_1 + \Delta x' \quad ή \quad d = 2\cdot 0{,}05\,\text{m} + 0{,}5\,\text{m} \quad ή \quad \boxed{d = 0{,}6\,\text{m}}$$

ΘΕΜΑ 17^Ο^

α. Η απόσταση d μεταξύ των δύο πηγών είναι $d = 4\,\text{m}$. Η απόσταση του σημείου Σ από την πηγή Π_1 είναι $r_1 = 3\,\text{m}$. Αν εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Sigma\Pi_1\Pi_2$ (δες το επόμενο σχήμα), υπολογίζουμε την απόσταση r_2 του σημείου Σ από την πηγή Π_2:

$$r_2 = \sqrt{d^2 + r_1^2} \quad ή \quad r_2 = 5\,\text{m}$$



Το κύμα που φτάνει από την πηγή Π_1 έχει εξίσωση:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$$

ενώ από την πηγή Π_2:

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

Η διαφορά φάσης των δύο κυμάτων στο σημείο Σ, τη χρονική στιγμή t είναι:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \quad ή$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \qquad (1)$$

Είναι $\lambda = \dfrac{\upsilon}{f}$ ή $\lambda = 1\,\text{m}$. Άρα από την (1) παίρνουμε:

$$\boxed{\Delta\varphi = 4\pi\,\text{rad}}$$

Η διαφορά φάσης των κυμάτων σε ένα σημείο Σ του επιφανειακού μέσου όπου συμβάλλουν δύο κύματα που παράγονται από δύο σύγχρονες πηγές είναι συνάρτηση μόνο της διαφοράς των αποστάσεων ($r_2 - r_1$) του σημείου Σ από τις πηγές των κυμάτων.

β. Το πρώτο μέγιστο ήχου αντιστοιχεί στην πρώτη ενισχυτική συμβολή. Άρα είναι:

$$r_2 - r_1 = N\lambda \quad ή \quad r_2 - r_1 = N\lambda \quad ή$$

$$r_2 - r_1 = N\frac{\upsilon}{f} \quad ή \quad f = N\frac{\upsilon}{r_2 - r_1} \qquad (1)$$

Πρέπει όμως να ισχύει:

$$200\,\text{Hz} \le f \le 1000\,\text{Hz}$$

ή λόγω της (1):

$$200\,s^{-1} \le N\frac{\upsilon}{r_2 - r_1} \le 1000\,s^{-1} \quad ή$$

$$200\,s^{-1} \le N\frac{300\,m/s}{(5-3)\,m} \le 1000\,s^{-1} \quad ή$$

$$200 \le 150\,N \le 1000 \quad ή$$

$$\frac{200}{150} \le N \le \frac{1000}{150} \quad ή \quad \frac{4}{3} \le N \le \frac{20}{3}$$

Για πρώτη φορά η δεκτή τιμή είναι $N = 2$. Άρα από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$f = 2\cdot\frac{\upsilon}{r_2 - r_1} \quad ή \quad f = 300\,\text{Hz}$$

Συγκεκριμένα είναι:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \qquad (1)$$

➤ *Αν συμβαίνει **ενίσχυση** στο σημείο Σ, είναι $r_2 - r_1 = N\lambda$, οπότε από την (1) παίρνουμε:*

$$\Delta\varphi = 2N\pi$$

όπου $N \in \mathbb{Z}$.

➤ *Αν συμβαίνει **απόσβεση** στο σημείο Σ, είναι:*

$$r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$\Delta\varphi = (2N+1)\pi$$

γ. Ελάχιστα ήχου καταγράφονται στην περίπτωση ακυρωτικής συμβολής, δηλαδή όταν είναι:

$$r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad ή \quad r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\upsilon}{2f} \quad ή \quad f = (2N+1)\frac{\upsilon}{2(r_2 - r_1)} \quad ή$$

$$f = (2N+1)\frac{300\,m/s}{2(5-3)\,m} \quad ή \quad f = (2N+1)\cdot 75\,\text{Hz}$$

Είναι όμως $200\,\text{Hz} \le f \le 1000\,\text{Hz}$ ή λόγω της (1):

$$200\,\text{Hz} \le (2N+1)\cdot 75\,\text{Hz} \le 1000\,\text{Hz} \quad ή \quad 0{,}833 \le N \le 6{,}167$$

Επομένως δεκτές τιμές του N είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6. Συνεπώς υπάρχουν **6 ελάχιστα ήχου** που μπορεί να καταγράψει ο ανιχνευτής.

δ. Από τη σχέση (1) για $N = 6$ παίρνουμε: $f = 975\,\text{Hz}$.

ΘΕΜΑ 18^o

α. Η συχνότητα του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \lambda f \quad ή \quad f = \frac{\upsilon}{\lambda} \quad ή \quad f = \frac{100\,m/s}{2\,m} \quad ή \quad f = 50\,\text{Hz}$$

β. Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Με αντικατάσταση των τιμών παίρνουμε:

$$y = 0{,}08ημ2π\left(50t - \frac{x}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

γ. Η ενέργεια ταλάντωσης της στοιχειώδους μάζας είναι:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}DA^2 \quad ή \quad E_{ολ} = \frac{1}{2}Δm \cdot ω^2 A^2 \quad ή \quad E_{ολ} = \frac{1}{2}Δm \cdot 4π^2 f^2 A^2 \quad ή \quad E_{ολ} = 0{,}64\,J$$

δ. Οι αποστάσεις των δεσμών από την αρχή Ο (κοιλία) βρίσκονται απ' τη σχέση:

$$x = (2N+1)\frac{λ}{4}, \quad όπου\ N = 0, 1, 2, \dots$$

Για $N = 10$ βρίσκουμε τη θέση του 11ου δεσμού $x = 10{,}5\,m$.

*ΘΕΜΑ 19^Ο^*

Α. **α.** Συγκρίνοντας τη δοθείσα εξίσωση:

$$y = 8συν\frac{πx}{5}ημ8πt \quad (x, y\ σε\ cm,\ t\ σε\ s)$$

με την εξίσωση του στάσιμου κύματος της θεωρίας:

$$y = 2Aσυν\frac{2πx}{λ}ημ\frac{2πt}{T}$$

συμπεραίνουμε ότι είναι:

- $2A = 8\,cm$ ή $A = 4\,cm$
- $\frac{2πx}{λ} = \frac{πx}{5}$ ή $λ = 10\,cm$
- $\frac{2πt}{T} = 8πt$ ή $T = \frac{1}{4}s$

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στη χορδή είναι:

$$υ = \frac{λ}{T} \quad ή \quad υ = \frac{10\,cm}{\frac{1}{4}s} \quad ή \quad υ = 40\,cm/s$$

β. Τα τρέχοντα κύματα που συμβάλλουν για να δημιουργηθεί το στάσιμο κύμα έχουν εξισώσεις:

$$y_1 = Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) \quad ή \quad y_1 = 4ημ2π\left(4t - \frac{x}{10}\right) \quad (x, y\ σε\ cm,\ t\ σε\ s)$$

και

$$y_2 = 4ημ2π\left(4t + \frac{x}{10}\right) \quad (x, y\ σε\ cm,\ t\ σε\ s)$$

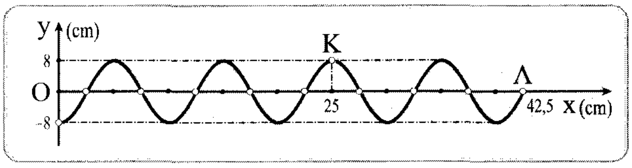
γ. Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου της χορδής, όταν έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, δίνεται απ' τη σχέση:

$$A' = 2A\left|συν\frac{2πx}{λ}\right|$$

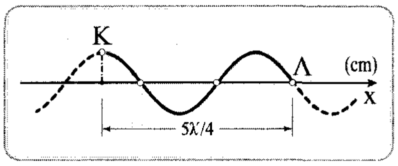
25

- Σημείο Κ: $A'_K = 2\cdot 4\left|\text{συν}\dfrac{2\pi\cdot 25}{10}\right|$ ή $\mathbf{A'_K = 8cm}$ (Κοιλία)
- Σημείο Λ: $A'_\Lambda = 2\cdot 4\left|\text{συν}\dfrac{2\pi\cdot 42{,}5}{10}\right|$ ή $\mathbf{A'_\Lambda = 0}$ (Δεσμός)

δ. Το ζητούμενο στιγμιότυπο φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Β. Το στιγμιότυπο του νέου στάσιμου κύματος ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Επειδή ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ υπάρχουν μόνο δύο κοιλίες, θα είναι:



$$(\text{ΚΛ}) = \frac{5\lambda'}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda' = \frac{4(\text{ΚΛ})}{5} \quad \text{ή} \quad \lambda' = \frac{4(42{,}5-25)\,\text{cm}}{5} \quad \text{ή} \quad \lambda' = 14\,\text{cm}$$

Η περίοδος του νέου στάσιμου κύματος είναι:

$$T' = \frac{\lambda'}{\upsilon} \quad \text{ή} \quad T' = \frac{14\,\text{cm}}{40\,\text{cm/s}} \quad \text{ή} \quad T' = 0{,}35\,\text{s}$$

Η εξίσωση του νέου στάσιμου κύματος είναι:

$$y' = 2A\,\text{συν}\frac{2\pi x}{\lambda'}\text{ημ}\frac{2\pi t}{T'} \quad \text{ή} \quad y = 8\,\text{συν}\frac{2\pi x}{14}\text{ημ}\frac{2\pi t}{0{,}35} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{y = 8\,\text{συν}\frac{\pi x}{7}\text{ημ}\frac{40\pi t}{7}} \quad (\text{x, y σε cm, t σε s})$$

ΘΕΜΑ 20^Ο

α. Από τις δοθείσες εξισώσεις των αρμονικών κυμάτων προκύπτει ότι είναι:

- Το μήκος κύματος $\lambda = 2\,\text{m}$.
- Η περίοδος ταλάντωσης $T = 1/10\ \text{s}$.
- Το πλάτος $A = 0{,}2\,\text{m}$.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι $y = 2A\,\text{συν}\dfrac{2\pi x}{\lambda}\cdot\text{ημ}\dfrac{2\pi t}{T}$. Με αντικατάσταση των τιμών στο S.I. παίρνουμε:

$$\mathbf{y = 0{,}4\,\text{συν}\pi x\,\text{ημ}20\pi t} \quad (\text{S.I.})$$

Στο σημείο Ο τα δύο κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά και δημιουργείται κοιλία. Οι θέσεις των κοιλιών είναι:

$$d_K = \kappa\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad \mathbf{d_K = \kappa\,m}$$

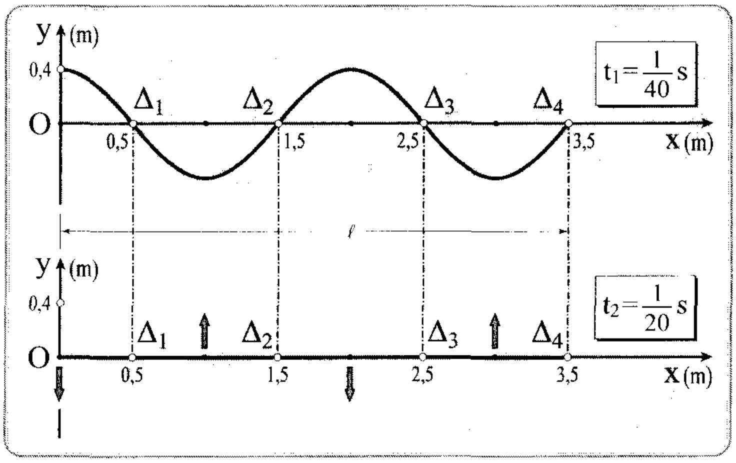
Οι θέσεις των δεσμών είναι:

$$d_\Delta = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4} \quad ή \quad \mathbf{d_\Delta = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right) m}$$

β. Τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις στιγμές:

$$t_1 = \frac{1}{40} s = \frac{T}{4} \quad και \quad t_2 = \frac{1}{20} s = \frac{T}{2}$$

φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



γ. Η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου σε στάσιμο κύμα δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_\tau = \omega \cdot 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}$$

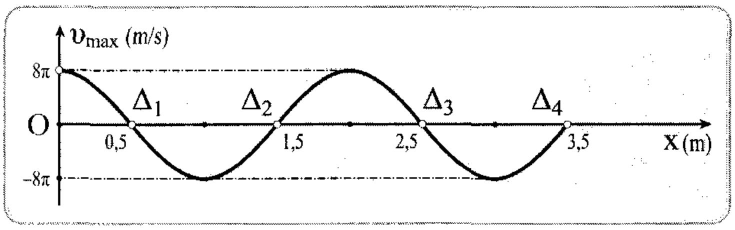
Με αντικατάσταση των τιμών παίρνουμε:

- Σημείο Κ: $\mathbf{\upsilon_{\tau,K} = 4\pi\, m/s}$
- Σημείο Λ: $\mathbf{\upsilon_{\tau,\Lambda} = -4\pi\, m/s}$

δ. Η μέγιστη ταχύτητα των διαφόρων σημείων της χορδής δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{max} = \omega \cdot 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \quad ή \quad \mathbf{\upsilon_{max} = 8\pi\sigma\upsilon\nu\pi x} \quad (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση της $\upsilon_{max} = f(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 21^{O}

α. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$E = 3\cdot 10^{-2}\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{10^{15}}{2}t - \frac{10^{7}}{3}x\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Από τη σύγκριση της παραπάνω εξίσωσης με την εξίσωση της θεωρίας:

$$E = E_{max}\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

συμπεραίνουμε ότι είναι:

- η περίοδος $T = 2\cdot 10^{-15}\,s$
- το μήκος κύματος $\lambda = 3\cdot 10^{-7}\,m$
- το πλάτος της έντασης $E_{max} = 3\cdot 10^{-2}\,N/m$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad \upsilon = \frac{3\cdot 10^{-7}\,m}{2\cdot 10^{-15}\,s} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\upsilon = 1{,}5\cdot 10^{8}\,m/s}$$

Επειδή είναι $\upsilon < c$, συμπεραίνουμε ότι το Η/Μ κύμα δεν διαδίδεται στο κενό.

β. Ο δείκτης διάθλασης του μέσου στο οποίο διαδίδεται το Η/Μ κύμα είναι:

$$n = \frac{c}{\upsilon} \quad \text{ή} \quad n = \frac{3\cdot 10^{8}\,m/s}{1{,}5\cdot 10^{8}\,m/s} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{n = 2}$$

γ. Το μήκος κύματος του Η/Μ κύματος στο κενό είναι:

$$\lambda_0 = n\lambda \quad \text{ή} \quad \lambda_0 = 2\cdot 3\cdot 10^{-7}\,m \quad \text{ή} \quad \lambda_0 = 6\cdot 10^{-7}\,m$$

Οι ορατές ακτινοβολίες έχουν μήκη κύματος στο κενό από $4\cdot 10^{-7}\,m$ (= 400 nm) μέχρι $7\cdot 10^{-7}\,m$ (= 700 nm) και το μήκος κύματος $\lambda_0 = 6\cdot 10^{-7}\,m$ βρίσκεται ανάμεσα σε αυτές τις τιμές, άρα το Η/Μ ανήκει στην περιοχή του ορατού φωτός.

δ. Οι μέγιστες τιμές των εντάσεων ηλεκτρικού E_{max} και μαγνητικού πεδίου B_{max} συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{E_{max}}{B_{max}} = c \quad \text{ή} \quad B_{max} = \frac{E_{max}}{c} \quad \text{ή} \quad B_{max} = \frac{3\cdot 10^{-2}\,N/m}{3\cdot 10^{8}\,m/s} \quad \text{ή} \quad B_{max} = 10^{-10}\,T$$

Η εξίσωση του μαγνητικού πεδίου του Η/Μ κύματος είναι:

$$\boldsymbol{B = 10^{-10}\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{10^{15}}{2}t - \frac{10^{7}}{3}x\right)} \quad \text{(S.I.)}$$

ε. Η διαφορά φάσης της έντασης σε δύο σημεία που απέχουν d μια χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi\left[\frac{t_1}{T} - \frac{(x+d)}{\lambda}\right] \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}$$

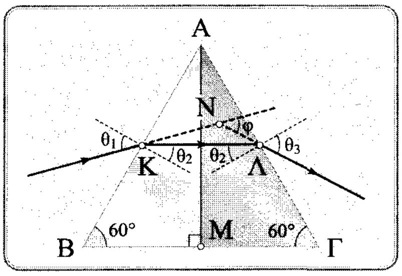
Επομένως η απόσταση d των σημείων είναι:

$$d = \frac{\Delta\varphi\cdot\lambda}{2\pi} \quad \text{ή} \quad d = \frac{3\pi\cdot 3\cdot 10^{-7}}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{d = 4{,}5\cdot 10^{-7}\,m}$$

ΘΕΜΑ 22ο

α. Από το νόμο του Snell για τη διάθλαση της ακτίνας στο σημείο Κ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2}=n_1 \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_2=\frac{\eta\mu\theta_1}{n_1} \quad \acute{\eta} \quad \theta_2=30^\circ$$



Επομένως η διαθλώμενη ακτίνα είναι παράλληλη στην έδρα ΒΓ και συνεπώς προσπίπτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια ΑΜ των δύο οπτικών μέσων. Η ακτίνα συνεχίζει την πορεία της στο δεύτερο πρίσμα και προσπίπτει στην έδρα ΑΓ στο σημείο Λ υπό γωνία πρόσπτωσης $\theta_2 = 30°$.

Η κρίσιμη γωνία θ_{crit} υπολογίζεται απ’ τη σχέση:

$$\eta\mu\theta_{crit}=\frac{1}{n_2} \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_{crit}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0,577$$

Είναι λοιπόν $\theta_2 < \theta_{crit}$, επομένως η ακτίνα διαθλάται στο σημείο Λ και εξέρχεται στον αέρα. Από το νόμο του Snell για τη διάθλαση στο σημείο Λ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\theta_2}{\eta\mu\theta_3}=\frac{1}{n} \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_3=n\,\eta\mu\theta_2 \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_3=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} \quad \acute{\eta} \quad \theta_3=60^\circ$$

Η πορεία της ακτίνας φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

β. Η γωνία εκτροπής φ ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΚΝΛ είναι:

$$\varphi=(\theta_1-\theta_2)+(\theta_3-\theta_2) \quad \acute{\eta}$$

$$\varphi=45^\circ-30^\circ+60^\circ-30^\circ \quad \acute{\eta} \quad \varphi=45^\circ$$

γ. Αν το υλικό (2) είχε δείκτη διάθλασης $n_2' = 2$, τότε η κρίσιμη γωνία θα ήταν:

$$\eta\mu\theta'_{cr}=\frac{1}{n'_2} \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta'_{cr}=\frac{1}{2} \quad \acute{\eta} \quad \theta'_{cr}=30^\circ$$

Επειδή η γωνία πρόσπτωσης $\theta_2 = 30°$ στην έδρα ΑΓ θα ήταν ίση με την κρίσιμη γωνία $\theta'_{cr}=30°$, συνεπώς η ακτίνα κατά τη διάθλασή της θα εξέρχονταν στον αέρα παράλληλα στην έδρα ΑΓ.

Όταν ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπίπτει πλάγια στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων, προερχόμενη από το οπτικά αραιότερο μέσο, τότε η διαθλώμενη ακτίνα πλησιάζει την κάθετο στο σημείο πρόσπτωσης.

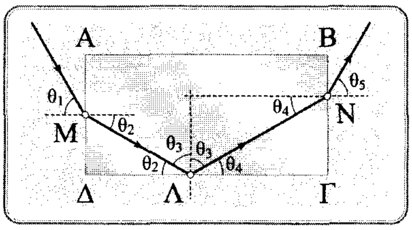
Αν η ακτίνα φωτός προσπέσει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων, τότε δεν εκτρέπεται από την πορεία της.

Όταν ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προσπέσει πλάγια στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων, προερχόμενη από το οπτικά πυκνότερο μέσο με γωνία πρόσπτωσης ίση με την κρίσιμη γωνία ($\theta = \theta_{cr}$), τότε διαθλάται πάνω ακριβώς στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων.

29

ΘΕΜΑ 23^{O}

α. Από το νόμο του Snell κατά τη διάθλαση της ακτίνας στο σημείο Μ υπολογίζουμε τη γωνία διάθλασης θ_2:



$$\eta\mu\theta_1 = n\eta\mu\theta_2 \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_2 = \frac{\eta\mu\theta_1}{n} \quad \acute{\eta}$$

$$\eta\mu\theta_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_2 = \frac{1}{2} \quad \acute{\eta} \quad \theta_2 = 30°$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΔΛ έχουμε:

$$\theta_2 + \theta_3 = 90° \quad \acute{\eta} \quad \theta_3 = 60°$$

Η κρίσιμη γωνία θ_{cr} για την ακτίνα κατά την έξοδό της από την πλάκα στον αέρα είναι:

$$\eta\mu\theta_{cr} = \frac{1}{n} \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_{cr} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επειδή είναι $\eta\mu\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, συμπεραίνουμε ότι είναι:

$$\eta\mu\theta_3 > \eta\mu\theta_{cr} \quad \acute{\eta} \quad \theta_3 > \theta_{cr}$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα στο σημείο Λ υφίσταται ολική ανάκλαση. Στο σημείο Ν συμβαίνει διάθλαση της ακτίνας και έξοδό της στον αέρα, γιατί η γωνία πρόσπτωσης είναι:

$$\theta_4 = 90° - \theta_3 \quad \acute{\eta} \quad \theta_4 = 30°$$

και επομένως μικρότερη της κρίσιμης γωνίας:

$$\theta_{cr} \simeq 35°$$

Για να υποστεί μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός ολική εσωτερική ανάκλαση θα πρέπει να συντρέχουν οι εξής προϋποθέσεις:
α. *Η ακτίνα να προέρχεται από οπτικά πυκνότερο μέσο και να προσπίπτει πλάγια στη διαχωριστική επιφάνεια με οπτικά αραιότερο μέσο.*
β. *Η γωνία πρόσπτωσης θ να είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης γωνίας θ_{cr} ($\theta > \theta_{cr}$).*

β. Από το νόμο του Snell για τη διάθλαση της ακτίνας στο σημείο Ν έχουμε:

$$n\,\eta\mu\theta_4 = \eta\mu\theta_5 \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\theta_5 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} \quad \acute{\eta} \quad \theta_5 = 60°$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΔΛ προκύπτει:

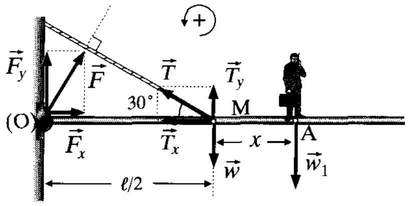
$$\varepsilon\varphi\theta_2 = \frac{(\text{ΜΔ})}{(\text{ΔΛ})} \quad \acute{\eta} \quad (\text{ΔΛ}) = 17\ \text{cm}$$

Είναι $(\text{ΛΓ}) = (\text{ΔΓ}) - (\text{ΔΛ})$ ή $(\text{ΛΓ}) = 3\ \text{cm}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΛΓΝ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\theta_4 = \frac{(\text{ΝΓ})}{(\text{ΛΓ})} \quad \acute{\eta} \quad (\text{ΝΓ}) = 1{,}7\ \text{cm}$$

Επομένως το σημείο εξόδου Ν της ακτίνας από την πλάκα βρίσκεται στην πλευρά ΒΓ και απέχει από την κορυφή Γ απόσταση 1,7 cm.

ΘΕΜΑ 24^{O}



Στη δοκό ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσο της M, μία δύναμη $\vec{w}_1$ ίση με το βάρος του ανθρώπου (έστω στο σημείο A), η δύναμη $\vec{T}$ του σχοινιού στο μέσο M και η δύναμη $\vec{F}$ της άρθρωσης. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{T}$ στις συνιστώσες $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ και τη δύναμη $\vec{F}$ στις συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επειδή η δοκός ισορροπεί, χρησιμοποιούμε τις συνθήκες ισορροπίας:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0} \text{ ή } \begin{cases}\Sigma\vec{F}_x=\vec{0} & (1)\\ \Sigma\vec{F}_y=\vec{0} & (2)\end{cases} \quad \text{και}$$

$$\Sigma\tau=0 \quad (3) \quad \text{(ως προς οποιοδήποτε σημείο)}$$

α. Επειδή η διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ της άρθρωσης είναι κάθετη στο νήμα, η δύναμη σχηματίζει γωνία 60° με τη δοκό. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες (1) και (2) έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x=\vec{0} \text{ ή } F_x=T_x \text{ ή } F\sigma\upsilon\nu60°=T\sigma\upsilon\nu30° \text{ ή } F=T\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\Sigma\vec{F}_y=\vec{0} \text{ ή } F_y+T_y=w+w_1 \text{ ή } F\eta\mu60°+T\eta\mu30°=w+w_1 \text{ ή}$$

$$F\sqrt{3}+T=2(w+w_1) \text{ ή, λόγω της (4), } T\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+T=2(w+w_1) \text{ ή}$$

$$4T=2(w+w_1) \text{ ή } T=\frac{w+w_1}{2} \text{ ή } \boldsymbol{T=500N}$$

Αντικαθιστώντας $T=500N$ στη σχέση (4) βρίσκουμε: $\boldsymbol{F=500\sqrt{3}\ N}$

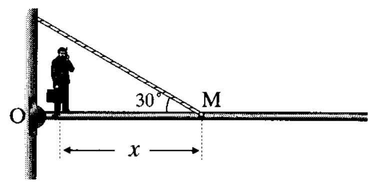
β. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3) ως προς το σημείο M και με (+) τη φορά του σχήματος, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(M)}=0 \text{ ή } \tau_{T_x}+\tau_{T_y}+\tau_{F_x}+\tau_{F_y}+\tau_w+\tau_{w_1}=0 \text{ ή}$$

$$0+0+0-F_y\cdot\frac{\ell}{2}+0-w_1x=0 \text{ ή } x=-\frac{F\eta\mu60°\cdot\ell}{2w_1} \text{ ή}$$

$$x=-\frac{500\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot4}{2\cdot800}\,m \text{ ή } x=-1{,}875\,m$$

Το πρόσημο (-) σημαίνει ότι για να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του προβλήματος, ο άνθρωπος πρέπει να στέκεται σε απόσταση $\boldsymbol{x=1{,}875\ m}$ αριστερά από το μέσο της δοκού, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

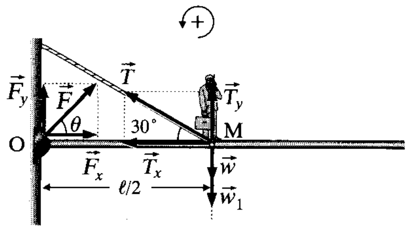


31

γ. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό όταν ο άνθρωπος στέκεται στο μέσο της Μ (βλέπε επόμενο σχήμα). Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3) ως προς το σημείο Ο και με (+) τη φορά του σχήματος, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \quad ή \quad \tau_{T_x} + \tau_{T_y} + \tau_{F_x} + \tau_{F_y} + \tau_w + \tau_{w_1} = 0 \quad ή$$

$$0 + T_y \cdot \frac{\ell}{2} + 0 + 0 - w \cdot \frac{\ell}{2} - w_1 \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \quad ή \quad T_y = w + w_1 \quad (5)$$



Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (2) έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \quad ή \quad F_y + T_y = w + w_1 \quad ή, \text{ λόγω της (5), είναι:}$$

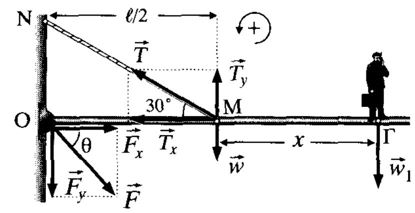
$$F_y = 0 \quad ή \quad F\eta\mu\theta = 0 \text{ και επειδή } F \neq 0\text{, προκύπτει } \theta = 0°$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (1) έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \quad ή \quad F_x = T_x \quad ή \quad F\sigma\upsilon\nu\theta = T\sigma\upsilon\nu 30° \quad ή \quad F = T\sigma\upsilon\nu 30° \quad ή, \text{ λόγω της (5), είναι:}$$

$$F = \frac{w + w_1}{\eta\mu 30°} \cdot \sigma\upsilon\nu 30° \quad ή \quad F = \sqrt{3}(w + w_1) \quad ή \quad \boldsymbol{F = 1000\sqrt{3}\ N}$$

δ. Στη δοκό ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσο της Μ, μία δύναμη $\vec{w}_1$ ίση με το βάρος του ανθρώπου στο σημείο Γ, η δύναμη $\vec{T}$ του σχοινιού στο μέσο Μ και η δύναμη $\vec{F}$ της άρθρωσης. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{T}$ στις συνιστώσες $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ και τη δύναμη $\vec{F}$ στις συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3) ως προς το σημείο Μ και με (+) τη φορά του σχήματος, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(M)} = 0 \quad ή \quad \tau_{T_x} + \tau_{T_y} + \tau_{F_x} + \tau_{F_y} + \tau_w + \tau_{w_1} = 0 \quad ή$$

$$0 + 0 + 0 + F_y \cdot \frac{\ell}{2} + 0 - w_1 x = 0 \quad ή \quad F_y = \frac{2w_1 x}{\ell} \quad ή \quad F_y = 750\,N$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες (1) και (2) έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \quad ή \quad F_x = T_x \quad ή \quad F_x = T\sigma\upsilon\nu 30° \quad ή \quad F_x = T\sqrt{3}/2 \quad (6)$$

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \quad ή \quad F_y + w + w_1 = T_y \quad ή \quad F_y + w + w_1 = T\eta\mu 30° \quad ή \quad T = 3500\,N$$

Αντικαθιστώντας T=3500N στη σχέση (6) προκύπτει: $F_x = 1750\sqrt{3}\,N$

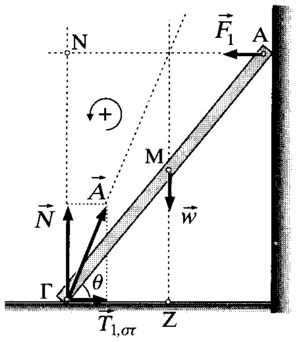
Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ δίνεται από τη σχέση:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2} \quad ή \quad F=\sqrt{(1750\sqrt{3})^2+750^2}\,N \quad ή \quad \boldsymbol{F=3122,5\ N}$$

$$\text{και} \quad εφθ=\frac{F_y}{F_x} \quad ή \quad εφθ=\frac{750}{1750\sqrt{3}} \quad ή \quad \boldsymbol{εφθ=0,2474} \quad ή \quad \boldsymbol{θ\simeq 14°}$$

ΘΕΜΑ 25^Ο^

α. Στη σκάλα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσο της Μ, η κάθετη δύναμη $\vec{F}_1$ από το λείο τοίχο στο σημείο Α και η αντίδραση $\vec{A}$ του δαπέδου στο σημείο επαφής Γ. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{A}$ στις συνιστώσες $\vec{T}_{1,στ}$ και $\vec{N}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επειδή η σκάλα ισορροπεί, χρησιμοποιούμε τις συνθήκες ισορροπίας:



$$Σ\vec{F}=\vec{0} \quad ή \quad \begin{cases} Σ\vec{F}_x=\vec{0} & (1) \\ Σ\vec{F}_y=\vec{0} & (2) \end{cases} \qquad \text{και}$$

$Στ=0$ (3) (ως προς οποιοδήποτε σημείο)

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3) ως προς το σημείο Γ και με (+) τη φορά του σχήματος, έχουμε:

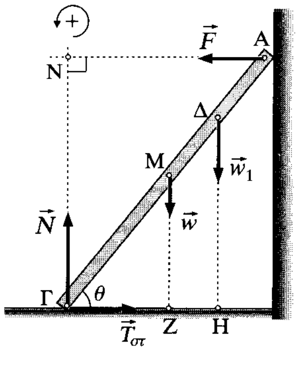
$$Στ_{(Γ)}=0 \quad ή \quad τ_A+τ_w+τ_{F_1}=0 \quad ή \quad 0-w(ΓZ)+F_1(ΓN)=0 \quad ή$$

$$F_1=\frac{w(ΓZ)}{(ΓN)} \quad ή \quad F_1=\frac{w\cdot\frac{\ell}{2}\cdot συνθ}{\ell ημθ} \quad ή \quad \boldsymbol{F_1=37,5\,N} \quad (\text{όπου } ημθ=\sqrt{1-συν^2θ}=0,8)$$

Από τη συνθήκη (1) προκύπτει: $Σ\vec{F}_x=\vec{0}$ ή $F_1=T_{1,στ}$ ή $\boldsymbol{T_{1,στ}=37,5\,N}$

β. Όταν ο άνθρωπος είναι πάνω στη σκάλα, ασκούνται σ' αυτή οι εξής δυνάμεις: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσο της Μ, η δύναμη $\vec{w}_1$ ίση με το βάρος του ανθρώπου στο σημείο Δ, η κάθετη δύναμη $\vec{F}$ από το λείο τοίχο στο σημείο Α, η στατική τριβή $\vec{T}_{στ}$ και η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από το δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3) ως προς το σημείο Γ και με (+) τη φορά του σχήματος, έχουμε:

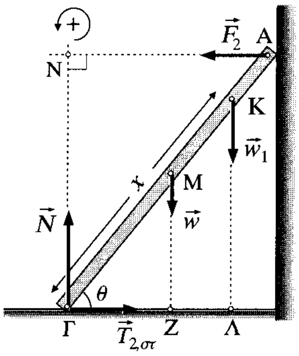


$$Στ_{(Γ)}=0 \quad ή \quad τ_N+τ_{T_{στ}}+τ_w+τ_{w_1}+τ_F=0 \quad ή$$

$$0+0-w(ΓZ)-w_1(ΓH)+F(ΓN)=0 \quad ή \quad F=\frac{w(ΓZ)+w_1(ΓH)}{(ΓN)} \quad ή$$

$$F = \frac{w\cdot\frac{\ell}{2}\cdot συνθ + w_1\cdot\frac{3\ell}{4}\cdot συνθ}{\ell ημθ} \quad ή \quad F = \frac{(2w+3w_1)συνθ}{4ημθ} \quad ή \quad \boldsymbol{F = 487{,}5\ N}$$

Από τη συνθήκη (1) προκύπτει: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ ή $T_{στ} = F$ ή $\boldsymbol{T_{στ} = 487{,}5\ N}$



γ. Από τα προηγούμενα αποτελέσματα γίνεται φανερό ότι, καθώς ο άνθρωπος ανεβαίνει στη σκάλα, μεταβάλλονται μόνο οι δυνάμεις στον οριζόντιο άξονα. Έστω ότι κάποια στιγμή ο άνθρωπος είναι στο σημείο Κ, που απέχει απόσταση x από το σημείο Γ. Τότε στη σκάλα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσο της Μ, η δύναμη $\vec{w}_1$ ίση με το βάρος του ανθρώπου στο σημείο Κ, η κάθετη δύναμη $\vec{F}_2$ από το λείο τοίχο στο σημείο Α, η στατική τριβή $\vec{T}_{2,στ}$ και η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από το δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3) ως προς το σημείο Γ και με (+) τη φορά του σχήματος έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(Γ)} = 0 \quad ή \quad \tau_N + \tau_{T_{2,στ}} + \tau_w + \tau_{w_1} + \tau_{F_2} = 0 \quad ή$$

$$0 + 0 - w(ΓZ) - w_1(ΓΛ) + F_2(ΓN) = 0 \quad ή \quad F_2 = \frac{w(ΓZ) + w_1(ΓΛ)}{(ΓN)} \quad ή$$

$$F_2 = \frac{w\cdot\frac{\ell}{2}\cdot συνθ + w_1 x συνθ}{\ell ημθ} \quad ή \quad F_2 = 300x + 37{,}5 \quad \text{(S.I.)}$$

Από τις συνθήκες (1) και (2) έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \quad ή \quad T_{2,στ} = F_2 \quad ή \quad T_{2,στ} = 300x + 37{,}5 \ \text{(S.I.)} \ (4) \ \text{και}$$

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \quad ή \quad N = w + w_1 \quad ή \quad N = 900N \qquad (5)$$

Για να μην ολισθήσει η σκάλα στο δάπεδο, πρέπει να ισχύει:

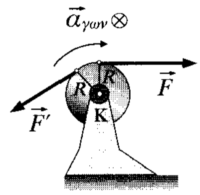
$$T_{2,στ} \le T_{στ(max)} \quad ή \quad T_{2,στ} \le \mu_s N \quad \text{ή, λόγω των (4) και (5),}$$

$$300x + 37{,}5 \le 0{,}6\cdot 900 \quad ή \quad x \le 1{,}675m \quad ή \quad \boldsymbol{x_{max} = 1{,}675\ m}$$

ΘΕΜΑ 26^{Ο}

α. Η τροχαλία εκτελεί περιστροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{1,\gamma\omega\nu}$ και σε χρόνο $t=\sqrt{\pi}\,s$ διαγράφει γωνία, η οποία είναι ίση με:

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha_{1,\gamma\omega\nu}t^2 \quad ή \quad \alpha_{1,\gamma\omega\nu}=\frac{2\theta}{t^2} \quad ή \quad \alpha_{1,\gamma\omega\nu}=\frac{2(2{,}5\cdot 2\pi)}{(\sqrt{\pi})^2}rad/s^2 \quad ή \quad \boldsymbol{\alpha_{1,\gamma\omega\nu}=10\ rad/s^2}$$



Στην τροχαλία ασκούνται οι δυνάμεις: $\vec{F}$ από το οριζόντιο νήμα, η $\vec{F}'$ από το νήμα που συνδέει τον κύλινδρο, το βάρος της $\vec{w}$ και η αντίδραση $\vec{F}_{\alpha\nu}$ από τον άξονα περιστροφής της (οι δυνάμεις $\vec{w}$ και $\vec{F}_{\alpha\nu}$ δεν έχουν σχεδιαστεί, διότι δεν είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος). Η τροχαλία περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{1,\gamma\omega\nu}=10\ rad/s^2$, οπότε εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την τροχαλία, ως προς τον άξονα περιστροφής της έχουμε:

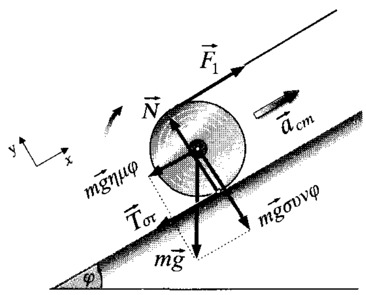
$$\Sigma\tau_K=I\alpha_{1,\gamma\omega\nu} \quad ή \quad FR-F'R=\frac{1}{2}MR^2\alpha_{1,\gamma\omega\nu} \quad ή$$

$$F'=F-\frac{1}{2}MR\alpha_{1,\gamma\omega\nu} \quad ή \quad F'=\left(12-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}2\cdot 10\right)N \quad ή \quad F'=11N$$

35

Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει: $\boldsymbol{F'=F_1=11\,N}$

β. Στον κύλινδρο ασκούνται οι δυνάμεις: $\vec{F}_1$ από το νήμα, το βάρος του $m\vec{g}$, η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ της οποίας η φορά επιλέχθηκε αυθαίρετα και η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$. Αναλύουμε το βάρος $m\vec{g}$ σε συνιστώσες $m\vec{g}\eta\mu\varphi$ κατά τη διεύθυνση της κίνησης και $m\vec{g}\sigma\upsilon\nu\varphi$ κάθετη σ' αυτή.



Έστω $\vec{a}_{cm}$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου, έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}_{cm} \quad ή \quad F_1-T_{\sigma\tau}-mg\eta\mu\varphi=ma_{cm} \qquad (1)$$

Έστω $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$ η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου. Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου, έχουμε:

$$\Sigma\tau=I_1\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad ή \quad F_1R_1+T_{\sigma\tau}R_1=\frac{1}{2}mR_1^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad ή \quad F_1+T_{\sigma\tau}=\frac{1}{2}mR_1\alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (2)$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει: $a_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R_1$, οπότε η παραπάνω σχέση (1) γράφεται:

$$F_1-T_{\sigma\tau}-mg\eta\mu\varphi=ma_{\gamma\omega\nu}R_1 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

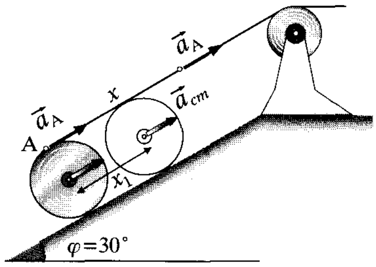
$$2F_1 - mg\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}m\alpha_{\gamma\omega\nu}R_1 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{4F_1 - 2mg\eta\mu\varphi}{3mR_1} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 8\ rad/s^2}$$

γ. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}mR_1\alpha_{\gamma\omega\nu} - F_1 \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = (\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0{,}5\cdot 8 - 11)N \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{T_{\sigma\tau} = -7N}$$

Το πρόσημο (–) στο παραπάνω αποτέλεσμα μας πληροφορεί ότι η στατική τριβή έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή που σχεδιάστηκε.

δ. Η στιγμιαία ταχύτητα κάθε υλικού σημείου του νήματος είναι ίση με την ταχύτητα του ανώτερου σημείου Α της περιφέρειας του κυλίνδρου, από το πλάγιο επίπεδο. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α κάθε στιγμή δίνεται από τη σχέση



$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \omega R \quad \text{ή}$$

$$\frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{d(\upsilon_{cm} + \omega R)}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} + \frac{d(\omega R)}{dt} \quad \text{ή} \quad a_A = a_{cm} + \alpha_{\gamma\omega\nu}R \quad \text{ή} \quad a_A = 2a_{cm}$$

Η τελευταία σχέση μας πληροφορεί ότι κάθε υλικό σημείο του νήματος κινείται με επιτάχυνση διπλάσιου μέτρου από το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Αν x=2m είναι η μετατόπιση ενός υλικού σημείου του νήματος και x_1 η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στον ίδιο χρόνο, τότε ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a_A t^2 \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}a_{cm} t^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{x_1} = \frac{a_A}{a_{cm}} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{x_1} = \frac{2a_{cm}}{a_{cm}} \quad \text{ή} \quad x_1 = \frac{x}{2} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{x_1 = 1m}$$

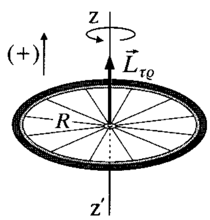
ΘΕΜΑ 27^Ο

α. Υπολογίζουμε πρώτα τη ροπή αδράνειας του τροχού $I_{\tau\rho}$ ως προς τον άξονα περιστροφής z′z. Θεωρούμε ότι η μάζα του τροχού αποτελείται από m_1, m_2, m_3, ..., m_n στοιχειώδεις μάζες και, επειδή βρίσκεται στην περιφέρεια, η απόσταση κάθε μάζας από τον άξονα περιστροφής είναι R. Σύμφωνα με τον ορισμό, η ροπή αδράνειας της στεφάνης είναι:

$$I_{\tau\rho} = m_1R^2 + m_2R^2 + \ldots + m_nR^2 \quad \text{ή} \quad I_{\tau\rho} = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)R^2$$

Όμως $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$, οπότε: $I_{\tau\rho} = mR^2$ ή $I_{\tau\rho} = 0{,}16\ kg\cdot m^2$

Το μέτρο της στροφορμής $L_{\tau\rho}$ του τροχού υπολογίζεται από τη σχέση:



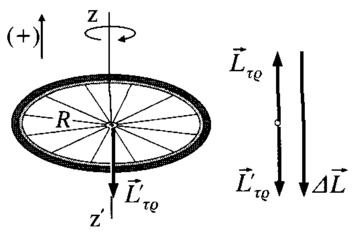
$$L_{\tau\rho} = I_{\tau\rho}\omega \quad \text{ή} \quad L_{\tau\rho} = 0{,}16\,kg\cdot m^2\cdot 10\,rad/s \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{L_{\tau\rho} = 1{,}6\ kg\cdot m^2/s}$$

με φορά αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

β. Περιστρέφοντας η μαθήτρια τον τροχό κατά 180° ώστε να γίνει πάλι οριζόντιος, το μέτρο της στροφορμής του τροχού παραμένει σταθερό, αφού δε μεταβάλλεται το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του. Άρα:

$$L'_{\tau\rho} = L_{\tau\rho} = 1{,}6\ kg \cdot m^2/s$$

Μετά την περιστροφή, η στροφορμή $\vec{L}'_{\tau\rho}$ του τροχού έχει αντίθετη φορά, οπότε η μεταβολή της στροφορμής του τροχού είναι:



$$\Delta\vec{L} = \vec{L}'_{\tau\rho} - \vec{L}_{\tau\rho}$$

και λαμβάνοντας (+) τη φορά του σχήματος, έχουμε:

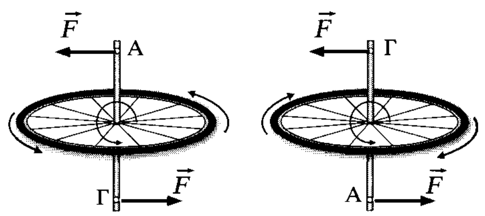
$$\Delta L = -L'_{\tau\rho} - (+L_{\tau\rho}) \quad \text{ή} \quad \Delta L = -2L_{\tau\rho} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\Delta L = -3{,}2\ kg \cdot m^2/s}$$

με φορά αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

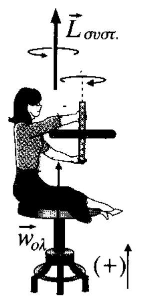
γ. Έστω $\vec{\tau}$ η ροπή που προκάλεσε την περιστροφή του τροχού σε χρόνο Δt=0,5s. Το μέτρο της ροπής υπολογίζεται από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης. Είναι:

$$|\tau| = \left|\frac{\Delta L}{\Delta t}\right| \quad \text{ή} \quad |\tau| = \frac{|-3{,}2\ kg \cdot m^2/s|}{0{,}5s} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{|\tau| = 3{,}2\ N \cdot m}$$

Η μαθήτρια ασκεί ένα ζεύγος δυνάμεων με τα χέρια της στα σημεία Α και Γ του άξονα περιστροφής του τροχού. Το ζεύγος αυτών των δυνάμεων δημιουργεί την απαραίτητη ροπή για την περιστροφή του τροχού γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο μοχλοβραχίονα ΑΓ με κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάνοντας τις απλούστερες υποθέσεις, δηλαδή θεωρώντας τις δυνάμεις αυτές σταθερού μέτρου και κάθετες στο μοχλοβραχίονα, το μέτρο της ροπής δίνεται από τη σχέση: $\tau = F(A\Gamma)$



δ. Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα μαθήτρια-κάθισμα-τροχός είναι μηδέν και οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους είναι εσωτερικές, οπότε δε μεταβάλλουν τη στροφορμή του συστήματος. Έστω $\vec{L}_{\kappa,\mu}$ η στροφορμή καθίσματος-μαθήτριας. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα, έχουμε:

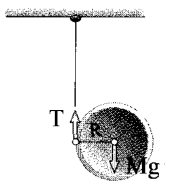


$$\vec{L}_{o\lambda,\alpha\rho\chi.} = \vec{L}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda.} \quad \text{ή} \quad \vec{L}_{\tau\rho} + 0 = \vec{L}'_{\tau\rho} + \vec{L}_{\kappa,\mu} \quad \text{ή} \quad L_{\tau\rho} = -L'_{\tau\rho} + L_{\kappa,\mu} \quad \text{ή}$$

$$L_{\kappa,\mu} = L_{\tau\rho} + L'_{\tau\rho} \quad \text{ή} \quad I_{\kappa,\mu}\omega_{\kappa,\mu} = 2L_{\tau\rho} \quad \text{ή} \quad \omega_{\kappa,\mu} = \frac{2L_{\tau\rho}}{I_{\kappa,\mu}} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\omega_{\kappa,\mu} = 1\ rad/s}$$

ΘΕΜΑ 28^{Ο}

α. Στο δίσκο ασκούνται κάθε στιγμή το βάρος του Mg και η τάση του νήματος T. Επειδή σε κάθε μία περιστροφή ο δίσκος έχει διανύσει κινούμενος κατακόρυφα διάστημα $s_1 = 2\pi R$, στις $N = 15/\pi$ περιστροφές θα έχει διανύσει διάστημα:



$$h = N\cdot 2\pi R \quad ή \quad h = \frac{15}{\pi}\cdot 2\pi\cdot 1\,m \quad ή \quad h = 30\,m$$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \quad ή$$

$$Mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad ή$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_1^2}{R^2} \quad ή$$

$$gh = \frac{3}{4}\upsilon_1^2 \quad ή \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{4gh}{3}} \quad ή \quad \upsilon_1 = 20\,m/s$$

Είναι:

$$\omega_1 = \frac{\upsilon_1}{R} \quad ή \quad \omega_1 = 20\,rad/s$$

Το μέτρο της στροφορμής του δίσκου τη στιγμή t_1 είναι:

*Η **αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας** εφαρμόζεται όταν στο σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις ή ασκούνται και μη συντηρητικές δυνάμεις αλλά το έργο τους είναι ίσο με μηδέν. Το έργο της τάσης του νήματος στην άσκηση αυτή είναι ίσο με μηδέν, καθώς η τάση $\vec{T}$ δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της πάνω στη διεύθυνσή της.*

$$L = I\omega_1 \quad ή \quad L = \frac{1}{2}MR^2\omega_1 \quad ή \quad L = \frac{1}{2}\cdot 4\,kg\cdot 1\,m^2\cdot 20\,s^{-1} \quad ή \quad L = 40\,kg\,m^2/s$$

β. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = M\alpha_{cm} \quad ή \quad Mg - T = M\alpha_{cm} \qquad (1)$$

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{γων} \quad ή \quad TR = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \quad ή \quad T = \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη και παίρνουμε:

$$Mg = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \quad ή \quad \alpha_{cm} = \frac{2g}{3} \quad ή \quad \alpha_{cm} = \frac{20}{3}\,m/s^2$$

Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι:

$$\alpha_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R} \quad ή \quad \alpha_{γων} = \frac{20}{3}\,rad/s^2$$

38

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου ως προς τον άξονά του είναι:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=\Sigma\tau \quad ή \quad \frac{\Delta L}{\Delta t}=I\alpha_{γων} \quad ή \quad \frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{1}{2}MR^2\alpha_{γων} \quad ή$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{40}{3}\,kg\,m^2/s^2$$

Η τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής ενός στερεού σώματος εξαρτάται από τη θέση του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται.

γ. Η συνισταμένη ροπή που ασκείται στο δίσκο είναι:

$$\Sigma\tau=\frac{\Delta L}{\Delta t} \quad ή \quad \Sigma\tau=\frac{40}{3}\,Nm$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω της περιστροφικής κίνησης του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\frac{\Delta K_{στρ}}{\Delta t}=\Sigma\tau\cdot\omega_1 \quad ή \quad \frac{\Delta K_{στρ}}{\Delta t}=\frac{800}{3}\,J/s$$

δ. Το έργο του βάρους του δίσκου είναι:

$$W_B=Mgh \quad ή \quad W_B=1200\,J$$

Η γωνία στροφής θ του δίσκου από την $t=0$ μέχρι τη στιγμή t_1 είναι:

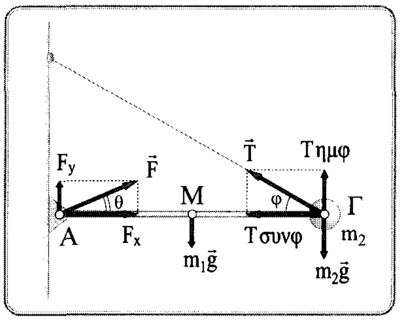
$$\theta=N\cdot 2\pi \quad ή \quad \theta=30\,rad$$

Το έργο της ροπής της τάσης του νήματος είναι:

$$W_T=\Sigma\tau\cdot\theta \quad ή \quad W_T=400\,J$$

ΘΕΜΑ 29^{O}

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο ΑΓ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η δύναμη $\vec F$ που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση γενικά έχει τυχαία διεύθυνση. Τη σχεδιάζουμε λοιπόν με τυχαία γωνία και η ακριβής κατεύθυνσή της προκύπτει από τα πρόσημα των ορθογώνιων συνιστωσών της F_x και F_y.

Για την ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)}=0 \quad ή \quad \tau_F+\tau_{m_1g}+\tau_T+\tau_{m_2g}=0 \quad ή \quad -m_1g\frac{L}{2}+TημφL-m_2gL=0 \quad ή$$

39

$$m_2 = \frac{Τημφ}{g} - \frac{m_1}{2} \quad ή \quad m_2 = \frac{200\,N \cdot \frac{1}{2}}{10\,m/s^2} - \frac{10\,kg}{2} \quad ή \quad \boxed{m_2 = 5\,kg}$$

Επίσης για την ισορροπία της ράβδου ισχύουν:

$$ΣF_x = 0 \quad ή \quad F_x = Τσυνφ \quad ή \quad F_x = 200\,N\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ή \quad F_x = 100\sqrt{3}\,N$$

και

$$ΣF_y = 0 \quad ή \quad F_y + Τημφ - m_1 g - m_2 g = 0 \quad ή \quad F_y = 50\,N$$

Είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad ή \quad \boxed{F = 50\sqrt{13}\,N} \quad και \quad εφθ = \frac{F_y}{F_x} \quad ή \quad \boxed{εφθ = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

β. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σ' αυτήν που διέρχεται από το άκρο της Α, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner είναι:

$$I_1 = I_{cm} + m_1\frac{L^2}{4} \quad ή \quad I_1 = \frac{1}{12}m_1 L^2 + \frac{1}{4}m_1 L^2 \quad ή \quad I_1 = \frac{1}{3}m_1 L^2$$

Άρα η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος – μάζα m_2 ως προς άξονα που διέρχεται απ' το άκρο Α είναι:

$$I_Σ = I_1 + I_2 \quad ή \quad I_Σ = \frac{1}{3}m_1 L^2 + m_2 L^2 \quad ή \quad I_Σ = 3\,kg\,m^2$$

Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση έχουμε:

$$Στ_{(A)} = I_Σ α_{γων} \quad ή \quad m_1 g\frac{L}{2} + m_2 g L = I_Σ α_{γων} \quad ή \quad \boxed{α_{γων} = 20\,rad/s^2}$$

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα ράβδος – μάζα m_2, θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια $(U = 0)$ το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την κατώτερη θέση της μάζας m_2:

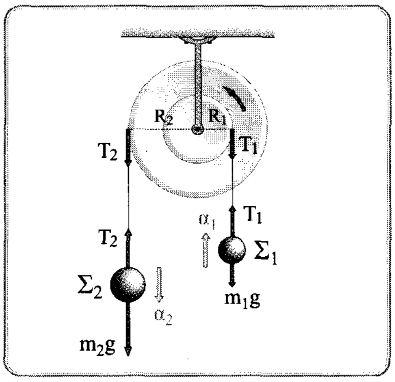
$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \quad ή \quad m_1 g L + m_2 g L = m_1 g\frac{L}{2} + \frac{1}{2}I_1 ω^2 + \frac{1}{2}m_2 υ^2 \quad ή$$

$$\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)gL = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1 L^2 ω^2 + \frac{1}{2}m_2 ω^2 L^2 \quad ή \quad ω = 2\sqrt{10}\,rad/s$$

Η ταχύτητα της μάζας m_2, όταν η ράβδος γίνεται κατακόρυφη είναι:

$$υ = ωL \quad ή \quad υ = 2\sqrt{10}\,s^{-1} \cdot 0{,}6\,m \quad ή \quad \boxed{υ = 1{,}2\sqrt{10}\,m/s}$$

ΘΕΜΑ 30ο



α. Η ροπή αδράνειας I της διπλής τροχαλίας είναι:

$$I = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 \quad \text{ή} \quad I = 4\,\text{kgm}^2$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα χωριστά έχουμε:

- Σώμα $Σ_1$: $ΣF_1 = m_1α_1$ ή

$$T_1 - m_1g = m_1α_1 \xrightarrow{α_1 = α_{γων}R_1}$$

$$T_1 = m_1g + m_1α_{γων}R_1 \qquad (1)$$

- Σώμα $Σ_2$: $ΣF_2 = m_2α_2$ ή

$$m_2g - T_2 = m_2α_2 \xrightarrow{α_2 = α_{γων}R_2}$$

$$T_2 = m_2g - m_2α_{γων}R_2 \qquad (2)$$

Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας έχουμε:

$$Στ = Iα_{γων} \quad \text{ή} \quad T_2R_2 - T_1R_1 = Iα_{γων} \qquad (3)$$

Η σχέση (3) λόγω των (1) και (2) γίνεται:

$$(m_2g - m_2α_{γων}R_2)R_2 - (m_1g + m_1α_{γων}R_1)R_1 = Iα_{γων}$$

$$\text{ή} \quad α_{γων} = \frac{(m_2R_2 - m_1R_1)g}{I + m_2R_2^2 + m_1R_1^2} \quad \text{ή}$$

$$α_{γων} = 5\,\text{rad/s}^2$$

Οι επιταχύνσεις των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι:

- $Σ_1$: $α_1 = α_{γων}R_1$ ή $α_1 = 2{,}5\,\text{m/s}^2$
- $Σ_2$: $α_2 = α_{γων}R_2$ ή $α_2 = 5\,\text{m/s}^2$

β. Οι τάσεις των νημάτων είναι:

- Από (1): $T_1 = 100\,\text{N}$
- Από (2): $T_2 = 70\,\text{N}$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας υπολογίζεται από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση στη γενικότερη διατύπωσή του:

$$\frac{ΔL}{Δt} = Στ \quad \text{ή} \quad \frac{ΔL}{Δt} = Iα_{γων} \quad \text{ή} \quad \frac{ΔL}{Δt} = 4\,\text{kgm}^2 \cdot 5\,\text{s}^{-2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{ΔL}{Δt} = 20\,\text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

Στην περίπτωση της διπλής τροχαλίας όλα τα σημεία του εσωτερικού και του εξωτερικού δίσκου έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και την ίδια γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων}$, αφού οι δίσκοι είναι κολλημένοι. Η επιτρόχιος επιτάχυνση $α_ε$ καθενός σημείου της περιφέρειας ενός δίσκου ακτίνας R συνδέεται με τη γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων}$ με τη σχέση:

$$α_ε = α_{γων}R$$

Η επιτάχυνση α της μεταφορικής κίνησης καθενός σώματος που δένεται στο άκρο του νήματος είναι ίση με την αντίστοιχη επιτρόχιο επιτάχυνση $α_ε$. Δηλαδή είναι:

$$α = α_{γων}R$$

Αυτό συμβαίνει με την προϋπόθεση ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.
Αντίστοιχα ισχύουν για τη γραμμική ταχύτητα υ με τη γωνιακή ταχύτητα ω. Δηλαδή είναι:

$$υ = ωR$$

δ. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}2\,s$ η τροχαλία έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \quad ή \quad \omega = 5\,rad/s^2 \cdot 0{,}2\,s \quad ή \quad \omega = 1\,rad/s$$

Η στροφορμή της τροχαλίας είναι:

$$L_{\tau\rho} = I\omega \quad ή \quad L_{\tau\rho} = 4\,kg\,m^2 \cdot 1\,s^{-1} \quad ή \quad \mathbf{L_{\tau\rho} = 4\,kg\,m^2/s}$$

Οι ταχύτητες υ_1, υ_2 των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα είναι:

$$\upsilon_1 = \omega R_1 \quad ή \quad \upsilon_1 = 0{,}5\,m/s \quad και \quad \upsilon_2 = \omega R_2 \quad ή \quad \upsilon_2 = 1\,m/s$$

Η στροφορμή του συστήματος είναι:

$$L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = L_{\tau\rho} + L_1 + L_2 \quad ή \quad L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = L_{\tau\rho} + m_1\upsilon_1 R_1 + m_2\upsilon_2 R_2 \quad ή \quad \mathbf{L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 20\,kg\,m^2/s}$$

ε. Το σώμα Σ_2 κατεβαίνει από την αρχική του θέση κατά h_2 σε χρόνο t. Είναι:

$$h_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 \qquad (4)$$

Στον ίδιο χρόνο t το σώμα Σ_1 ανεβαίνει από την αρχική του θέση h_1. Είναι:

$$h_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \qquad (5)$$

Είναι $H = h_1 + h_2$ ή λόγω των (4) και (5):

$$H = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \quad ή \quad t = \sqrt{\frac{2H}{\alpha_2 + \alpha_1}} \quad ή \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 10^{-2}\,m}{7{,}5\,m/s^2}} \quad ή \quad t = 0{,}4\,s$$

Οι ταχύτητες υ_1, υ_2 των σωμάτων Σ_1, Σ_2 τη χρονική στιγμή t αντίστοιχα είναι:

$$\upsilon_1 = \alpha_1 t \quad ή \quad \upsilon_1 = 1\,m/s \quad και \quad \upsilon_2 = \alpha_2 t \quad ή \quad \upsilon_2 = 2\,m/s$$

Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad ή \quad \omega = 5\,rad/s^2 \cdot 0{,}4\,s \quad ή \quad \omega = 2\,rad/s$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος τη χρονική στιγμή t είναι:

$$K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = K_{\tau\rho o\chi} + K_1 + K_2 \quad ή \quad K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \quad ή \quad \mathbf{K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 40\,J}$$

ΘΕΜΑ 31^Ο^

α. Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner η ροπή αδράνειας της ράβδου ΑΒ ως προς τον άξονα Ο είναι:

$$I_{AB} = I_{AB,\,cm} + M(2L)^2 \quad ή \quad I_{AB} = \frac{1}{12}ML^2 + 4ML^2 \quad ή \quad I_{AB} = \frac{49}{12}ML^2 \qquad (1)$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ΟΚ ως προς άξονα κάθετο σ' αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι:

$$I_{OK,cm} = \frac{1}{12}2M \cdot (2L)^2 \quad ή \quad I_{OK,cm} = \frac{2}{3}ML^2 \qquad (2)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner η ροπή αδράνειας της ράβδου ΟΚ ως προς τον άξονα Ο είναι:

42

$$I_{OK} = I_{OK,\,cm} + 2ML^2$$

ή λόγω της (2):

$$I_{OK} = \frac{2}{3}ML^2 + 2ML^2 \quad ή \quad I_{OK} = \frac{8}{3}ML^2 \qquad (3)$$

Η ροπή αδράνειας I του συστήματος των δύο ράβδων ως προς τον άξονα Ο είναι:

$$I = I_{AB} + I_{OK}$$

ή λόγω των (1) και (3):

$$I = \frac{49}{12}ML^2 + \frac{8}{3}ML^2 \quad ή \quad I = \frac{73}{12}ML^2$$

Όταν δύο στερεά στρέφονται μαζί, τότε η ροπή αδράνειας I του συστήματός τους είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας I_1 και I_2 καθενός στερεού ξεχωριστά, μετρημένων ως προς τον κοινό άξονα περιστροφής. Δηλαδή:

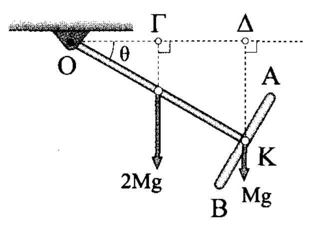
$$I = I_1 + I_2$$

β. Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για το σύστημα των ράβδων έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{γων} \quad ή \quad 2Mg(ΟΓ) + Mg(ΟΔ) = \frac{73}{12}ML^2\alpha_{γων}$$

$$ή \quad 2gLσυνθ + g2Lσυνθ = \frac{73}{12}L^2\alpha_{γων} \quad ή$$

$$\alpha_{γων} = \frac{36gσυνθ}{73L}$$



γ. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη ράβδο ΑΒ όταν βρίσκεται οριζόντια στην κατώτερή της θέση, έχουμε:

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \quad ή$$

$$2Mg2L + Mg2L = 2MgL + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ή$$

$$4MgL = \frac{1}{2}\cdot\frac{73}{12}ML^2\omega^2 \quad ή$$

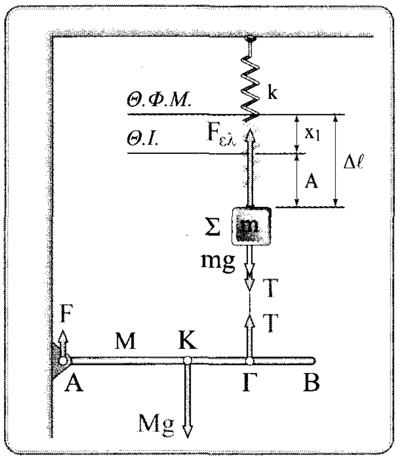
$$\omega = 4\sqrt{\frac{6g}{73L}}$$

*Η δυναμική ενέργεια U ενός στερεού σώματος μάζας Μ υπολογίζεται από τη σχέση U = = Mgh, όπου h είναι η απόσταση του **κέντρου μάζας** του σώματος από το επίπεδο αναφοράς – μηδενικής δυναμικής ενέργειας που έχουμε θεωρήσει. Εννοείται ότι αν το κέντρο μάζας του σώματος βρεθεί **κάτω** από το επίπεδο αναφοράς η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι **αρνητική**.*

43

ΘΕΜΑ 32^{O}

Α. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται τόσο στη ράβδο ΑΒ όσο και στο σώμα Σ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Για την ισορροπία της ράβδου ΑΒ είναι:



$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \quad ή \quad -Mg\frac{L}{2} + T\frac{3L}{4} = 0 \quad ή \quad T = \frac{2Mg}{3} \quad ή$$

$$T = \frac{2 \cdot 3\,kg \cdot 10\,m/s^2}{3} \quad ή \quad \boxed{T = 20\,N}$$

β. Για την ισορροπία του σώματος Σ είναι:

$$\Sigma F = 0 \quad ή \quad F_{ελ} = mg + T \quad ή \quad F_{ελ} = 30\,N$$

Από το νόμο Hooke έχουμε:

$$F_{ελ} = k\Delta\ell \quad ή \quad k = \frac{F_{ελ}}{\Delta\ell} \quad ή \quad \boxed{k = 100\,N/m}$$

Β. α. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ΔL/Δt υπολογίζεται με εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου για τη στροφική κίνηση στη γενικότερη διατύπωσή του.

i. Όταν η ράβδος είναι οριζόντια, ροπή ως προς το Α έχει μόνο το βάρος της. Δηλαδή:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau \quad ή \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = Mg\frac{L}{2} \quad ή \quad \boxed{\frac{\Delta L}{\Delta t} = 15\,kg\,m^2/s^2}$$

> **!** *Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει ανεξάρτητα από το αν η γωνιακή επιτάχυνση έχει σταθερό ή όχι μέτρο.*

ii. Όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη, η διεύθυνση του βάρους της ράβδου διέρχεται από το Α, οπότε η ροπή του βάρους είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς:

$$\boxed{\frac{\Delta L}{\Delta t_1} = 0}$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για τη στροφική κίνηση της ράβδου από την αρχική – οριζόντια θέση της μέχρι την τελική – κατακόρυφη θέση της. Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς (U = 0) το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο μάζας της ράβδου, όταν γίνεται κατακόρυφη.

Α.Δ.Ε.: $U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ}$ ή

$$Mg\frac{L}{2} + 0 = 0 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ή$$

$$MgL = I\omega^2 \qquad (1)$$

> **!** *Όταν η περιστροφή μιας ράβδου ως προς άξονα γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο με την επίδραση της ροπής του βάρους, η κίνηση **δεν** είναι ομαλά επιταχυνόμενη, γιατί η ροπή του βάρους συνεχώς μεταβάλλεται. Στην περίπτωση αυτή για τον*

44

Από το θεώρημα Steiner υπολογίζουμε την ροπή αδράνειας I της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της A:

$$I = I_{cm} + M\frac{L^2}{4} \quad ή \quad I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{ML^2}{4} \quad ή$$

$$I = \frac{1}{3}ML^2 \qquad (2)$$

υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας ω της ράβδου, ***δεν*** *χρησιμοποιούμε τύπους της ομαλά μεταβαλλόμενης στροφικής κίνησης, αλλά την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.*

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$MgL = \frac{1}{3}ML^2\omega^2 \quad ή \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad ή \quad \omega = \sqrt{\frac{3\cdot 10\,m/s^2}{0{,}3\,m}} \quad ή \quad \omega = 10\,rad/s$$

Η στροφορμή L της ράβδου όταν γίνεται κατακόρυφη είναι:

$$L = I\omega \quad ή \quad L = \frac{1}{3}ML^2\omega \quad ή \quad L = \frac{1}{3}\cdot 3\,kg\cdot 1^2\,m^2\cdot 10\,s^{-1} \quad ή \quad L = 10\,kg\,m^2/s$$

γ. Η θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) του σώματος Σ απέχει από τη θέση που ορίζει το φυσικό μήκος του ελατηρίου (ΘΦΜ) απόσταση x_1. Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Σ μετά το κόψιμο του νήματος έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \quad ή \quad F'_{ελ} - mg = 0 \quad ή \quad kx_1 = mg \quad ή \quad x_1 = 0{,}1\,m$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με την απόσταση της κάτω ακραίας θέσης της ταλάντωσης από τη θέση ισορροπίας, δηλαδή είναι:

$$A = \Delta\ell - x_1 \quad ή \quad A = 0{,}3\,m - 0{,}1\,m \quad ή \quad A = 0{,}2\,m$$

Από τη σχέση της σταθεράς επαναφοράς $k = m\omega^2$ υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ή \quad \omega = \sqrt{\frac{100\,N/m}{1\,kg}} \quad ή \quad \omega = 10\,rad/s$$

Επειδή την $t = 0$ είναι $x_{αρχ} = -A$ έχουμε:

$$A\eta\mu\varphi_0 = -A \quad ή \quad \eta\mu\varphi_0 = -1 \quad ή \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\,rad$$

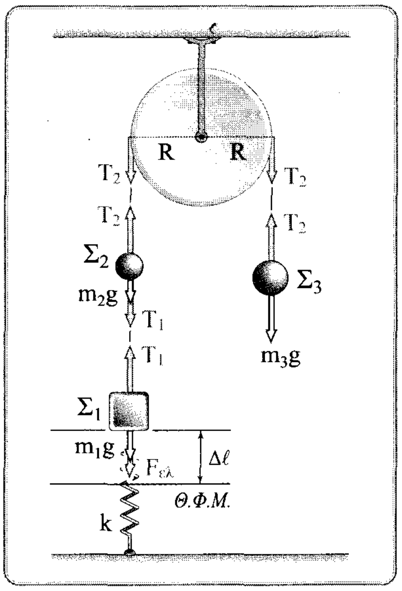
Συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσης $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ με αντικατάσταση των τιμών είναι:

$$x = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

ΘΕΜΑ 33^{o}

α. Στο σώμα $Σ_3$ ασκούνται οι δυνάμεις: Τάση νήματος T_2 και βάρος του m_3g. Για την ισορροπία του είναι:

$$ΣF = 0 \quad ή \quad T_2 - m_3g = 0 \quad ή \quad T_2 = 50\,N$$



Κατά την ισορροπία της τροχαλίας η τάση του νήματος που διέρχεται από το αυλάκι της και συνδέει τα σώματα $Σ_2$ και $Σ_3$ είναι η ***ίδια***. *Αυτό επιβάλλει η συνθήκη ισορροπίας $Στ = 0$ για την τροχαλία. Δηλαδή:*

$$TR = T'R \quad ή \quad T = T'$$

Όταν η τροχαλία μπει σε επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, μετά το κόψιμο του νήματος, προφανώς είναι $Στ \neq 0$ και η τάση του νήματος έχει διαφορετική τιμή στο ένα άκρο της απ' ότι στο άλλο.

Στο σώμα $Σ_2$ ασκούνται οι δυνάμεις: Τάση του πάνω νήματος T_2, τάση του κάτω νήματος T_1 και το βάρος του m_2g. Για την ισορροπία του είναι:

$$ΣF = 0 \quad ή \quad T_1 + m_2g - T_2 = 0 \quad ή \quad T_1 = T_2 - m_2g \quad ή \quad T_1 = 30\,N$$

Στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται οι δυνάμεις: Τάση του νήματος T_1, η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ} = kΔ\ell$ και το βάρος του m_1g. Για την ισορροπία του είναι:

$$ΣF = 0 \quad ή \quad T_1 - F_{ελ} - m_1g = 0 \quad ή \quad kΔ\ell = T_1 - m_1g \quad ή \quad k = 100\,N/m$$

β. Μετά το κόψιμο του νήματος στα σώματα $Σ_2$ και $Σ_3$ ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Τα δύο σώματα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση α. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

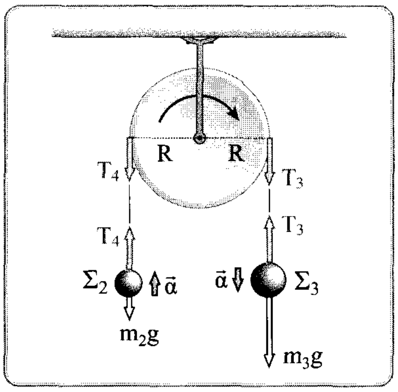
Σώμα $Σ_3$: $\quad ΣF_3 = m_3α \quad ή \quad m_3g - T_3 = m_3α \qquad (1)$

Σώμα $Σ_2$: $\quad ΣF_2 = m_2α \quad ή \quad T_4 - m_2g = m_2α \qquad (2)$

Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας έχουμε:

$$Στ = Iα_{γων} \quad ή$$

$$T_3R - T_4R = \frac{1}{2}MR^2\frac{α}{R} \quad ή \quad T_3 - T_4 = \frac{1}{2}Mα \qquad (3)$$



Προσθέτουμε τις σχέσεις (1), (2) και (3) κατά μέλη και παίρνουμε:

$$m_3g - m_2g = \left(m_3 + m_2 + \frac{M}{2}\right)\alpha \quad \acute{\eta} \quad \alpha = \frac{(m_3 - m_2)g}{m_3 + m_2 + \frac{M}{2}} \quad \acute{\eta} \quad \alpha = \frac{15}{4}\,\mathrm{m/s^2}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha}{R} \quad \acute{\eta} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\frac{14}{5}\,\mathrm{m/s^2}}{0,5\,\mathrm{m}} \quad \acute{\eta} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 7,5\,\mathrm{rad/s^2}$$

γ. Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}t \quad \acute{\eta} \quad \omega = 7,5\,\mathrm{s^{-2}} \cdot \frac{\pi}{60}\,\mathrm{s} \quad \acute{\eta} \quad \omega = \frac{\pi}{8}\,\mathrm{rad/s}$$

Το σώμα Σ_1 μετά το κόψιμο του νήματος εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω', που υπολογίζεται από τη σχέση:

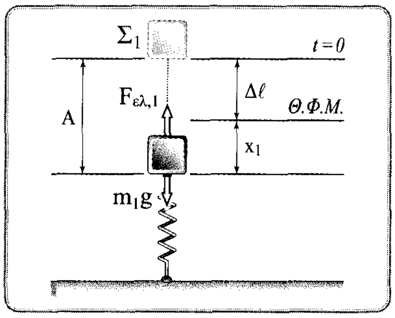
$$k = m_1\omega'^2 \quad \acute{\eta} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \acute{\eta} \quad \omega' = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{N/m}}{1\,\mathrm{kg}}} \quad \acute{\eta} \quad \omega' = 10\,\mathrm{rad/s}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του είναι:

$$x_{\alpha\rho\chi} = +A \quad \acute{\eta} \quad A\eta\mu\varphi_0 = A \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\varphi_0 = 1 \quad \acute{\eta} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$$

Η θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 απέχει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου απόσταση x_1. Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \quad \acute{\eta} \quad kx_1 = m_1g \quad \acute{\eta} \quad x_1 = 0,1\,\mathrm{m}$$



Το πλάτος A της ταλάντωσης ισούται με την απόσταση της πάνω ακραίας θέσης της ταλάντωσης από τη θέση ισορροπίας. Δηλαδή:

$$A = \Delta\ell + x_1 \quad \acute{\eta} \quad A = 0,2\,\mathrm{m} + 0,1\,\mathrm{m} \quad \acute{\eta} \quad A = 0,3\,\mathrm{m}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος Σ_1 είναι:

$$\upsilon = \omega' A\sigma\upsilon\nu(\omega' t + \varphi_0)$$

Με αντικατάσταση των τιμών στο σύστημα S.I. υπολογίζουμε τη ζητούμενη ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = 10\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 0,3\,\mathrm{m} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10 \cdot \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{2}\right) \quad \acute{\eta} \quad \upsilon_1 = 3\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{m/s} \quad \acute{\eta} \quad \upsilon_1 = -1,5\,\mathrm{m/s}$$

ΘΕΜΑ 35^Ο

α. Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού στη θέση Γ είναι:

$$\omega_\Gamma = 2\pi f_\Gamma \quad \acute{\eta} \quad \omega_\Gamma = 2\pi \cdot \frac{10}{\pi}\,\mathrm{s^{-1}} \quad \acute{\eta} \quad \omega_\Gamma = 20\,\mathrm{rad/s}$$

Η κύλιση του τροχού είναι ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε ισχύει:

$$\omega_\Gamma = \alpha_{\gamma\omega\nu}t \quad \acute{\eta} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_\Gamma}{t} \quad \acute{\eta} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{20\,\mathrm{s^{-1}}}{5\,\mathrm{s}} \quad \acute{\eta} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4\,\mathrm{rad/s^2}$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κύλιση του τροχού στο τεταρτοκύκλιο από τη θέση Γ στην ψηλότερη θέση Ζ:

$$U_Γ + K_Γ = U_Z + K_Z \quad ή \quad \frac{1}{2}Iω_Γ^2 + \frac{1}{2}mυ_{cm,Γ}^2 = mgh \quad ή$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\frac{υ_{cm,Γ}^2}{R^2} + \frac{1}{2}mυ_{cm,Γ}^2 = mgh \quad ή \quad υ_{cm,Γ} = \sqrt{\frac{4gh}{3}} \quad ή \quad υ_{cm,Γ} = 2\,m/s$$

γ. Στα πλαίσια της διατήρησης της ενέργειας η προσφερθείσα ενέργεια μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ στον τροχό είναι ίση με την τελική δυναμική ενέργεια του τροχού στη θέση Ζ. Δηλαδή:

$$W_F = mgh \quad ή \quad W_F = 30J$$

δ. Ο τροχός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο, οπότε ισχύει:

$$υ_{cm} = α_{cm}t \quad ή \quad α_{cm} = \frac{υ_{cm}}{t} \quad ή \quad α_{cm} = \frac{2\,m/s}{5\,s} \quad ή \quad α_{cm} = 0{,}4\,m/s^2$$

Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του τροχού στο οριζόντιο επίπεδο έχουμε:

$$Στ = Iα_{γων} \quad ή \quad T_{στ}R = \frac{1}{2}MR^2\frac{α_{cm}}{R} \quad ή \quad T_{στ} = \frac{1}{2}Mα_{cm} \qquad (1)$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο έχουμε:

$$ΣF = mα_{cm} \quad ή \quad F - T_{στ} = mα_{cm}$$

ή λόγω της (1):

$$F - \frac{1}{2}mα_{cm} = mα_{cm} \quad ή \quad F = \frac{3}{2}mα_{cm} \qquad (2)$$

Αν διαιρέσουμε τις σχέσεις (2) και (1) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{F}{T_{στ}} = 3$$

ε. Ο ρυθμός με τον οποίο παράγει έργο η δύναμη $\vec{F}$ στο σημείο Γ είναι:

$$\frac{ΔW_F}{Δt} = \frac{FΔx}{Δt} \quad ή \quad \frac{ΔW_F}{Δt} = Fυ_{cm,Γ}$$

ή λόγω της (2):

$$\frac{ΔW_F}{Δt} = \frac{3}{2}mα_{cm}\cdot υ_{cm,Γ} \quad ή \quad \frac{ΔW_F}{Δt} = 12\,J/s$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγει έργο η ροπή της στατικής τριβής στο σημείο Γ είναι:

$$\frac{ΔW_T}{Δt} = τ_Tω_Γ \quad ή \quad \frac{ΔW_T}{Δt} = Iα_{γων}ω_Γ \quad ή \quad \frac{ΔW_T}{Δt} = \frac{1}{2}mR^2α_{γων}ω \quad ή$$

$$\frac{ΔW_T}{Δt} = \frac{1}{2}mυ_{cm,Γ}α_{cm} \quad ή \quad \frac{ΔW_T}{Δt} = 4\,J/s$$

48

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού ως προς τον άξονά του στο σημείο Γ υπολογίζεται, αν εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση στη γενικότερη διατύπωσή του, δηλαδή:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau \quad ή \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = I\alpha_{γων} \quad ή \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{γων} \qquad (3)$$

Κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει $\alpha_{cm} = \alpha_{γων}R$. Από την τελευταία σχέση υπολογίζουμε την ακτίνα R του τροχού:

$$R = \frac{\alpha_{cm}}{\alpha_{γων}} \quad ή \quad R = \frac{0,4\,m/s^2}{4\,rad/s^2} \quad ή \quad R = 0,1\,m$$

Από τη σχέση (3) με αντικατάσταση των τιμών στο S.I. βρίσκουμε το ζητούμενο ρυθμό παραγωγής έργου:

$$\frac{\Delta W_T}{\Delta t} = 0,2\,J/s$$

Το έργο μιας δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται και με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ):

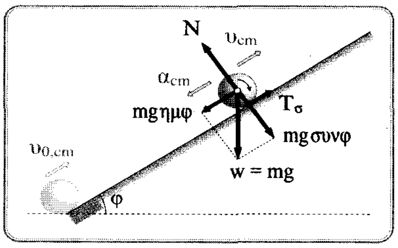
$$W_{\Sigma F} = K_{τελ} - K_{αρχ} \quad ή$$

$$W_F + W_T = (K_{στροφ} + K_{μεταφ})_{τελ} - (K_{στροφ} + K_{μεταφ})_{αρχ}$$

*Το **έργο της στατικής τριβής** W_T σε όλες τις ασκήσεις με κύλιση του σώματος χωρίς ολίσθηση είναι ίσο με μηδέν, καθώς δεν μετατοπίζεται το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της.*

ΘΕΜΑ 36^Ο

α. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, εκτελώντας επιβραδυνόμενη κίνηση. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι το βάρος της $w = mg$, η στατική τριβή $T_σ$ και η κάθετος αντίδραση N. Η στατική τριβή $T_σ$ έχει φορά προς τα πάνω, έτσι ώστε η ροπή της ως προς τον άξονα περιστροφής της σφαίρας να συντελεί στη μείωση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας ω_0. Για την κύλιση ισχύει:



$$\upsilon_{0,cm} = \omega_0 R \quad ή \quad \omega_0 = \frac{\upsilon_{0,cm}}{R} \quad ή \quad \omega_0 = \frac{8\,m/s}{0,1\,m} \quad ή \quad \omega_0 = 80\,rad/s$$

β. Από το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \quad ή \quad mgημφ - T_σ = m\alpha_{cm} \qquad (1)$$

Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση της σφαίρας έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{γων} \quad ή$$

$$T_σ R = \frac{2}{5}mR^2\alpha_{γων} \xrightarrow{\left(\alpha_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R}\right)} T_σ = \frac{2}{5}m\alpha_{cm} \qquad (2)$$

Αν προσθέσουμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$mgημφ = \frac{7}{5}m\alpha_{cm} \quad ή \quad \alpha_{cm} = \frac{5}{7}gημφ \quad ή$$

$$\alpha_{cm} = \frac{5}{7}\cdot 10\,m/s^2 \cdot 0,56 \quad ή \quad \alpha_{cm} = 4\,m/s^2$$

Όταν η σφαίρα κυλίεται σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει με την επίδραση του βάρους της $\vec{w}$, της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$ από το επίπεδο και της στατικής τριβής $\vec{T}_σ$, τότε η στατική τριβή $\vec{T}_σ$ έχει φορά προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, ανεξάρτητα αν η σφαίρα ανεβαίνει ή κατεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο.

γ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής υπολογίζεται, αν εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικότερη διατύπωσή του:

$$\left|\frac{\Delta L}{\Delta t}\right| = \Sigma\tau \quad ή \quad \left|\frac{\Delta L}{\Delta t}\right| = I\alpha_{γων} \quad ή$$

$$\left|\frac{\Delta L}{\Delta t}\right| = \frac{2}{5}mR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \quad ή \quad \left|\frac{\Delta L}{\Delta t}\right| = 1{,}6\,kg\,m^2/s^2$$

δ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κύλιση της σφαίρας:

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \quad ή$$

$$0+\frac{1}{2}m\upsilon_{0,cm}^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2 = mgh+\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \xrightarrow[I=\frac{2}{5}mR^2]{\omega=\frac{\upsilon_{cm}}{R}}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{0,cm}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\frac{\upsilon_{0,cm}^2}{R^2} =$$

$$= mgh+\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\frac{\upsilon_{cm}^2}{R^2} \quad ή$$

$$\frac{7}{5}\upsilon_{0,cm}^2 = 2gh+\frac{7}{5}\upsilon_{cm}^2 \quad ή \quad \upsilon_{cm} = \sqrt{\upsilon_{0,cm}^2-\frac{10}{7}gh} \qquad (3)$$

Επειδή η κύλιση χωρίς ολίσθηση της σφαίρας πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο είναι ομαλά επιβραδυνόμενη ο υπολογισμός της τελικής ταχύτητάς της μπορεί να γίνει και με χρήση των τύπων της κινηματικής:

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha_{γων}t_1 \quad και$$

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\alpha_{γων}t_1^2$$

Αν απαλείψουμε το χρόνο στις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\alpha_{γων}\theta_1 \qquad (1)$$

Όταν η σφαίρα έχει διαγράψει N_1 στροφές, επειδή σε μία στροφή διαγράφει γωνία 2π rad, η γωνία στροφής θ_1 είναι:

$$\theta_1 = N_1\cdot 2\pi \qquad (2)$$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\frac{\alpha_{cm}}{R}\cdot N_1\cdot 2\pi}$$

50

Το διάστημα S που διανύει η σφαίρα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο μετά από Ν στροφές είναι:

$$S = N\cdot 2\pi R \quad ή \quad S = \frac{30}{\pi}\cdot 2\pi\cdot 0{,}1\,m \quad ή \quad S = 6\,m$$

Το ύψος h στο οποίο έχει ανέβει είναι:

$$h = S ημφ \quad ή \quad h = 6\,m\cdot 0{,}56 \quad ή \quad h = 3{,}36\,m$$

Με αντικατάσταση των τιμών στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$\upsilon_{cm} = 4\,m/s$$

ΘΕΜΑ 37^Ο

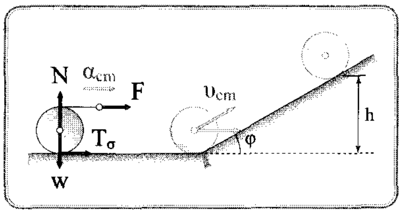
α. Ο λόγος της στροφικής προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι:

$$\frac{K_{ΣΤΡΦ}}{K_{ΜΤΦ}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2} \quad ή \quad \frac{K_{ΣΤΡΦ}}{K_{ΜΤΦ}} = \frac{\frac{1}{2}MR^2\omega^2}{M\upsilon_{cm}^2} \quad ή \quad \frac{K_{ΣΤΡΦ}}{K_{ΜΤΦ}} = \frac{R^2\omega^2}{2\upsilon_{cm}^2}$$

Κατά την κύλιση όμως χωρίς ολίσθηση ισχύει $\upsilon_{cm} = \omega R$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{K_{ΣΤΡΦ}}{K_{ΜΤΦ}} = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2\upsilon_{cm}^2} \quad ή \quad \frac{K_{ΣΤΡΦ}}{K_{ΜΤΦ}} = \frac{1}{2}$$

β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο κατά την κίνησή του στο οριζόντιο επίπεδο φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου μάζας του κυλίνδρου προκύπτει η ίδια, είτε η στατική τριβή σχεδιαστεί με την κατεύθυνση του σχήματος, είτε την αντίθετη. Η σωστή κατεύθυνση της στατικής τριβής προκύπτει με βάση το πρόσημό της κατά τον υπολογισμό της από τη σχέση (1) ή τη σχέση (2).

Από το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \quad \text{ή} \quad F + T_\sigma = M\alpha_{cm} \qquad (1)$$

Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad FR - T_\sigma R = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \quad \text{ή} \quad F - T_\sigma = \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$2F = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = \frac{4F}{3M} \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = \frac{4\cdot 9\,N}{3\cdot 6\,kg} \quad \text{ή} \quad \alpha_{cm} = 2\,m/s^2$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου την $t = 2\,s$ είναι:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t \quad \text{ή} \quad \upsilon_{cm} = 2\,m/s^2\cdot 4\,s \quad \text{ή} \quad \upsilon_{cm} = 8\,m/s$$

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κύλιση του κυλίνδρου στο κεκλιμένο επίπεδο:

$$U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad 0 + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh + 0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_{cm}^2}{R^2} = Mgh \quad \text{ή} \quad h = \frac{3\upsilon_{cm}^2}{4g} \quad \text{ή} \quad h = 4{,}8\,m$$

*ΘΕΜΑ 38^Ο^*

α. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής κατά την κρούση:

$$\vec{L}_{\Pi P I N} = \vec{L}_{META} \quad \text{ή} \quad I\omega_0 - m\upsilon R = (I + mR^2)\omega \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0 - m\upsilon R = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega \quad \text{ή}$$

$$\omega = \frac{MR\omega_0 - 2m\upsilon}{(M + 2m)R} \quad \text{ή} \quad \omega = 4\,rad/s$$

Η στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων παραμένει σταθερή, αν στο σύστημα των σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ή αν ασκούνται να έχουν συνισταμένη ροπή ίση με μηδέν:

β. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔΚ του συστήματος είναι:

$$\Delta K = K_{ΜΕΤΑ} - K_{ΠΡΙΝ} \quad ή$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2 - \left(\frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2\right) \quad ή$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2\right) \quad ή$$

$$\boxed{\Delta K = -45\,J}$$

> $\vec{L}_{ΠΡΙΝ} = \vec{L}_{ΜΕΤΑ}$, αν $\Sigma\vec{\tau}_{εξωτ} = 0$
>
> *Η στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων υπολογίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων του συστήματος με την προϋπόθεση ότι είναι συγγραμμικά διανύσματα:*
>
> $L_{συστ} = L_1 \pm L_2$

(Το (–) οφείλεται στην απώλεια κινητικής ενέργειας σε θερμότητα κατά την κρούση.)

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την κατώτερη θέση του στόκου μάζας m:

$$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \quad ή \quad mg2R + \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2 = 0 + \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega'^2 \quad ή$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{4mgR + \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}} \quad ή \quad \boxed{\omega' = 4\sqrt{2}\ rad/s}$$

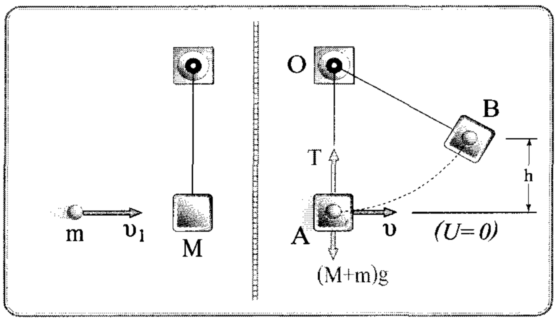
ΘΕΜΑ 40^{Ο}

Α. α. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ) για την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση Α στη θέση Β όπου σταματά στιγμιαία:

$$ΑΔΜΕ_{(Α \to Β)}: \quad U_A + K_A = U_B + K_B \quad ή$$

$$\frac{1}{2}(M + m)\upsilon^2 = (M + m)gh \quad ή$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh} \quad ή \quad \upsilon = 4\ m/s$$



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής κατά την πλαστική κρούση:

$$\vec{P}_{ΠΡΙΝ} = \vec{P}_{ΜΕΤΑ} \quad ή \quad m\upsilon_1 = (M + m)\upsilon \quad ή$$

$$\upsilon_1 = \frac{(M + m)\upsilon}{m} \quad ή \quad \boxed{\upsilon_1 = 20\,m/s}$$

> *Η **αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας**:*
>
> $$U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ}$$
>
> *εφαρμόζεται όταν κατά την κίνηση του σώματος ασκούνται στο σώμα μόνο συντηρητικές δυνάμεις. Αν ασκούνται μη συντηρητικές δυνάμεις θα πρέπει το έργο τους να είναι μηδέν.*
>
> *Το έργο μιας δύναμης που είναι **κάθετη** στη μετατόπιση του σώματος είναι μηδέν. Για παράδειγμα κατά την κυκλική κίνηση ενός σώματος με τη βοήθεια τεντωμένου νήματος, το έργο της τάσης του νήματος είναι μηδέν, γιατί η τάση του νήματος είναι συνεχώς κάθετη σε κάθε στοιχειώδη μετατόπιση του σώματος.*

52

β. Το ποσοστό % απώλειας της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι:

$$\pi = \frac{K_{\Pi P I N} - K_{META}}{K_{\Pi P I N}} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\pi = \left(1 - \frac{K_{META}}{K_{\Pi P I N}}\right) 100\% \quad \text{ή}$$

$$\pi = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_1^2}\right] 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 80\%$$

γ. Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μπαίνει σε κυκλική κίνηση, οπότε η συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση της ακτίνας δρα ως κεντρομόλος. Στο συσσωμάτωμα ασκείται η τάση του νήματος T και το βάρος του $(M+m)g$.

Είναι:

$$\Sigma F_R = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} \quad \text{ή} \quad T - (M+m)g = \frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} \quad \text{ή}$$

$$T = (M+m)\left(g + \frac{\upsilon^2}{\ell}\right) \quad \text{ή}$$

$$T = 90\,N$$

Η απώλεια μηχανικής ενέργειας ($E_{απωλ}$) σε μια πλαστική κρούση και γενικότερα ανελαστική κρούση αφορά μόνο στη μείωση της κινητικής ενέργειας των συγκρουόμενων σωμάτων. Η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια των σωμάτων κατά την κρούση είναι μηδενική καθώς η κρούση θεωρείται ακαριαία και επομένως τα σώματα δεν αλλάζουν θέσεις σε κατακόρυφο επίπεδο κατά την κρούση. Άρα:

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = K_{o\lambda,\pi\rho\iota\nu} - K_{o\lambda,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$$

όπου $K_{ολ,\,πριν}$, $K_{ολ,\,μετά}$ η κινητική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων πριν και μετά την κρούση. Το ποσοστό επί τοις εκατό της κινητικής ενέργειας που χάθηκε κατά την κρούση υπολογίζεται με την απλή μέθοδο των τριών. Προκύπτει ότι:

$$\pi\% = \frac{E_{\alpha\pi\omega\lambda}}{K_{o\lambda,\pi\rho\iota\nu}} \cdot 100\%$$

Β. Αν η κρούση ήταν κεντρική και ελαστική, η ταχύτητα του σώματος μάζας M αμέσως μετά την κρούση θα ήταν:

$$\upsilon' = \frac{2m\upsilon_1}{M+m} \quad \text{ή} \quad \upsilon' = \frac{2 \cdot 1kg \cdot 20\,m/s}{5kg} \quad \text{ή}$$

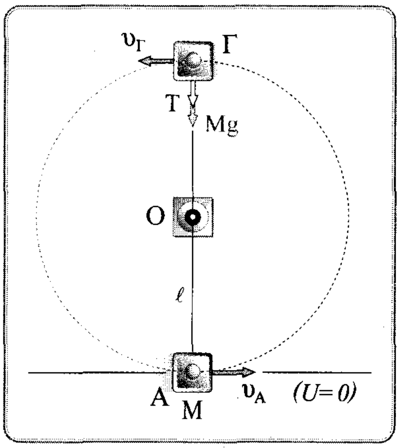
$$\upsilon' = 8\,m/s$$

Το σώμα μάζας M, όταν εκτελεί ανακύκλωση φτάνει στην ψηλότερη θέση Γ της τροχιάς του και διέρχεται με την μικρότερη ταχύτητα $\upsilon_{\Gamma,\,min}$. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση του σώματος μάζας M από τη θέση A στη θέση Γ έχουμε:

$$U_A + K_A = U_\Gamma + K_\Gamma \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}M\upsilon_A^2 = Mg2\ell + \frac{1}{2}M\upsilon_\Gamma^2$$

$$\text{ή} \quad \upsilon_A = \sqrt{4g\ell + \upsilon_\Gamma^2} \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_{A,min} = \sqrt{4g\ell + \upsilon_{\Gamma,min}^2} \qquad (1)$$



Στη θέση Γ η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας δρα ως κεντρομόλος, δηλαδή:

Είναι $\upsilon_\Gamma = \min$, όταν $T = 0$, δηλαδή μόλις το νήμα (οριακά) παύει να είναι τεντωμένο. Στην περίπτωση αυτή είναι μόνο το βάρος που δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$Mg = \frac{M\upsilon^2_{\Gamma,\min}}{\ell} \quad ή \quad \upsilon^2_{\Gamma,\min} = g\ell \qquad (3)$$

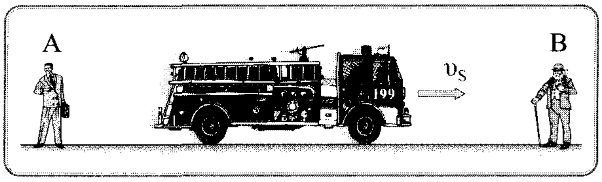
Η σχέση (1) λόγω της (3) γίνεται:

$$\upsilon_{A,\min} = \sqrt{4g\ell + g\ell} \quad ή \quad \upsilon_{A,\min} = \sqrt{5g\ell} \quad ή \quad \boldsymbol{\upsilon_{A,\min} = 10\,m/s}$$

Επειδή είναι $\upsilon' < \upsilon_{A,\min}$, συμπεραίνουμε ότι το σώμα μάζας M δεν μπορεί να εκτελέσει ανακύκλωση.

*ΘΕΜΑ 41^Ο^*

α. Έστω ότι το όχημα της πυροσβεστικής πλησιάζει προς τον παρατηρητή Β και απομακρύνεται από τον παρατηρητή Α.



Στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$$f_B = \frac{\upsilon_{ηχ}}{\upsilon_{ηχ} - \upsilon_S} f_S \qquad (1)$$

και

$$f_A = \frac{\upsilon_{ηχ}}{\upsilon_{ηχ} + \upsilon_S} f_2 \qquad (2)$$

Δίνεται ότι ο ήχος που ακούει ο παρατηρητής Β είναι οξύτερος από τον ήχο που ακούει ο παρατηρητής Α, δηλαδή $f_B > f_A$. Οι σχέσεις (1) και (2) ικανοποιούν αυτό το δεδομένο, συνεπώς η υπόθεση ότι το όχημα πλησιάζει τον παρατηρητή Β είναι σωστή.

β. Διαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\frac{f_B}{f_A} = \frac{\upsilon_{ηχ} + \upsilon_S}{\upsilon_{ηχ} - \upsilon_S} \quad ή \quad \boldsymbol{f_B = 450\,Hz}$$

γ. Στην περίπτωση που οι παρατηρητές Α και Β πλησιάζουν ο ένας τον άλλον με την ίδια ταχύτητα $\upsilon_A = 10\,m/s$, τότε αντιλαμβάνονται αντίστοιχα ήχους με συχνότητες f'_A και f'_B, οι οποίες υπολογίζονται από

*Ένας παρατηρητής που μετακινείται με την **ίδια** ταχύτητα με την ηχητική πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα ήχου f_A ίση με τη συχνότητα f_S που εκπέμπει η πηγή:*

$$f_A = f_S$$

*Όταν η απόσταση μεταξύ παρατηρητή και ηχητικής πηγής **μειώνεται**, ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι **οξύτερος** από τον ήχο που εκπέμπει η πηγή, δηλαδή η συχνότητα f_A του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη της συχνότητας f_S του ήχου που εκπέμπει η πηγή:*

$$f_A > f_S$$

*Αντίθετα, αν η απόσταση μεταξύ παρατηρητή και ηχητικής πηγής **αυξάνεται**, ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι **βαρύτερος** από τον ήχο που εκπέμπει η πηγή, δηλαδή:*

$$f_A < f_S$$

τις σχέσεις:

$$f'_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_S} f_S \quad (3) \qquad \text{και} \qquad f'_B = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S} f_S \quad (4)$$

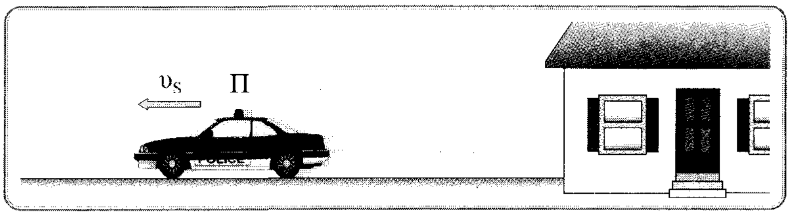
Αν διαιρέσουμε τις σχέσεις (3) και (4) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{f'_A}{f'_B} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_S} \quad \text{ή} \quad \frac{f'_A}{f'_B} = \frac{(340-20)\,m/s}{(340+20)\,m/s} \quad \text{ή} \quad \frac{f'_A}{f'_B} = \frac{8}{9}$$

ΘΕΜΑ 42º

α. Η συχνότητα του ήχου που "φτάνει" στον τοίχο από την σειρήνα του περιπολικού είναι:

$$f_{\tau o\iota\chi} = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_S} f_S \qquad (1)$$



Ο τοίχος ανακλά ήχο συχνότητας $f_{\tau o\iota\chi}$ και "λειτουργεί" ως ακίνητη ηχητική πηγή, οπότε ο απομακρυνόμενος οδηγός του περιπολικού αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας f_1 για την οποία ισχύει:

$$f_1 = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S}{\upsilon_{\eta\chi}} f_{\tau o\iota\chi}$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$f_1 = \frac{(\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S)}{\upsilon_{\eta\chi}} \cdot \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{(\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_S)} f_S \quad \text{ή} \quad f_1 = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_S} f_S$$

ή

$$f_1 = \frac{(340-20)\,m/s}{(340+20)\,m/s} \cdot 720\,Hz \quad \text{ή} \quad f_1 = 640\,Hz$$

β. ***1.*** *Ο ποδηλάτης βρίσκεται ανάμεσα στο περιπολικό και τον τοίχο (δες το επόμενο σχήμα), κινούμενος με ταχύτητα υ_A με φορά προς τον τοίχο.*

i. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο ποδηλάτης μετά από ανάκλαση στον τοίχο είναι:

$$f_{A_1} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_{\tau o\iota\chi}$$

Η μελέτη του προβλήματος της ανάκλασης ενός ηχητικού κύματος πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια περιλαμβάνει δύο βήματα.

Βήμα 1ο

Η επιφάνεια θεωρείται ως ακίνητος παρατηρητής *και ο ήχος της πηγής φτάνει στην επιφάνεια με συχνότητα:*

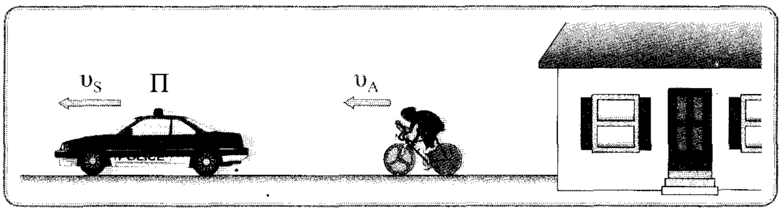
$$f_{\varepsilon\pi\iota\varphi} = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} \pm \upsilon_S} f_S$$

Βήμα 2ο

Η επιφάνεια θεωρείται ως ακίνητη πηγή *και ανακλά τον ήχο με την ίδια συχνότητα $f_{\varepsilon\pi\iota\varphi}$ με τη συχνότητα του ήχου που φτάνει στην επιφάνεια.*

ή λόγω της σχέσης (1):

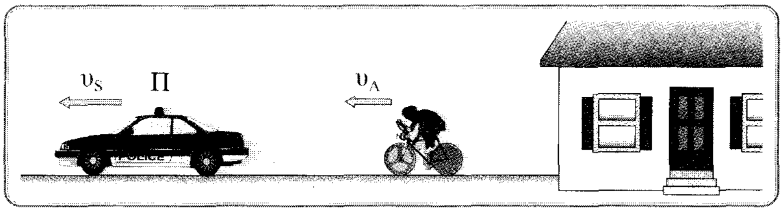
$$f_{A_1}=\frac{(\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_A)}{\upsilon_{\eta\chi}}\cdot\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{(\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_S)}f_S \quad ή \quad f_{A_1}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_S}f_S \quad ή \quad \boxed{f_{A_1}=700\,Hz}$$



ii. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο ποδηλάτης απευθείας απ' τη σειρήνα του περιπολικού είναι:

$$f_{A_2}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}-\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_S}f_S \quad ή \quad f_{A_2}=\frac{(340-10)\,m/s}{(340+20)\,m/s}\cdot 720\,Hz \quad ή \quad \boxed{f_{A_2}=660\,Hz}$$

2. *Ο ποδηλάτης βρίσκεται ανάμεσα στο περιπολικό και τον τοίχο, απομακρυνόμενος απ' αυτόν με ταχύτητα υ_A.*



i. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο ποδηλάτης μετά από ανάκλαση στον τοίχο είναι:

$$f_{A_3}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}-\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}}f_{\tau o\iota\chi}$$

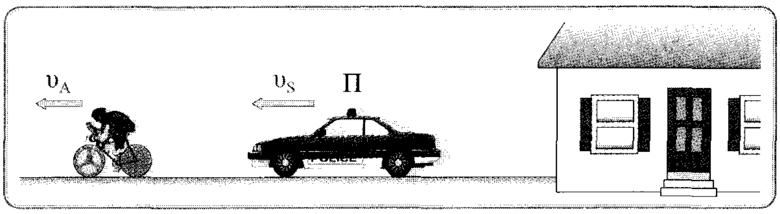
ή λόγω της σχέσης (1):

$$f_{A_3}=\frac{(\upsilon_{\eta\chi}-\upsilon_A)}{\upsilon_{\eta\chi}}\cdot\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{(\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_S)}f_S \quad ή \quad f_{A_3}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}-\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_S}f_S \quad ή \quad \boxed{f_{A_3}=660\,Hz}$$

ii. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο ποδηλάτης απευθείας από τη σειρήνα του περιπολικού είναι:

$$f_{A_4}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_S}f_S \quad ή \quad f_{A_4}=\frac{(340+10)\,m/s}{(340+20)\,m/s}\cdot 720\,Hz \quad ή \quad \boxed{f_{A_4}=700\,Hz}$$

3. *Το περιπολικό βρίσκεται ανάμεσα στον ποδηλάτη και τον τοίχο και ο ποδηλάτης απομακρύνεται από τον τοίχο.*



i. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο ποδηλάτης μετά από ανάκλαση στον τοίχο είναι:

$$f_{A_5} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_{\tau o\iota\chi}$$

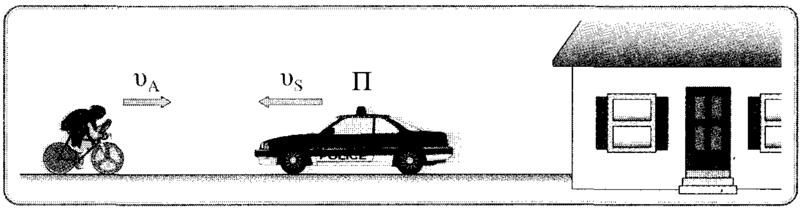
ή λόγω της σχέσης (1):

$$f_{A_5} = \frac{(\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A)}{\upsilon_{\eta\chi}} \cdot \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{(\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_S)} f_S \quad \text{ή} \quad f_{A_5} = \frac{(\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A)}{(\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_S)} f_S \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{f_{A_5} = 660\,Hz}$$

ii. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο ποδηλάτης απευθείας από τη σειρήνα του περιπολικού είναι:

$$f_{A_6} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S} f_S \quad \text{ή} \quad f_{A_6} = \frac{(340 - 10)\,m/s}{(340 - 20)\,m/s} \cdot 720\,Hz \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{f_{A_6} = 742{,}5\,Hz}$$

4. Το περιπολικό βρίσκεται ανάμεσα στον ποδηλάτη και τον τοίχο και ο ποδηλάτης πλησιάζει προς τον τοίχο.



i. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο ποδηλάτης μετά από ανάκλαση του ήχου στον τοίχο είναι όπως και στην περίπτωση (Β) (1) (i) :

$$\boldsymbol{f_{A_7} = f_{A_1} = 700\,Hz}$$

ii. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο ποδηλάτης απευθείας από τη σειρήνα του περιπολικού είναι:

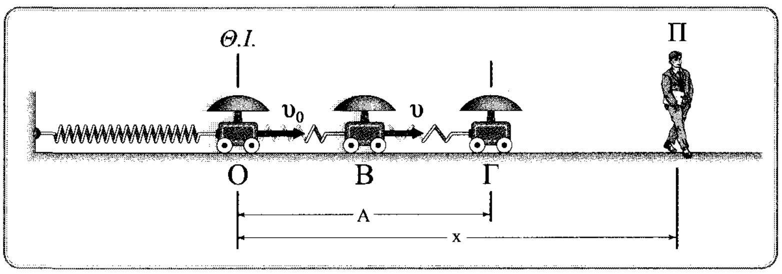
$$f_{A_8} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S} f_S \quad \text{ή} \quad f_{A_8} = \frac{(340 + 10)\,m/s}{(340 - 20)\,m/s} \cdot 720\,Hz \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{f_{A_8} = 787{,}5\,Hz}$$

ΘΕΜΑ 43^{O}

α. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση τη χρονική στιγμή t = 0 έχουμε:

$$E_{o\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} \quad \text{ή} \quad E_{o\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} + \frac{3}{4} E_{o\lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{E_{o\lambda}}{4} = U_{\alpha\rho\chi} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} Dx^2_{\alpha\rho\chi} \quad \text{ή} \quad x_{\alpha\rho\chi} = \frac{A}{2} \quad \text{ή} \quad (OB) = \frac{A}{2} \qquad (1)$$



Αλλά είναι $A = (OB) + (B\Gamma)$ ή λόγω της σχέσης (1):

$$A = \frac{A}{2} + (B\Gamma) \quad ή \quad \frac{A}{2} = (B\Gamma) \quad ή \quad A = 2(B\Gamma) \quad ή \quad A = 1m$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$x_{αρχ} = \frac{A}{2} \quad ή \quad Aημφ_0 = \frac{A}{2} \quad ή \quad ημφ = \frac{1}{2} \quad ή \quad φ_0 = \frac{\pi}{6}\,rad$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$x = Aημ(ωt + φ_0) \quad ή \quad x = 1ημ\left(ωt + \frac{\pi}{6}\right) \quad (S.I.)$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{3\pi}s$ είναι $x = A = 1\ m$, οπότε έχουμε:

$$1 = ημ\left(2\pi f\frac{1}{3\pi} + \frac{\pi}{6}\right) \quad ή \quad \frac{2f}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad ή \quad f = \frac{\pi}{2}Hz$$

β. Ο ήχος με τη μέγιστη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής εκπέμπεται από την ηχητική πηγή, όταν έχει τη μέγιστη ταχύτητα κατά την ταλάντωσή της και πλησιάζει προς τον παρατηρητή. Δηλαδή:

$$f_{max} = \frac{υ_{ηχ}}{υ_{ηχ} - υ_{max}} f_S \qquad (1)$$

Είναι όμως:

$$υ_{max} = ωA \quad ή \quad υ_{max} = 2\pi fA \quad ή \quad υ_{max} = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2}s^{-1} \cdot 1m \quad ή \quad υ_{max} = 10\,m/s$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$f_{max} = \frac{340\,m/s}{(340 - 10)\,m/s} \cdot 1000\,Hz \quad ή \quad f_{max} = 1030{,}3\,Hz$$

Ο ήχος με την ελάχιστη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής εκπέμπεται, όταν η ηχητική πηγή έχει τη μέγιστη ταχύτητα κατά την ταλάντωσή της και απομακρύνεται από τον παρατηρητή. Δηλαδή:

$$f_{min} = \frac{υ_{ηχ}}{υ_{ηχ} + υ_{max}} f_S \quad ή \quad f_{min} = \frac{340\,m/s}{(340 + 10)\,m/s} \cdot 1000\,Hz \quad ή \quad f_{min} = 971{,}43\,Hz$$

γ. Τη χρονική στιγμή t_2 η ταχύτητα της ηχητικής πηγής είναι:

$$υ_S = υ_{max}συν\left(2\pi ft + \frac{\pi}{6}\right) \quad ή \quad υ_S = 10συν\left(2\pi\frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3\pi} + \frac{\pi}{6}\right)m/s \quad ή \quad υ_S = 0$$

Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής τη στιγμή t_2 είναι:

$$f_A = \frac{υ_{ηχ} - υ_A}{υ_{ηχ}} f_S \quad ή \quad f_A = \frac{(340 - 10)\,m/s}{340\,m/s} \cdot 1000\,Hz \quad ή \quad f_A = 970{,}6\,Hz$$

ΘΕΜΑ 44^Ο

α. Τα κύματα του ήχου που φθάνουν στον τοίχο ανακλώνται, οπότε ο τοίχος γίνεται πηγή παραγωγής ηχητικών κυμάτων συχνότητας f_1. Ο παρατηρητής Α κινείται προς τον τοίχο, οπότε η απόσταση παρατηρητή-πηγής ελαττώνεται. Αυτό σημαίνει ότι ο παρατηρητής Α ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερο) από τη συχνότητα του ήχου της πηγής, ενώ ο παρατηρητής Β που απομακρύνεται ακούει ήχο μικρότερης συχνότητας (βαρύτερο) από τη συχνότητα του ήχου της πηγής. Δηλαδή ισχύει ότι $f_A > f_B$.

β. Θεωρούμε τον τοίχο ακίνητο παρατηρητή. Η συχνότητα f_1 του ήχου που φθάνει στον τοίχο από πηγή που πλησιάζει δίνεται από τη σχέση:

$$f_1 = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \qquad (1)$$

Τα κύματα από ανάκλαση έχουν ίδια συχνότητα f_1, οπότε ο παρατηρητής Α που πλησιάζει τον τοίχο αντιλαμβάνεται ανακλώμενο ήχο (ακίνητης πηγής) συχνότητας:

$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon} f_1 , \text{ η οποία λόγω της (1) γίνεται: } f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \qquad (2)$$

Ο παρατηρητής Β που απομακρύνεται από τον τοίχο αντιλαμβάνεται ανακλώμενο ήχο συχνότητας:

$$f_B = \frac{\upsilon - \upsilon_2}{\upsilon} f_1 , \text{ η οποία λόγω της (1) γίνεται: } f_B = \frac{\upsilon - \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \qquad (3)$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (2) και (3) κατά μέλη, προκύπτει:

$$f_A - f_B = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_S} f_S - \frac{\upsilon - \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \quad \text{ή} \quad f_A - f_B = \frac{2\upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \quad \text{ή}$$

$$f_S = (f_A - f_B) \cdot \frac{\upsilon - \upsilon_S}{2\upsilon_2} \quad \text{ή} \quad f_S = 20 \cdot \frac{340 - 20}{2 \cdot 3{,}2} Hz \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{f_S = 1000\ Hz}$$

γ. Αντικαθιστώντας τα γνωστά στις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \quad \text{ή} \quad f_A = \frac{340 + 3{,}2}{340 - 20} \cdot 1000 Hz \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{f_A = 1072{,}5\ Hz}$$

$$f_B = \frac{\upsilon - \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \quad \text{ή} \quad f_B = \frac{340 - 3{,}2}{340 - 20} \cdot 1000 Hz \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{f_B = 1052{,}5\ Hz}$$

ΘΕΜΑ 45^o

α. Από τα δεδομένα καταλαβαίνουμε ότι η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση. Ξέρουμε ακόμα ότι η εξαναγκασμένη ταλάντωση έχει συχνότητα πάντα ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη, οπότε $\omega_\delta = 2\pi f = 30$ rad/s. Επομένως οι εξισώσεις θα είναι:

$$x = 0{,}2\ \eta\mu(30t)\ (S.I.) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \upsilon = 6\ \sigma\upsilon\nu(30t)\ (S.I.)$$

β. Ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας είναι η απόλυτη τιμή της ισχύος της δύναμης απόσβεσης που δίνεται από τη σχέση:

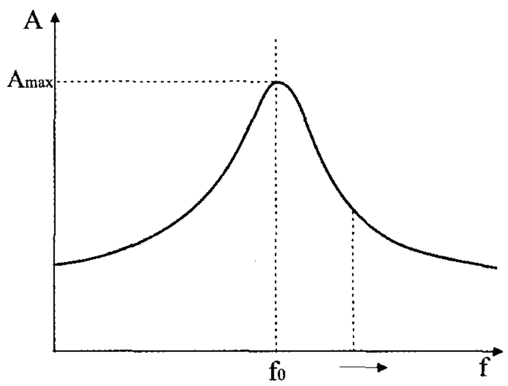
$$|P| = |F_b \upsilon| = b\upsilon^2$$

Άρα η μέγιστη τιμή της ισχύος θα εμφανίζεται όταν το σώμα έχει μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα και θα είναι:

$$|P_{max}| = b\upsilon_0^2 = b\omega^2 A^2 = 7{,}2\ J/s$$

γ. Η κυκλική ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 20\ rad/s$$



Η κυκλική συχνότητα της διέγερσης είναι:

$$\omega_\delta = 2\pi f = 30\ rad/s$$

Συνεπώς το σύστημα έχει συχνότητα μεγαλύτερη από τη συχνότητα συντονισμού του και, για το λόγο αυτό, αύξηση της συχνότητας διέγερσης οδηγεί σε μείωση του πλάτους της ταλάντωσης.

ΘΕΜΑ 46^o

α. Ξέρουμε ότι στις ελεύθερες ταλαντώσεις η μέγιστη ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι ίση με τη μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή. Στις εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις η ισότητα αυτή ισχύει μόνο στην κατάσταση συντονισμού ενέργειας.

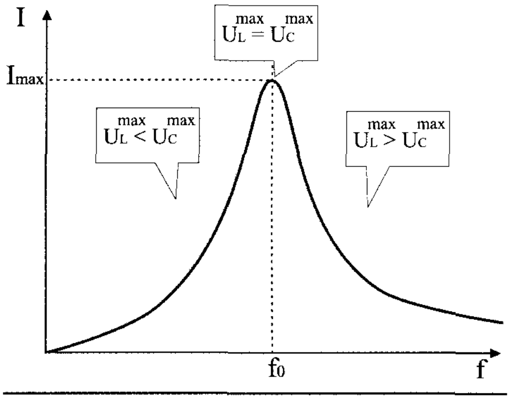
Πραγματικά, αν η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος, δηλαδή $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, τότε θα είναι:

$$U_L^{max} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega^2Q^2 = \frac{1}{2}L\frac{1}{LC}Q^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = U_C^{max}$$

Αν όμως είναι $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, τότε:

$$U_L^{max} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega^2Q^2 < \frac{1}{2}L\frac{1}{LC}Q^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = U_C^{max}$$

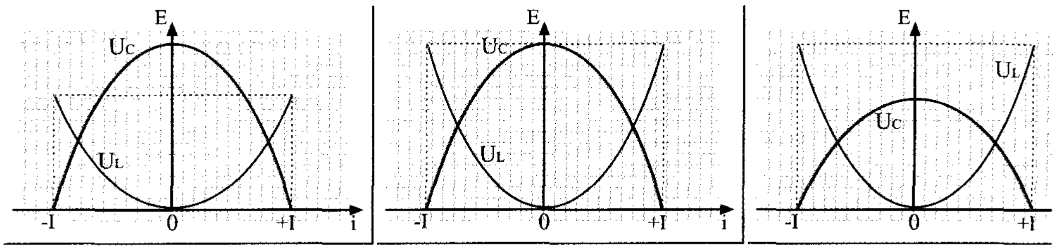
Άρα ισχύει $U_L^{max} < U_C^{max}$. Δηλαδή αν το κύκλωμα τροφοδοτείται με συχνότητα μικρότερη από την ιδιοσυχνότητά του, τότε η μέγιστη ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή είναι μεγαλύτερη από τη μέγιστη ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.



Αντίστροφα:
Αν το κύκλωμα τροφοδοτείται με συχνότητα μεγαλύτερη από την ιδιοσυχνότητά του, τότε η μέγιστη ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή είναι μικρότερη από τη μέγιστη ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

β. Ανάλογα με τη συχνότητα διέγερσης έχουμε τρία διαγράμματα:

$f < f_0$ $\qquad$ $f = f_0$ $\qquad$ $f > f_0$



Να επαναλάβετε τους παραπάνω συλλογισμούς για ένα σύστημα εξαναγκασμένης μηχανικής ταλάντωσης θεωρώντας δυναμική ενέργεια της εξαναγκασμένης ταλάντωσης την ενέργεια που οφείλεται στη δύναμη επαναφοράς.

ΘΕΜΑ 47^{o}

α. Αφού έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση, θα είναι ω = 16 rad/s. Άρα:

$$x = 0{,}13\eta\mu\left(16t - \frac{\pi}{4}\right)m \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = 2{,}08\sigma\upsilon\nu\left(16t - \frac{\pi}{4}\right)m/s$$

β. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος θα είναι $K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = 2{,}16$ J.

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι $U_{max}^{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} KA^2 = 3{,}38$ J.

γ. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $\upsilon = 2{,}08\sigma\upsilon\nu(-\pi/4) = 1{,}46$ m/s και $F = 0$.
Συνεπώς το σύστημα χάνει μηχανική ενέργεια με ρυθμό:

$$\frac{dW_{F_b}}{dt} = -b\upsilon^2 = -10 \cdot 2{,}13 = -21{,}3 \text{ J/s}$$

Την ίδια στιγμή, αφού η δύναμη διέγερσης έχει μηδενική τιμή, ο ταλαντωτής δεν προσλαμβάνει ενέργεια από το διεγέρτη. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}05\pi$ s η ταχύτητα θα είναι $\upsilon = 2{,}08\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1{,}46$ m/s και η δύναμη διέγερσης θα είναι $F = 30\eta\mu(\pi/2) = 30$N. Επομένως το σύστημα χάνει μηχανική ενέργεια με ρυθμό:

$$\frac{dW_{F_b}}{dt} = -b\upsilon^2 = -10 \cdot 2{,}13 = -21{,}3 \text{ J/s}$$

και προσλαμβάνει ενέργεια από το διεγέρτη με ρυθμό:

$$\frac{dW_F}{dt} = F\upsilon = 30 \cdot 1{,}46 = 43{,}8 \text{ J/s}$$

Άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται κατά $43{,}8 - 21{,}3 = 22{,}5$ J/s. Βλέπετε ότι, κατά τη διάρκεια μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης, ο στιγμιαίος ρυθμός προσφοράς ενέργειας στο σύστημα δεν είναι ίσος με το στιγμιαίο ρυθμό απώλειας ενέργειας από το σύστημα.

δ. Για να απορροφά μέγιστη μέση ισχύ, ο ταλαντωτής πρέπει να βρεθεί σε κατάσταση συντονισμού ενέργειας και αυτό συμβαίνει όταν $\omega = \omega_0$. Άρα όταν:

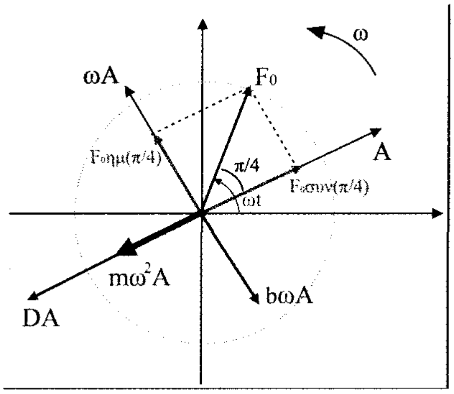
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 20 \text{ rad/s}$$

Στην κατάσταση αυτή η δύναμη διέγερσης είναι κάθε στιγμή αντίθετη της δύναμης απόσβεσης και συνεπώς θα ισχύει $F_0 = b\upsilon_0$, οπότε $F_0 = b\omega A$. Άρα:

$$A = \frac{F_0}{b\omega} = \frac{30}{20 \cdot 20} = 0{,}15 \text{ m}$$

ε. Να παρατηρήσετε το διάγραμμα του σχήματος.

Οι στιγμιαίες τιμές των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν είναι οι προβολές των αντίστοιχων διανυσμάτων στον κατακόρυφο άξονα. Για παράδειγμα, τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή που σχεδιάσαμε το διάγραμμα, η απομάκρυνση είναι θετική, η ταχύτητα είναι θετική, η δύναμη διέγερσης θετική, η δύναμη απόσβεσης αρνητική και η δύναμη επαναφοράς αρνητική.



Να παρατηρήσετε ότι η συνισταμένη των διανυσμάτων που εκφράζουν τις δυνάμεις είναι το διάνυσμα με μέτρο $m\omega^2A$ που έχει ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα που εκφράζει τη δύναμη επαναφοράς και έχει μέτρο DA.

<u>ΘΕΜΑ 48^{O}</u>

α. Μόλις ο διακόπτης έλθει σε επαφή με τον ακροδέκτη (1), η πηγή αρχίζει να φορτίζει τον πυκνωτή. Κάθε στιγμή η τάση στα άκρα του πυκνωτή θα είναι ίση με την πολική τάση της πηγής, δηλαδή θα ισχύει $V_C = E - ir$.

Άρα η ένταση του ρεύματος θα είναι ίση με $i = \dfrac{E - V_C}{r}$.

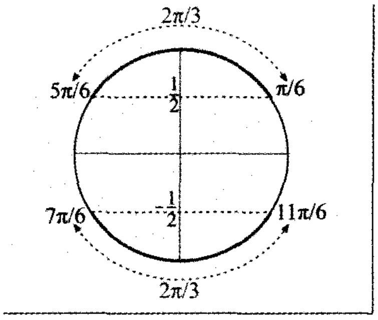
Η ένταση του ρεύματος έχει μέγιστη τιμή τη στιγμή που η τάση του πυκνωτή είναι μηδέν, δηλαδή τη στιγμή που ο διακόπτης πάει στη θέση (1) και είναι $i_{max} = \dfrac{E}{r} = 10A$.

Συνεπώς τη στιγμή που η ένταση του ρεύματος είναι η μισή της μέγιστης, δηλαδή ίση με $i = 5$ A, η τάση του πυκνωτή θα είναι ίση με $V_C = E - ir = 10$ V.

Εκείνη τη στιγμή το φορτίο του πυκνωτή θα είναι $q = CV_C = 200$ nC.

β. Από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{LC}$ βρίσκουμε $T = 4\pi \cdot 10^{-4}$s.

γ. Κάθε αρμονικά μεταβαλλόμενο μέγεθος στη διάρκεια μιας περιόδου έχει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από το μισό του πλάτους του, για χρονικό διάστημα Δt που αντιστοιχεί σε τόξο ίσο με 4π/3, όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα. Η παραπάνω πρόταση αφορά και το ηλεκτρικό φορτίο και την ένταση του ρεύματος.

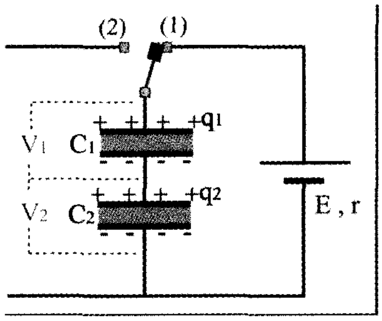


Σε κάθε περίπτωση το συνολικό τόξο στο οποίο ανήκουν φάσεις με απόλυτες τιμές ημίτονου ή συνημίτονου μεγαλύτερες από ½ είναι 4π/3 ανά κύκλο και αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T$.

Τελικά το ζητούμενο χρονικό διάστημα θα είναι $\frac{8\pi}{3}10^{-4}$ s.

ΘΕΜΑ 49^Ο^

α. Αρχικά το κύκλωμα που μας ενδιαφέρει είναι η πηγή και οι δύο πυκνωτές που θα έχουν φορτιστεί από την πηγή. Κανένα τμήμα του κυκλώματος δεν διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Αν V_1 και V_2 οι τάσεις στα άκρα των δύο πυκνωτών C_1 και C_2 αντίστοιχα, θα ισχύει:



$$E = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} \qquad (1)$$

όπου q_1 και q_2 τα φορτία των δύο πυκνωτών.

Έχουμε αποδείξει ότι δύο πυκνωτές που συνδέονται σε σειρά έχουν κάθε στιγμή ίδιο ηλεκτρικό φορτίο $q = q_1 = q_2$. Επομένως:

$$E = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = q\,\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2} \Rightarrow q = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}E = 3{,}6\ \text{mC}$$

β. Βρήκαμε ότι το σύστημα των δύο πυκνωτών έχει φορτίο q =3,6 mC όταν φορτίζεται με τάση V = 60 V (όση δηλαδή η τάση της πηγής). Συνεπώς οι δύο πυκνωτές ισοδυναμούν με έναν χωρητικότητας:

$$C = \frac{q}{V} = 60\ \mu\text{F}$$

Η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης θα είναι $T = 2\pi\sqrt{LC} = 6\pi 10^{-4}$ s.

γ. Η εξίσωση του φορτίου θα είναι $q = 3600\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$ μC.

Επίσης ξέρουμε ότι $V_1 = \frac{q}{C_1}$. Συνεπώς $V_1 = 36\eta\mu\left(3333t + \frac{\pi}{2}\right)$ V.

ΘΕΜΑ 50^ο^

α. Η περίοδος θα είναι $T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi$ s.

Για να βρούμε το πλάτος του ηλεκτρικού φορτίου, πρέπει πρώτα να βρούμε την έ-

64

νταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη στιγμή $t = 0$ και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Το πηνίο αρχικά διαρρέεται από ρεύμα έντασης I που βρίσκεται από το νόμο του Ohm για το κύκλωμα πηγή-πηνίο:

$$I = \frac{E}{r} = 20\ \text{A}$$

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου τη στιγμή $t = 0$ θα είναι η ολική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης αφού αρχικά ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Άρα:

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow Q = I\sqrt{LC} = 20\ \text{C}$$

β. Θεωρώντας θετικό το φορτίο του πυκνωτή όταν ο πάνω οπλισμός του είναι θετικός, η εξίσωση του φορτίου θα είναι της μορφής $q = Q\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Είναι $\omega = 2\pi/T = 1$ rad/s και $\varphi_0 = \pi$, γιατί τη στιγμή $t = 0$ το φορτίο είναι μηδέν και, καθώς το ρεύμα στο πηνίο έχει φορά προς τα κάτω, θα αρχίσει να φορτίζεται θετικά ο κάτω οπλισμός, οπότε το φορτίο του πυκνωτή θα γίνει αρνητικό. Άρα $q = 20\eta\mu(t + \pi)$ και τη στιγμή $t = 1{,}5\pi$ s το φορτίο θα είναι $q = 20\eta\mu 2{,}5\pi = 20$ C.

Δηλαδή ο διακόπτης μεταφέρεται στη θέση (1) τη στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο ίσο με 20 C.

Όταν ο διακόπτης επανέλθει στη θέση (2), το πηνίο θα διαρρέεται ξανά από ρεύμα έντασης 20 A και, για να βρούμε το νέο πλάτος του φορτίου, θα εφαρμόσουμε πάλι την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Προσοχή όμως γιατί τη στιγμή που αρχίζει η νέα ταλάντωση έχει και ο πυκνωτής ενέργεια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{Q'^2}{2C} \Rightarrow Q'^2 = 2Q^2 \Rightarrow Q' = Q\sqrt{2} = 20\sqrt{2}\ \text{C}$$

γ. Κάθε φορά που ο διακόπτης μεταφέρεται στη θέση (1) το πηνίο δε διαρρέεται από ρεύμα και συνεπώς δεν έχει ενέργεια. Όταν επιστρέφει στη θέση (2), το πηνίο διαρρέεται από το ρεύμα $I_0 = 20$ A που παρέχει η πηγή και επομένως έχει ενέργεια $W = LI^2/2$.

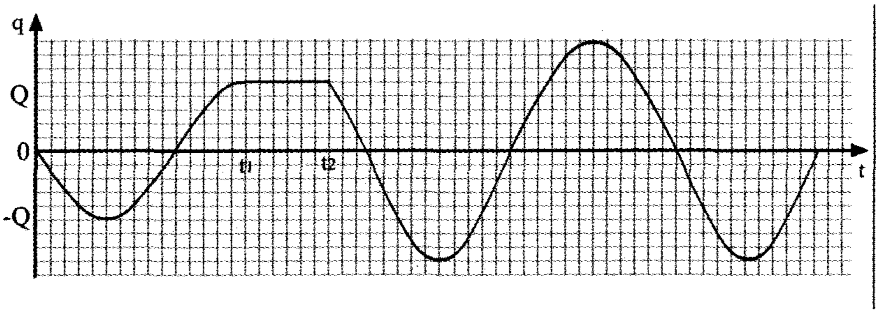
Άρα κάθε τέτοια μεταφορά του διακόπτη προκαλεί αύξηση της ενέργειας του κυκλώματος κατά W. Μετά από N μεταφορές η ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι $E = NW$.

Επομένως:

$$\frac{{Q_N}^2}{2C} = N\frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow Q_N = I_0\sqrt{N \cdot LC} = 20\sqrt{N}\ \text{C}$$

δ. Στο διάγραμμα βλέπετε τη γραφική παράσταση $q = f(t)$ για μια μεταφορά του διακόπτη.

65



Τη χρονική στιγμή t_1 ο διακόπτης μεταβαίνει από τη θέση (2) στη θέση (1) και τη στιγμή t_2 μεταβαίνει από τη (2) ξανά στην (1) .

ΘΕΜΑ 51º

Οι αρχικές τιμές των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν θα είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\ ,\quad Q,\quad I = \frac{Q}{\sqrt{LC}}\ ,\quad E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}LI^2$$

α. Τη στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο η χωρητικότητά του γίνεται α-πότομα C΄ = C/2.

Από τη σχέση C = q/V προκύπτει ότι υποδιπλασιασμός της χωρητικότητας προκαλεί στον ίδιο χρόνο ή υποδιπλασιασμό του φορτίου, αν η τάση μένει σταθερή, ή διπλασιασμό της τάσης, αν το φορτίο μένει σταθερό.

Τη στιγμή της μεταβολής της χωρητικότητας το κύκλωμα δε διαρρέεται από ρεύμα αφού το φορτίο είναι μέγιστο. Οποιαδήποτε απότομη μεταβολή του φορτίου θα προκαλούσε την εμφάνιση μεγάλης έντασης ρεύματος, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί λόγω της αδράνειας που παρουσιάζει το πηνίο. Έτσι αυτό που μπορεί να μεταβληθεί γρήγορα είναι η τάση του πυκνωτή που απότομα θα διπλασιαστεί χωρίς να αλλάξει το φορτίο του. Τελικά:

Η περίοδος θα μειωθεί και θα γίνει:

$$T' = 2\pi\sqrt{L\frac{C}{2}} = \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{T\sqrt{2}}{2}$$

Το μέγιστο φορτίο Q θα μείνει ίδιο.

Η μέγιστη τιμή της έντασης θα αυξηθεί και θα γίνει:

$$I' = \frac{Q}{\sqrt{L\frac{C}{2}}} = \sqrt{2}\frac{Q}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2}I$$

Η ενέργεια του συστήματος θα διπλασιαστεί, δηλαδή για να πραγματοποιηθεί μια τέτοια μεταβολή πρέπει να ξοδέψουμε ενέργεια.

β. Αφού τη στιγμή της μεταβολής ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, η αλλαγή της χωρητικότητάς του δεν συνοδεύεται από καμιά ενεργειακή μεταβολή. Συνεπώς η ενέργεια του συστήματος μένει ίδια και προφανώς ίδια μένει και η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος όπως φαίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2}LI^2$.

Η περίοδος και πάλι θα μειωθεί και θα γίνει $T' = 2\pi\sqrt{L\frac{C}{2}} = \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{T\sqrt{2}}{2}$.

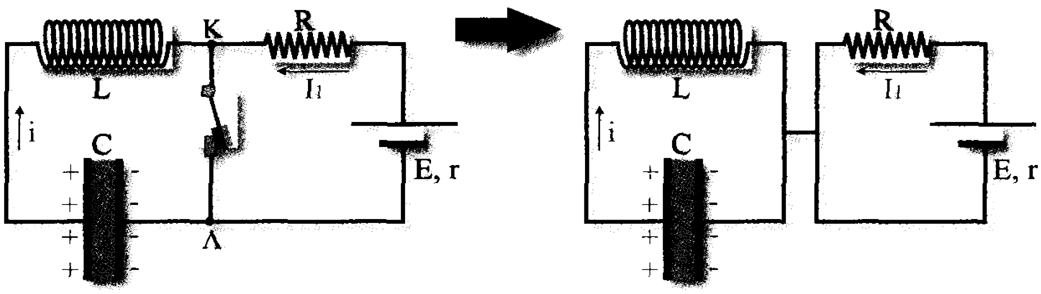
Και φυσικά τώρα θα μειωθεί το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή όπως προκύπτει από τη σχέση $Q' = I\sqrt{LC'} = \frac{Q\sqrt{2}}{2}$.

Συμπέρασμα

Αν αλλάξει απότομα η χωρητικότητα του πυκνωτή τη στιγμή που αυτός έχει μέγιστο φορτίο, τότε:	Αν αλλάξει απότομα η χωρητικότητα του πυκνωτή τη στιγμή που αυτός έχει μέγιστο ρεύμα, τότε:
Α Αλλάζει η περίοδος	**Α** Αλλάζει η περίοδος
Β Αλλάζει η ενέργεια	**Β** Δεν αλλάζει η ενέργεια
Γ Αλλάζει το πλάτος της έντασης	**Γ** Το πλάτος της έντασης μένει σταθερό
Δ Το πλάτος του φορτίου μένει σταθερό	**Δ** Αλλάζει το πλάτος του φορτίου

ΘΕΜΑ 52^o

α. Όπως βλέπετε στο κύκλωμα, τη χρονική στιγμή t = 0 δεν κυκλοφορεί ρεύμα, αφού δεν υπάρχει αγώγιμη κλειστή διαδρομή κατά μήκος των αγωγών του. Συνεπώς, ο πυκνωτής έχει στα άκρα του τάση ίση με την τάση της πηγής, δηλαδή: $V_{OC} = E$
Μόλις κλείσουμε το διακόπτη, τα άκρα του Κ και Λ γίνονται ισοδυναμικά και άρα από ηλεκτρική άποψη ταυτίζονται. Το κλείσιμο του διακόπτη λοιπόν δημιουργεί δύο ανεξάρτητα κυκλώματα, από τα οποία το ένα είναι το κύκλωμα LC και το άλλο είναι το κύκλωμα της πηγής με την αντίσταση, όπως βλέπετε στο επόμενο σχήμα.



Ο διακόπτης θα διαρρέεται ταυτόχρονα από τα δυο ρεύματα, το σταθερό ρεύμα της πηγής, που βρίσκεται από το νόμο του Ohm και το μεταβλητό ρεύμα της ηλεκτρικής ταλάντωσης. Το σταθερό ρεύμα στην αντίσταση είναι:

$$I_1 = \frac{E}{R+r} \Rightarrow E = I_1(R+r) = 20 \text{ V}$$

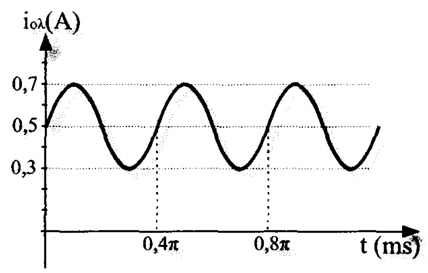
Επομένως, η αρχική τάση του πυκνωτή είναι V_{oc} = 20 V.

β. Για το κύκλωμα LC θα είναι Q = CV_{oc} = 40 μC και $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ = 5000 rad/s .

Η μεγίστη ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα LC θα είναι I = ωQ = 0,2 A και άρα η εξίσωσή του θα είναι i = -0,2ημ(5000t) S.I.

Επειδή θεωρούμε θετική φορά του ρεύματος στο διακόπτη τη φορά προς τα κάτω και αυτή είναι η αρχική φορά του ρεύματος της ηλεκτρικής ταλάντωσης θα θεωρήσουμε σαν εξίσωση του ρεύματος την i = 0,2ημ(5000t) S.I. Επομένως σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff, ο διακόπτης διαρρέεται από ρεύμα με ένταση:

$$i_{ολ} = i_1 + i_2 = 0,5 + 0,2ημ(5000t) \text{ S.I.}$$



Η γραφική παράσταση του ρεύματος φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα

Η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι:
T =2π/ω = 0,4π ms

γ. Τη χρονική στιγμή t = 0,2π ms, από το διακόπτη θα έχει περάσει ηλεκτρικό φορτίο που θα είναι ίσο με το φορτίο που διέρχεται λόγω του σταθερού ρεύματος i_1 και του μεταβλητού ρεύματος της ηλεκτρικής ταλάντωσης.

Το φορτίο λόγο του σταθερού ρεύματος είναι $\Delta Q_1 = i_1 t$ = 100π μC = 314 μC.

Για να βρούμε το φορτίο λόγω του μεταβλητού ρεύματος της ηλεκτρικής ταλάντωσης, θα πρέπει να σκεφτούμε ότι το χρονικό διάστημα 0,2π ms είναι ίσο με το μισό της περιόδου και άρα ο πυκνωτής θα έχει φορτιστεί πλήρως με αντίθετη πολικότητα από αυτή που είχε τη στιγμή t = 0. Επομένως, από το διακόπτη θα έχει περάσει λόγω του μεταβλητού ρεύματος φορτίο ΔQ_2 = 2Q = 80 μC.

Το συνολικό φορτίο που πέρασε μέσα από το διακόπτη θα είναι:
ΔQ = 314 μC + 80 μC = 394 μC

ΘΕΜΑ 53ο

α. Το βαρίδι κατεβαίνει με επιτάχυνση α που είναι κατά μέτρο ίδια με την κατακόρυφη επιτάχυνση του σημείου του δίσκου που εφάπτεται στο νήμα.

Έστω ότι ο δίσκος κατέρχεται με επιτάχυνση α_c και ταυτόχρονα περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση α_γ.

Άρα:

Για το βαρίδι:

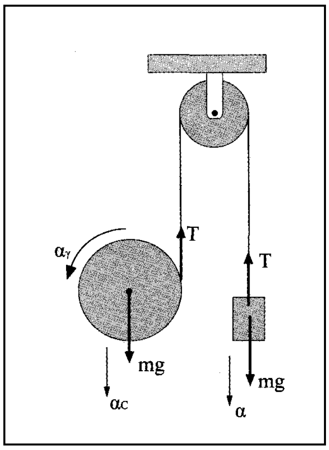
mg-T=ma (1)

68

Για το δίσκο:

$mg-T=m\alpha_C$ (2)

$TR=I\alpha_\gamma$ (3)



Η (3) γίνεται:

$$TR=\frac{1}{2}mR^2a_\gamma \Rightarrow$$

$$T=\frac{1}{2}mRa_\gamma$$

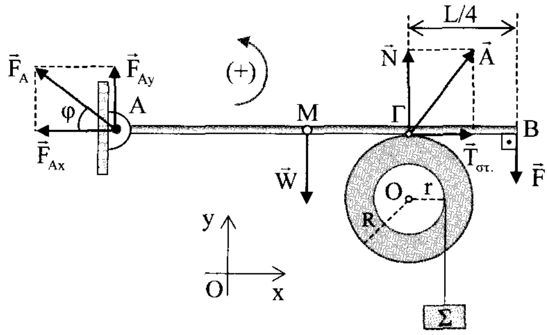
Από (1) και (2) έχουμε ότι $a_c = a$

β. Για το σημείο επαφής του δίσκου με το νήμα ισχύει: $\alpha = \alpha_\gamma$ R-α_c => $2\alpha = \alpha_\gamma R$ => $\alpha_\gamma=2\alpha/R$ οπότε η (3) γίνεται T = mα (4) και η (1) γίνεται: mg = 2mα
Τελικά $\alpha = g/2 = 5m/s^2$ και $\alpha_\gamma = 50\ r/s^2$.

γ.Η τάση του νήματος αφαιρεί ενέργεια που μεταφέρεται από το βαρίδι στο δίσκο. Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας είναι Tυ όπου υ η ταχύτητα του βαριδιού κάθε στιγμή που όταν το βαρίδι έχει κατέβει κατά 10 m είναι 10 m/s.
Η τάση του νήματος είναι T = ma = 15 N οπότε ο ρυθμός που θέλουμε είναι 150 J/s.

ΘΕΜΑ 54ο

α. Όπως απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα, στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Στο μέσον Μ, το βάρος της $\vec{W}$, στο άκρο της Β, η δύναμη $\vec{F}$, στο σημείο επαφής Γ η δύναμη επαφής $\vec{A}$ από το στερεό σώμα, η οποία αναλύεται στην κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και τη στατική τριβή $\vec{T}_{στ.}$ και στο άκρο της Α, η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση, η οποία αναλύεται σε συνιστώσες δυνάμεις $\vec{F}_{Ax}$ και $\vec{F}_{Ay}$ στον άξονα xx΄ και στον άξονα yy΄, αντίστοιχα.

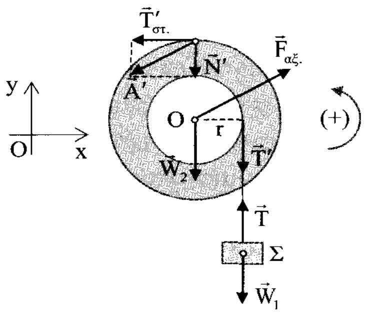


Για την περιστροφική ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \quad ή \quad \tau_{F_A} + \tau_W + \tau_N + \tau_{T_{στ.}} + \tau_F = 0 \quad ή \quad 0 - W\frac{L}{2} + N\frac{3L}{4} + 0 - F\cdot L = 0$$

$$ή \qquad N = 200\ N$$

β. Όπως απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα, στο στερεό ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Στο γεωμετρικό του κέντρο Ο, το βάρος του $\vec{W}_2$, η αντίδραση της δύναμης $\vec{A}$, η $\vec{A}'$, η οποία αναλύεται στη δύναμη $\vec{N}'$ $\left(\vec{N}' = -\vec{N}\right)$ και τη δύναμη $\vec{T}'_{στ.}$ $\left(\vec{T}'_{στ.} = -\vec{T}_{στ.}\right)$, η τάση $\vec{T}'$ του νήματος και η δύναμη $\vec{F}_{αξ.}$ από τον άξονα περιστροφής.



Το σώμα Σ δέχεται το βάρος του $\vec{W}_1$ και την τάση του νήματος $\vec{T}$.

Για την ισορροπία του στερεού σώματος ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad ή \quad T - W_1 = 0 \quad ή \quad T = 100\ N$$

Είναι:

$$\vec{T}' = -\vec{T} \quad ή \quad T' = 100\ N$$

Για την περιστροφική ισορροπία του στερεού ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \quad ή \quad \tau_{F_{αξ.}} + \tau_{W_2} + \tau_{N'} + \tau_{T'_{στ.}} + \tau_{T'} = 0 \quad ή \quad 0 + 0 + 0 + T'_{στ.}R - T'r = 0$$

$$ή \qquad T'_{στ.} = 50\ N$$

γ. Για τη μεταφορική ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ή \quad -F_{Ax} + T_{στ.} = 0 \quad ή \quad -F_{Ax} + T'_{στ.} = 0 \quad ή \quad F_{Ax} = 50\ N$$

και

$$\Sigma F_y = 0 \quad ή \quad F_{Ay} + N - W - F = 0 \quad ή \quad F_{Ay} = 50\ N$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \quad ή \quad F_A = 50\sqrt{2}\ N \quad ή \quad F_A = 70\ N$$

και η διεύθυνσή της προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$εφφ = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = 1 \quad ή \quad φ = 45^o$$

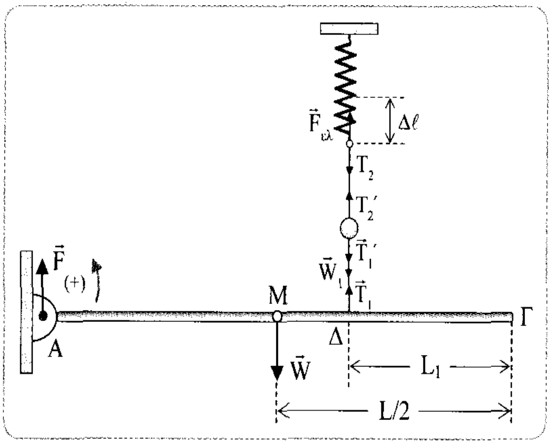
ΘΕΜΑ 55°

α. Για τη στροφική κίνηση της ράβδου ισχύει:

$\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_W + \tau_{T_1} = 0$ ή

$-W\dfrac{L}{2} + T_1(L - L_1) = 0$ ή

$-W\dfrac{L}{2} + T_1\dfrac{2L}{3} = 0$ ή $T_1 = 30\ N$.



β. Για την ισορροπία του σώματος Σ έχουμε:

$\Sigma F_y = 0$ ή $T_2' - T_1' - W_1 = 0$ ή

$T_2 - T_1 - mg = 0$ ή $T_2 = 40\ N$.

Λόγω δράσης – αντίδρασης είναι $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -\vec{T}_2$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = T_2$ ή $K\Delta\ell = T_2$ ή $\Delta\ell = 0,4\ m$.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τον τύπο: $U_{\varepsilon\lambda.} = \dfrac{1}{2}K\Delta\ell^2$ ή $U_{\varepsilon\lambda.} = 8\ J$.

γ. Ισχύει $\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0$ ή $\tau_F + \tau_W = 0$ ή $\tau_F + W\left(\dfrac{L}{2} - L_1\right) = 0$ ή $\tau_F + W\dfrac{L}{6} = 0$ ή

$\tau_F = -20\ Nm$ ή $|\tau_F| = 20\ Nm$.

ΘΕΜΑ 56°

α. Είναι $K = m\omega^2$ ή $\omega = 20\ rad/s$ και $\upsilon_0 = \omega A$ ή $A = 0,5\ m$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = 0$ και $\upsilon > 0$, η αρχική φάση της ταλάντωσης ισούται με μηδέν. Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι η: $x = A\eta\mu(\omega t)$ ή $x = 0,5\eta\mu(20t)$ (S.I.).

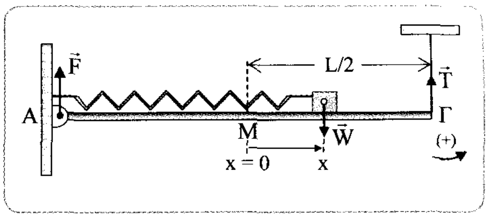
β. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η: $t = \dfrac{3T}{4}$ ή $t = \dfrac{3\cdot 2\pi}{4\omega}$ ή $t = \dfrac{3\pi}{40}\ s$.

γ. Το νήμα ασκεί δύναμη ελάχιστου μέτρου στη ράβδο, όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = -A = -0,5\ m$. Για τη στροφική ισορροπία της ράβδου ισχύει: $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή

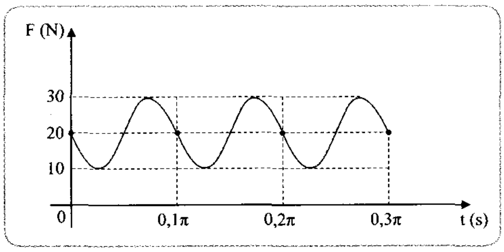
$\tau_W + \tau_{T_{min}} = 0$ ή $T_{min}L - W\left(\dfrac{L}{2} - A\right) = 0$ ή $T_{min} = 10\ N$.

δ. Έστω ότι το σώμα βρίσκεται σε μια τυχαία θετική θέση x της τροχιάς του. Για τη στροφική ισορροπία της ράβδου ισχύει: $\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0$ ή $\tau_F + \tau_W = 0$ ή $-FL + W\left(\dfrac{L}{2} - x\right) = 0$

ή $F = mg\dfrac{\frac{L}{2}-x}{L}$ ή $F = 20 - 10\eta\mu(20t)$ (S.I.).



Η ζητούμενη γραφική παράσταση απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

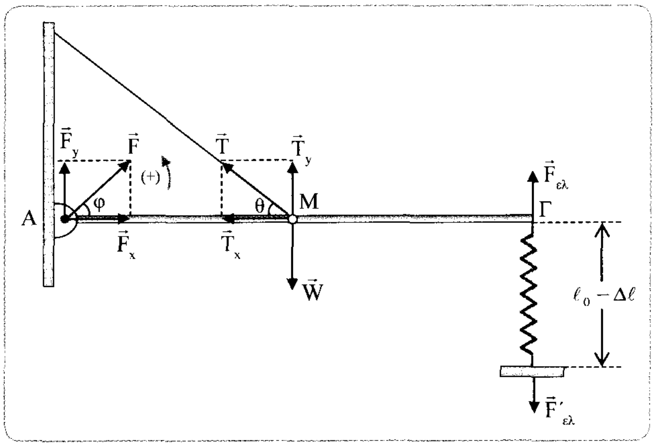


ΘΕΜΑ 57^ο^

α. Το ελατήριο είναι συσπειρωμένο και ασκεί στο δάπεδο δύναμη μέτρου $F'_{\varepsilon\lambda} = K\Delta\ell$ ή $F'_{\varepsilon\lambda} = 20\ \text{N}$. Λόγω δράσης – αντίδρασης, το δάπεδο ασκεί στο ελατήριο δύναμη μέτρου $F''_{\varepsilon\lambda} = F'_{\varepsilon\lambda}$ ή $F''_{\varepsilon\lambda} = 20\ \text{N}$.

β. Για τη στροφική ισορροπία της ράβδου ισχύει: $\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή

$T_y\dfrac{L}{2} - W\dfrac{L}{2} + F_{\varepsilon\lambda}L = 0$ ή



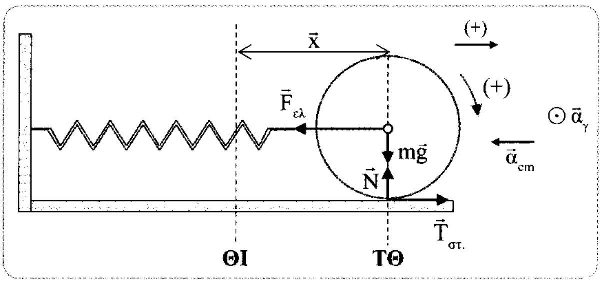
$T_y - W + 2F_{\varepsilon\lambda} = 0$ ή $T\eta\mu\theta - Mg + 2F'_{\varepsilon\lambda} = 0$ ή $T = 100\ \text{N}$.

γ. Για τη μεταφορική ισορροπία της ράβδου ισχύει: $\Sigma F_x = 0$ ή $F_x - T\sigma\upsilon\nu\theta = 0$ ή

$F_x = 50\sqrt{3}\ \text{N}$ και $\Sigma F_y = 0$ ή $F_y + T_y + F_{\varepsilon\lambda} - W = 0$ ή $F_y = 20\ \text{N}$. Επομένως, είναι

$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$ ή $F = 10\sqrt{79}\ \text{N}$ ή $F = 89\ \text{N}$ και $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{F_y}{F_x}$ ή $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{15}$ ή $\varphi = 13°$.

ΘΕΜΑ 58ο

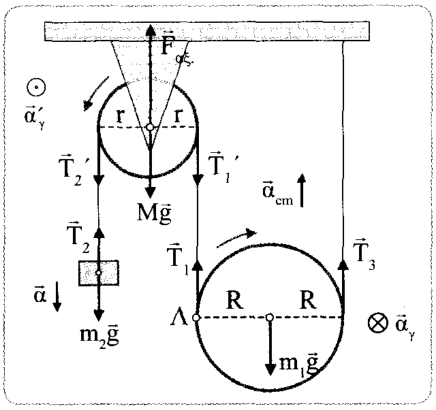


α. Σε τυχαία θέση (Τ.Θ.) έχουμε:
$\Sigma F_x = T_{\sigma\tau} - F_{\varepsilon\lambda} = -m \cdot \alpha_{cm}$ (1) και
$\Sigma\tau = -T_{\sigma\tau} \cdot R = -I \cdot \alpha_\gamma$ ή
$T_{\sigma\tau} \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι
$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma \cdot R$, $T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} m \cdot \alpha_{cm}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:
$T_{\sigma\tau} - F_{\varepsilon\lambda} = -2T_{\sigma\tau}$ ή $T_{\sigma\tau} = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{3}$ (3). Σε τυχαία θέση, η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση κίνησης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $\Sigma F_x = T_{\sigma\tau} - F_{\varepsilon\lambda}$ ή, λόγω της σχέσης (3), $\Sigma F_x = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{3} - F_{\varepsilon\lambda} = -\frac{2}{3} F_{\varepsilon\lambda}$ ή $\Sigma F_x = -\frac{2K}{3} \cdot x$. Άρα, το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς: $D = \frac{2K}{3}$ ή $D = 100\ N/m$.

β. Είναι $A = d$ ή $A = 0,2\ m$. Έτσι $\upsilon_{max} = \omega \cdot A = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot A$ ή $\upsilon_{max} = 1\ m/s$.

γ. Πρέπει να ισχύει $T_{\sigma\tau} \le \mu N$ ή $\frac{F_{\varepsilon\lambda}}{3} \le \mu N$ ή $\frac{F_{\varepsilon\lambda.max}}{3} \le \mu N$ ή $\frac{K \cdot A}{3} \le \mu mg$ ή
$\mu \ge \frac{K \cdot A}{3mg}$ ή $\mu_{min} = \frac{K \cdot A}{3mg}$ ή $\mu_{min} = 0,25$.

ΘΕΜΑ 59ο



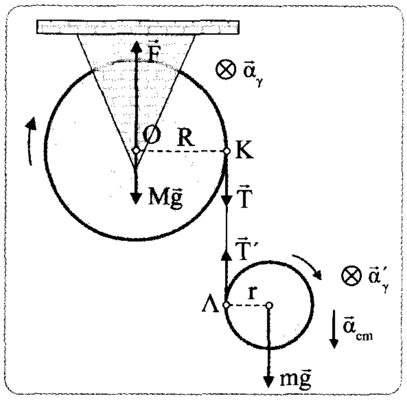
α. Από τον Θ.Ν.Μ. για την κίνηση του σώματος Σ ισχύει: $\Sigma F_y = m_2 \cdot \alpha$ ή $m_2 g - T_2 = m_2 \cdot \alpha$ ή
$T_2 = 30\ N$ και $T_2' = 30\ N$. Από τον Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας ισχύει: $\Sigma\tau = I_{\tau\rho} \cdot \alpha_\gamma'$
ή $\left(T_2' - T_1'\right) \cdot r = I_{\tau\rho} \cdot \alpha_\gamma'$ ή, εφόσον είναι $\alpha = \alpha_\gamma' \cdot r$,
$T_1' = T_2' - I_\tau \cdot \frac{\alpha}{r^2}$ ή $T_1' = 13\ N$. Η μάζα M της τροχαλίας υπολογίζεται από τη σχέση: $I_{\tau\rho} = \frac{1}{2} Mr^2$
ή $M = 8,5\ kg$. Εφόσον η τροχαλία ισορροπεί μεταφορικά, ισχύει: $\Sigma F_y = 0$ ή $F_{\alpha\xi} = Mg + T_1' + T_2'$ ή $F_{\alpha\xi} = 128\ N$.

β. Για το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου (Λ) του δίσκου ισχύει $\alpha_{(\Lambda)} = \alpha$. Όμως, είναι $\alpha_{(\Lambda)} = 2\alpha_{cm}$, όπου α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου. Έτσι, έχουμε $2\alpha_{cm} = \alpha$ ή $\alpha_{cm} = 2\ m/s^2$. Από τον Θ.Ν.Μ. για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου ισχύει: $\Sigma F_y = m_1 \cdot \alpha_{cm}$ ή $T_1 + T_3 - m_1 g = m_1 \cdot \alpha_{cm}$ (1). Από τον Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση του δίσκου ισχύει: $\Sigma\tau = I_\delta \cdot \alpha_\gamma$ ή $\left(T_1 - T_3\right) \cdot R = \frac{1}{2} m_1 R^2 \cdot \alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma \cdot R$, $T_1 - T_3 = \frac{1}{2}m_1 \cdot \alpha_{cm}$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει: $2T_1 - m_1 g = \frac{3}{2}m_1 \cdot \alpha_{cm}$ ή $m_1 = 2$ kg .

γ. Είναι $\omega = \alpha_\gamma \cdot t$ ή $\omega = \frac{\alpha_{cm}}{R}t$ ή $t = 1{,}5$ s. Επομένως, η γωνία στροφής της τροχαλίας στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_0 = t$ είναι: $\theta = \frac{1}{2}\alpha'_\gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r}t^2$ ή $\theta = 45$ rad. Τότε έχουμε $N = \frac{\theta}{2\pi}$ ή $N = \frac{22{,}5}{\pi}$ περιστροφές.

δ. Είναι $h = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t'^2$ ή $t' = 0{,}8$ s . Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ είναι: $\upsilon = \alpha \cdot t'$ ή $\upsilon = 3{,}2\,m/s$.

<u>ΘΕΜΑ 60ο</u>



α. Από τον Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας ισχύει: $\Sigma\tau = I_{\tau\rho} \cdot \alpha_\gamma$ ή $T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_\gamma$ ή $T = \frac{1}{2}MR \cdot \alpha_\gamma$ (1). Οι επιταχύνσεις των σημείων Κ και Λ είναι ίσου μέτρου, αφού το νήμα είναι μη εκτατό. Δηλαδή, ισχύει: $\alpha_K = \alpha_\Lambda$ ή $\alpha_\gamma \cdot R = \alpha_{cm} - \alpha'_\gamma \cdot r$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $T = \frac{1}{2}M \cdot \alpha_{cm} - \frac{1}{2}M \cdot \alpha'_\gamma \cdot r$ (3). Από τον Θ.Ν.Μ. για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου ισχύει: $\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm}$ ή $mg - T' = m \cdot \alpha_{cm}$ ή $mg - T = m \cdot \alpha_{cm}$ (4). Από τον Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση του δίσκου ισχύει: $\Sigma\tau = I_\delta \cdot \alpha'_\gamma$ ή $T' = \frac{1}{2}m \cdot \alpha'_\gamma \cdot r$ ή $T = \frac{1}{2}m \cdot \alpha'_\gamma \cdot r$ (5). Από τις σχέσεις (3) και (5) έχουμε: $\frac{1}{2}m \cdot \alpha'_\gamma \cdot r = \frac{1}{2}M \cdot \alpha_{cm} - \frac{1}{2}M \cdot \alpha'_\gamma \cdot r$ ή $\alpha'_\gamma \cdot r = \frac{M \cdot \alpha_{cm}}{M + m}$ (6). Επομένως, η σχέση (5) μέσω της σχέσης (6) γράφεται: $T = \frac{M \cdot m \cdot \alpha_{cm}}{2(M + m)}$ (7). Από τις σχέσεις (4) και (7) προκύπτει: $mg - \frac{M \cdot m \cdot \alpha_{cm}}{2(M + m)} = m \cdot \alpha_{cm}$ ή $\alpha_{cm} = \frac{2(M + m)}{3M + 2m} \cdot g$ ή $\alpha_{cm} = \frac{25}{3}\,m/s^2$.

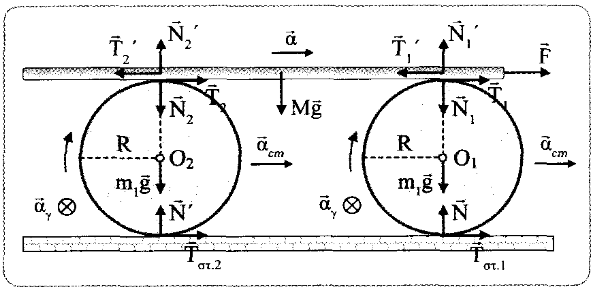
β. Από τις σχέσεις (1) και (5) έχουμε: $\frac{1}{2}MR \cdot \alpha_\gamma = \frac{1}{2}m \cdot \alpha'_\gamma \cdot R$ ή $\frac{\alpha'_\gamma}{\alpha_\gamma} = \frac{MR}{mr}$ ή $\frac{\alpha'_\gamma}{\alpha_\gamma} = \frac{8}{3}$.

γ. Είναι $y = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t_1^2$ ή $y = 0{,}5$ m .

δ. Από τη σχέση (6) προκύπτει: $\alpha'_\gamma = \frac{100}{3}$ rad / s^2. Είναι $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t$ ή $t = 1{,}2$ s . Έτσι, έχουμε: $\theta = \frac{1}{2}\alpha'_\gamma \cdot t^2$ ή $\theta = 24$ rad . Τελικά, ο ζητούμενος αριθμός περιστροφών είναι $N = \frac{\theta}{2\pi}$ ή $N = \frac{12}{\pi}$ περιστροφές.

74

ΘΕΜΑ 61ο



α. Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ της ράβδου και η επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$ των κέντρων μάζας των δύο δίσκων συνδέονται με τη σχέση $\alpha = 2\alpha_{cm}$ ή $\alpha_{cm} = \frac{\alpha}{2}$. Από τον Θ.Ν.Μ. για την κίνηση της ράβδου ισχύει: $\Sigma F_x = M \cdot \alpha$ ή

$F - T_1' - T_2' = M \cdot \alpha$ ή

$F - T_1 - T_2 = M \cdot \alpha$ (1). Από τον Θ.Ν.Μ. για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου ισχύει: $\Sigma F_x = m_1 \cdot \alpha_{cm}$ ή $T_1 + T_{στ1} = m_1 \cdot \frac{\alpha}{2}$ (2). Από τον Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση του δίσκου ισχύει: $\Sigma\tau = I_1 \cdot \alpha_\gamma$ ή $\left(T_1 - T_{στ1}\right) \cdot R = \frac{1}{2} m_1 R^2 \cdot \alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma \cdot R$, $T_1 - T_{στ1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot \alpha_{cm}$ ή $T_1 - T_{στ1} = \frac{m_1 \cdot \alpha}{2}$ (3) Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει: $T_1 = \frac{3m_1 \cdot \alpha}{8}$ (4). Ομοίως, για τον δίσκο (2) ισχύει: $T_2 = \frac{3m_2 \cdot \alpha}{8}$ (5). Η σχέση (1) μέσω των σχέσεων (4) και (5) γράφεται: $F - \frac{3\alpha}{8} \cdot \left(m_1 + m_2\right) = M \cdot \alpha$ ή $\alpha = 2\ m/s^2$.

β. Από τη σχέση (4) προκύπτει: $T_1 = 0{,}75\ N$. Από τη σχέση (2) προκύπτει: $T_{στ1} = 0{,}25\ N$.

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $x_{ράβ} = x_2 + \frac{L}{2}$ ή $\frac{1}{2}\alpha \cdot t_1^2 = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t_1^2 + \frac{L}{2}$ ή

$t_1 = \sqrt{\frac{L}{\alpha - \alpha_{cm}}} = \sqrt{\frac{2L}{\alpha}}$ ή $t_1 = 1\ s$.

δ. Είναι $\omega_1 = \alpha_\gamma \cdot t_1 = \frac{\alpha_{cm}}{R} \cdot t_1 = \frac{\alpha}{2R} \cdot t_1$ ή $\omega_1 = 10\ rad/s$.

ΘΕΜΑ 62ο

α. Η ζητούμενη ροπή αδράνειας είναι: $I_{συστ} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2 = \frac{1}{2}MR^2 + m \cdot \left(\frac{y}{συνθ}\right)^2$ ή $I_{συστ.} = 8{,}9\ kg \cdot m^2$.

β. Από την Α.Δ.Σ. έχουμε: $L_{αρχ} = L_{τελ}$ ή $m \cdot \upsilon \cdot y = I_{συστ} \cdot \omega$ ή $\omega = 9{,}6\ rad/s$.

γ. Είναι $\left|\Delta L_{βλ}\right| = \left|L_{βλ(μετά)} - L_{βλ(πριν)}\right| = \left|mr^2\omega - m\upsilon y\right| = \left|m \cdot \left(\frac{y}{συνθ}\right)^2 \cdot \omega - m\upsilon y\right|$ ή

$\left|\Delta L_{βλ}\right| = 76{,}8\ kg \cdot m^2/s$.

ΘΕΜΑ 63ο

α. Για τα σημεία επαφής των δύο τροχών ισχύει: $\upsilon_1 = \upsilon_2$ ή $\alpha_{\varepsilon(1)} = \alpha_{\varepsilon(2)}$ ή $\alpha_{\gamma_1} \cdot R_1 = \alpha_{\gamma_2} \cdot R_2$ ή $\alpha_{\gamma_1} = 2\alpha_{\gamma_2}$ (1). Από τον Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση των δύο τροχών ισχύει: $\Sigma\tau_{(1)} = I_1 \cdot \alpha_{\gamma_1}$ ή $\tau - F \cdot R_1 = m_1 R_1^2 \cdot \alpha_{\gamma_1}$ (2) και $\Sigma\tau_{(2)} = I_2 \cdot \alpha_{\gamma_2}$ ή $F' \cdot R_2 = m_2 R_2^2 \cdot \alpha_{\gamma_2}$ ή $F = m_2 R_2 \cdot \alpha_{\gamma_2}$ (3). Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει: $\alpha_{\gamma_2} = 3{,}125$ rad/s². Από τη σχέση (3) προκύπτει: $F = 7{,}5$ N.

β. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\alpha_{\gamma_1} = \frac{d\omega}{dt}$ ή $\alpha_{\gamma_1} = 6{,}25$ rad/s².

γ. Είναι: $K_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \cdot \alpha_{\gamma_1}^2 \cdot t_1^2$ ή $t_1 = 2$ s. Έτσι, έχουμε: $L_2 = I_2 \cdot \omega_2 = m_2 R_2^2 \cdot \alpha_{\gamma_2} \cdot t_1$ ή $L_2 = 12$ kg·m²/s.

δ. Ισχύει $K_2 = K_1 + 2$ J ή $\frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2'^2 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1'^2 + 2$ J ή $m_2 R_2^2 \cdot \alpha_{\gamma_2}^2 \cdot t_2^2 = m_1 R_1^2 \cdot \alpha_{\gamma_1}^2 \cdot t_2^2 + 4$ J ή $t_2 = 0{,}8$ s. Έτσι, έχουμε: $\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma_2} \cdot t_2^2$ ή $\theta_2 = 1$ rad.

ΘΕΜΑ 64ο

α. Από το Θ.Ε.Ε. για το σφαιρίδιο έχουμε: $\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 - 0 = mgh$ ή $\upsilon = \sqrt{2gh}$ ή $\upsilon = 20$ m/s. Κατά τη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου η ορμή του συστήματος σφαιρίδιο – σώμα διατηρείται. Έχουμε: $P_{\pi\rho\iota\nu(x)} = P_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}(x)}$ ή $m\upsilon\eta\mu\varphi = (m + M)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 4$ m/s.

β. Η παραμόρφωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος υπολογίζεται ως εξής: $\Sigma F_x = 0$ ή $K\Delta\ell = Mg\eta\mu\varphi$ ή $\Delta\ell = 0{,}15$ m. Η παραμόρφωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη συνθήκη: $\Sigma F_x = 0$ ή $K\Delta\ell' = (M + m)g\eta\mu\varphi$ ή $\Delta\ell' = 0{,}25$ m. Η θέση στην οποία πραγματοποιείται η κρούση αναφορικά με τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος είναι: $x = \Delta\ell' - \Delta\ell$ ή $x = 0{,}1$ m. Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται μέσω της Α.Δ.Ε.Τ. Έχουμε: $E_T = K_T + U_T$ ή $\frac{1}{2} KA^2 = \frac{1}{2}(M + m)\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2} Kx^2$ ή $A = 0{,}9$ m. Το ζητούμενο διάστημα είναι: $s = 3A + x$ ή $s = 2{,}8$ m.

γ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\pi\% = \frac{M\upsilon_\kappa}{m\upsilon} 100\%$ ή $\pi\% = 30\%$.

ΘΕΜΑ 65º

α. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα ράβδος – σφαιρίδιο έχουμε:

$mgd + Mgd = Mg\frac{d}{2} + \frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2$ ή $gd\left(m + \frac{M}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Md^2 + md^2\right)\omega^2$ ή

$\omega = \sqrt{\frac{2(m + M/2)g}{(m + M/3)d}}$ ή $\omega = 5$ rad/s. Η γραμμική ταχύτητα του σφαιριδίου έχει μέτρο:

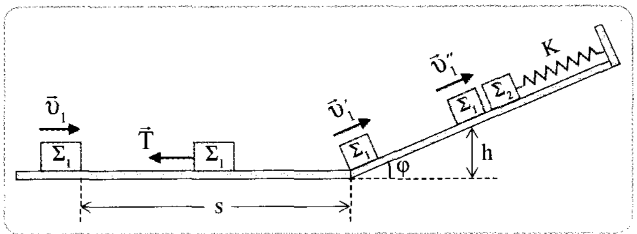
$\upsilon_\gamma = \omega d$ ή $\upsilon_\gamma = 5$ m/s.

β. Από την Α.Δ.Σ. για το σύστημα ράβδος – σφαιρίδιο – σώμα Σ_1 έχουμε: $L_{πριν} = L_{μετά}$ ή

$I_{(O)}\,\omega = I_{(O)}\,\omega' + m_1\upsilon_1 d$ ή $\left(\frac{1}{3}Md^2 + md^2\right)\omega = \left(\frac{1}{3}Md^2 + md^2\right)\omega' + m_1\upsilon_1 d$ (1), όπου ω΄ το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος – σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση και υ_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση επίσης. Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει: $K_{πριν} = K_{μετά}$ ή $\frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{(O)}\omega'^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ (2).

Για διευκόλυνση των πράξεων, αντικαθιστούμε τις τιμές των μεγεθών στις εξισώσεις (1) και (2). Έχουμε: $10 = 2\omega' + \upsilon_1$ (S.I.) και $50 = 2\,\omega'^2 + \upsilon_1^2$ (S.I.). Επιλύοντας το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων, προκύπτει: $\upsilon_1 = \frac{20}{3}$ m/s και $\omega' = \frac{5}{3}$ rad/s.

γ. Από το Θ.Ε.Ε. για το σώμα Σ_1 έχουμε: $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -\mu m_1 g s$ ή $\mu = 0{,}2$.



δ. Από το Θ.Ε.Ε. για το σώμα Σ_1 έχουμε: $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1''^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -m_1 g h$ ή $\upsilon_1'' = 1$ m/s.

Από την Α.Δ.Ο. έχουμε: $m_1\upsilon_1'' = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 0{,}5$ m/s.

ε. Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 ισχύει: $\Sigma F_x = 0$ ή $m_2 g\eta\mu\varphi = K\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0{,}05$ m.

Στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει: $\Sigma F_x = 0$ ή $(m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi = K\Delta\ell'$ ή $\Delta\ell' = 0{,}1$ m. Η κρούση πραγματοποιείται αναφορικά με τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος στη θέση: $x = \Delta\ell' - \Delta\ell$ ή $x = 0{,}05$ m. Από την Α.Δ.Ε.Τ. έχουμε:

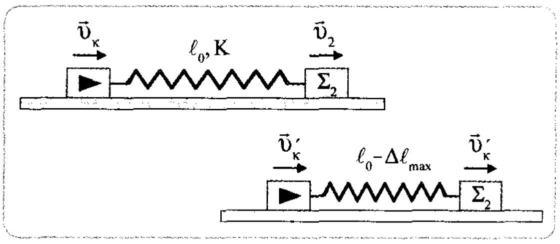
$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}Kx^2$ ή $A = 0{,}05\sqrt{3}$ m. Επειδή είναι $A < \Delta\ell'$, συμπεραίνουμε ότι το συσσωμάτωμα **δεν** διέρχεται στη διάρκεια της ταλάντωσής του από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου.

ΘΕΜΑ 66º

α. Για την πλαστική κρούση του βλήματος με το σώμα Σ_1 ισχύει:

$m \cdot \upsilon_0 + m_1 \cdot \upsilon_1 = (m + m_1) \cdot \upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 10$ m/s. Επομένως, είναι: $K = \frac{1}{2}(m + m_1) \cdot \upsilon_\kappa^2$ ή $K = 50$ J.

β. Όταν το σύστημα βλήμα – σώμα Σ_1 παύει να πλησιάζει το σώμα Σ_2, με τη βοήθεια της Α.Δ.Ο. προκύπτει:



$(m + m_1) \cdot \upsilon_\kappa + m_2 \cdot \upsilon_2 = (m + m_1 + m_2) \cdot \upsilon'_\kappa$

ή $\upsilon'_\kappa = 2{,}8$ m/s.

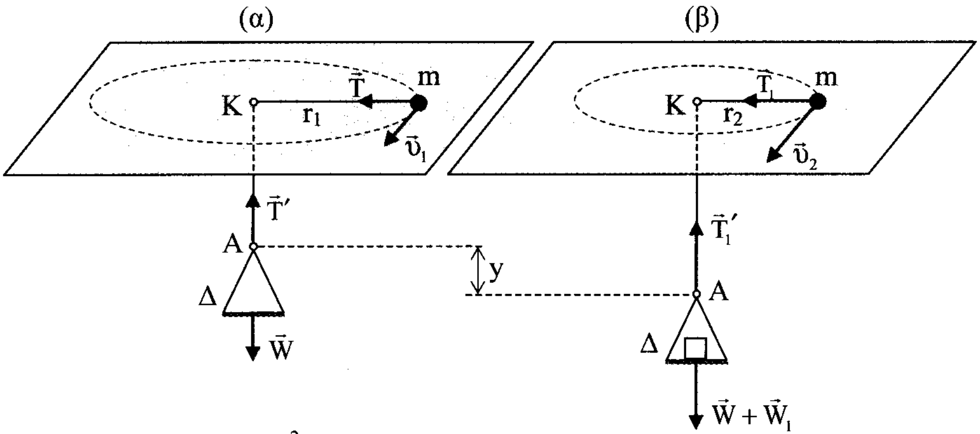
γ. Από την Α.Δ.Μ.Ε έχουμε: $\frac{1}{2}(m + m_1) \cdot \upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 = \frac{1}{2}(m + m_1 + m_2) \cdot \upsilon_\kappa'^2 + \frac{1}{2} K \cdot \Delta\ell_{max}^2$

ή $\Delta\ell_{max} = 0{,}4$ m.

δ. Είναι $\kappa = \frac{\Delta P_2}{P_2} = \frac{P'_2 - P_2}{P_2} = \frac{\upsilon'_\kappa}{\upsilon_2} - 1$ ή $\kappa = 1{,}8$.

ΘΕΜΑ 67º

α. Όπως φαίνεται στο σχήμα α, η δύναμη $\vec{T}$ που ασκεί το νήμα στο σφαιρίδιο λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη. Εάν υ_1 είναι το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου, ισχύει η σχέση:



$F_\kappa = T$ ή $m\frac{\upsilon_1^2}{r_1} = T'$ ή, επειδή ο δίσκος ισορροπεί ακίνητος,

$$m\frac{\upsilon_1^2}{r_1} = Mg \quad ή \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{Mgr_1}{m}} \quad ή \quad \upsilon_1 = 5 \text{ m/s}$$

Το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο Κ της τροχιάς του και είναι κάθετος στο επίπεδό της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_1 = m\upsilon_1 r_1 \quad ή \quad L_1 = 2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

β. Όπως φαίνεται στο σχήμα β, η δύναμη $\vec{T}_1$ που ασκεί το νήμα στο σφαιρίδιο λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη. Εάν υ_2 είναι το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου, ισχύει η σχέση:

$$F_\kappa = T_1 \quad ή \quad m\frac{\upsilon_2^2}{r_2} = T_1' \quad ή, \text{ επειδή ο δίσκος ισορροπεί ακίνητος,}$$

$$m\frac{\upsilon_2^2}{r_2} = W + W_1 \quad ή \quad m\frac{\upsilon_2^2}{r_2} = (M + m_1)g \quad \textbf{(1)}$$

Η δύναμη που ασκεί το νήμα στο σώμα δεν δημιουργεί ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου και είναι κάθετος σε αυτήν, επειδή ο φορέας της διέρχεται από το σημείο Κ. Έτσι, η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς τον προαναφερθέντα άξονα διατηρείται. Έχουμε:

$$L_1 = L_2 \quad ή \quad m\upsilon_1 r_1 = m\upsilon_2 r_2 \quad ή \quad r_2 = \frac{\upsilon_1 r_1}{\upsilon_2} \quad \textbf{(2)}$$

Η σχέση (1) μέσω της σχέσης (2) γράφεται:

$$m\frac{\upsilon_2^3}{\upsilon_1 r_1} = (M + m_1)g \quad ή \quad \upsilon_2 = \sqrt[3]{\frac{(M + m_1)g\upsilon_1 r_1}{m}} \quad ή \quad \upsilon_2 = 10 \text{ m/s}$$

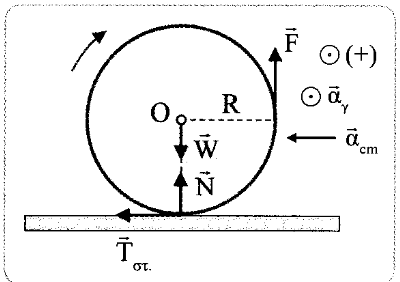
γ. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$r_2 = 0{,}5 \text{ m}$$

Η ζητούμενη απόσταση είναι:

$$y = r_1 - r_2 \quad ή \quad y = 0{,}5 \text{ m}$$

<u>ΘΕΜΑ 68ο</u>



α. Η μοναδική δύναμη που δέχεται ο δίσκος στην οριζόντια διεύθυνση είναι η στατική τριβή $\vec{T}_{στ}$. Επομένως, η στατική τριβή θα πρέπει να επιβραδύνει μεταφορικά τον δίσκο, καθώς αυτός μετατοπίζεται προς τα δεξιά. Κατά συνέπεια, όπως απεικονίζεται στο σχήμα, η στατική τριβή έχει φορά προς τα αριστερά.

β. Για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου ισχύει:
$T_{στ} = M\cdot\alpha_{cm}$ (1). Για τη στροφική κίνηση του δίσκου ισχύει: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_\gamma$ ή $F\cdot R - T_{στ}\cdot R = \frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma\cdot R$, $F - T_{στ} = \frac{1}{2}M\cdot\alpha_{cm}$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει: $F = \frac{3}{2}M\cdot\alpha_{cm}$ ή $\alpha_{cm} = 5 \text{ m/s}^2$. Έτσι, $\alpha_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R}$ ή $\alpha_\gamma = 5 \text{ rad/s}^2$. Ο δίσκος ακινητοποιείται τη χρονική στιγμή: $t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha_\gamma}$ ή $t_1 = 4 \text{ s}$.

79

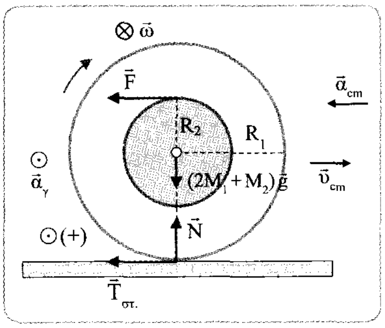
γ. Ισχύει $\Sigma F_y = 0$ ή $F + N = Mg$ ή $N = 5\ N$. Από τη σχέση (1) προκύπτει $T_{\sigma\tau} = 10\ N$. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το επίπεδο στον δίσκο είναι: $F_\delta = \sqrt{N^2 + T_{\sigma\tau}^2}$ ή $F_\delta = 5\sqrt{5}\ N$.

δ. Πρέπει $T_{\sigma\tau} \le \mu N$ ή $M \cdot \alpha_{cm} \le \mu N$ ή $\frac{2F}{3} \le \mu N$ ή $\mu \ge \frac{2F}{3N}$ ή $\mu_{min} = \frac{2F}{3N}$ ή $\mu_{min} = 2$.

ΘΕΜΑ 69ο

α. Είναι $\upsilon_1 = 2\upsilon_{cm1}$ ή $\upsilon_{cm1} = 5\ m/s$. Όμως $\upsilon_{cm1} = \omega_1 \cdot R_1$ ή $\omega_1 = 5\ rad/s$. Έτσι $\alpha_\gamma = \frac{|\Delta\omega|}{t_1}$ ή $\alpha_\gamma = 1\ rad/s^2$.

β. Η ροπή αδράνειας του καρουλιού ως προς τον άξονα που διέρχεται από τα κέντρα μάζας των δίσκων είναι:



$I = 2I_\delta + I_{\kappa\upsilon\lambda}$ ή $I = 2 \cdot \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2$ ή

$I = 2{,}5\ kg \cdot m^2$.

Για τη μεταφορική κίνηση του καρουλιού ισχύει:

$\Sigma F = (2M_1 + M_2) \cdot \alpha_{cm}$ ή $F + T_{\sigma\tau} = (2M_1 + M_2) \cdot \alpha_{cm}$

ή $F + T_{\sigma\tau} = (2M_1 + M_2) \cdot \alpha_\gamma \cdot R_1$ ή

$F \cdot R_1 + T_{\sigma\tau} \cdot R_1 = (2M_1 + M_2) \cdot \alpha_\gamma \cdot R_1^2$ (1), όπου $T_{\sigma\tau}$ το μέτρο της συνισταμένης τριβής που δέχεται το καρούλι από το οριζόντιο επίπεδο. Για τη στροφική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_\gamma$ ή $F \cdot R_2 - T_{\sigma\tau} \cdot R_1 = I \cdot \alpha_\gamma$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει: $F(R_1 + R_2) = (2M_1R_1^2 + M_2R_1^2 + I) \cdot \alpha_\gamma$ ή $F = 7\ N$.

γ. Το καρούλι ακινητοποιείται τη χρονική στιγμή $t_3 = \frac{\omega_0}{\alpha_\gamma}$ ή $t_3 = 10\ s$. Έως τη χρονική στιγμή $t_3 - 2\ s = 8\ s$, το καρούλι έχει στραφεί κατά $\Delta\theta = \omega_0 \cdot (t_3 - 2\ s) - \frac{1}{2}\alpha_\gamma \cdot (t_3 - 2\ s)^2$ ή $\Delta\theta = 48\ rad$. Έτσι, $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ ή $N = \frac{24}{\pi}$ περιστροφές.

δ. Το μέτρο της ταχύτητας κάθε σημείου της οριζόντιας διαμέτρου των δίσκων υπολογίζεται από τη σχέση: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \omega^2 r^2} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{cm}^2 \cdot \frac{r^2}{R_1^2}}$ ή $\upsilon = \upsilon_{cm} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{R_1^2}}$. Η προηγούμενη σχέση δίνει μέγιστο αποτέλεσμα για $r = R_1$, δηλαδή στα σημεία (2) της οριζόντιας διαμέτρου του δίσκου τα οποία βρίσκονται στην περιφέρειά του. Έτσι, $\upsilon_{max} = \upsilon_{cm}\sqrt{1 + \frac{R_1^2}{R_1^2}} =$ $\upsilon_{cm} \cdot \sqrt{2} = \alpha_{cm} \cdot t_2 \cdot \sqrt{2} = \alpha_\gamma \cdot R_1 \cdot t_2 \cdot \sqrt{2}$ ή $\upsilon_{max} = 5\sqrt{2}\ m/s$.

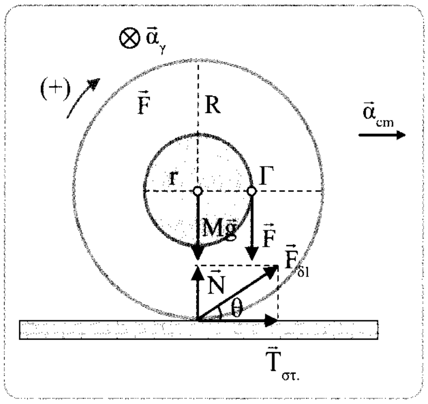
ΘΕΜΑ 70ο

α. Ισχύει η σχέση $\upsilon_{\kappa\alpha\tau\acute{\omega}\tau.} = \upsilon_{cm} - \omega \cdot r = \omega \cdot R - \omega \cdot r$ ή $\omega = 50\ rad/s$. Επομένως, είναι $\upsilon_{\alpha\nu\acute{\omega}\tau.} = \upsilon_{cm} + \omega \cdot r = \omega \cdot R + \omega \cdot r$ ή $\upsilon_{\alpha\nu\acute{\omega}\tau.} = 35\ m/s$.

β. Είναι $I = 2I_\delta + I_K = 2 \cdot 0 + \frac{1}{2}M \cdot r^2$ ή $I = 0{,}08\ kg \cdot m^2$.

80

γ. Για τη μεταφορική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cm}$ ή $T_{\sigma\tau} = M\cdot\alpha_{cm}$ (1), όπου $T_{\sigma\tau}$ η συνισταμένη στατική τριβή που δέχεται το καρούλι από το οριζόντιο επίπεδο. Για τη στροφική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_\gamma$ ή $F\cdot r - T_{\sigma\tau}\cdot R = I\cdot\alpha_\gamma$ (2).



Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$F\cdot r - M\cdot\alpha_{cm}\cdot R = I\cdot\alpha_\gamma$ ή $F = \dfrac{\left(I+MR^2\right)\cdot\alpha_\gamma}{r}$ (3).

Όμως $\alpha_\gamma = \dfrac{\omega}{t_1}$ ή $\alpha_\gamma = 25\ rad/s^2$. Από τη σχέση (3) προκύπτει $F = 135\ N$. Από τη σχέση (1) έχουμε:

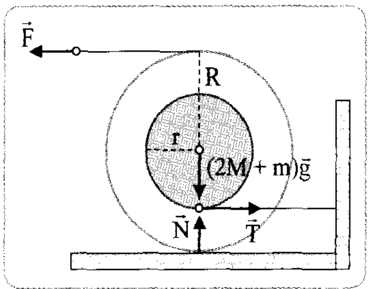
$T_{\sigma\tau} = M\cdot\alpha_{cm}$ ή $T_{\sigma\tau} = M\cdot\alpha_\gamma\cdot R$ ή $T_{\sigma\tau} = 50\ N$.

Ισχύει: $\Sigma F_y = 0$ ή $F + Mg = N$ ή $N = 175\ N$, όπου $N_{o\lambda}$ η συνισταμένη κάθετη αντίδραση που δέχεται το καρούλι από το επίπεδο. Έτσι, το μέτρο της δύναμης που ασκεί το επίπεδο στο καρούλι είναι: $F_\delta = \sqrt{T_{\sigma\tau}^2 + N^2} = 25\sqrt{53}\ N$ ή $F_\delta = 182{,}5\ N$ και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{N}{T_{\sigma\tau}}$ ή $\varepsilon\varphi\theta = 3{,}5$.

δ. Είναι $\upsilon' = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \omega^2\cdot r^2} = \omega\cdot\sqrt{R^2+r^2} = \alpha_\gamma\cdot t_2\cdot\sqrt{R^2+r^2}$ ή $t_2 = \dfrac{\upsilon'}{\alpha_\gamma\cdot\sqrt{R^2+r^2}}$ ή $t_2 = 4\ s$.

<u>ΘΕΜΑ 71ο</u>

α. Για τη μεταφορική κίνηση του καρουλιού ισχύει:
$\Sigma F = (2M+m)\cdot\alpha_{cm}$ ή $2F - T = (2M+m)\cdot\alpha_{cm}$ (1). Για τη στροφική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_\gamma$ ή $2F\cdot R + T\cdot r = \left(2\cdot\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2\right)\cdot\alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma\cdot r$, $2F\cdot R - T\cdot r = \left(MR^2 + \frac{1}{2}mr^2\right)\cdot\dfrac{\alpha_{cm}}{r}$ (2).



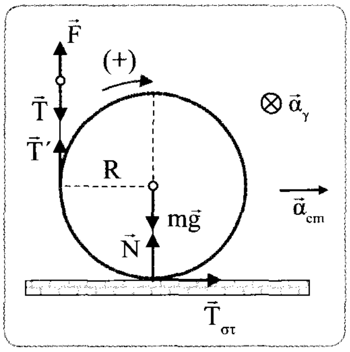
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $2F\cdot(R+r) = \alpha_{cm}\cdot\left(M\cdot\dfrac{R^2}{r} + \dfrac{3}{2}m\cdot r + 2M\cdot r\right)$ ή $\alpha_{cm} = 1{,}6\ m/s^2$.

β. Από τη σχέση (1) προκύπτει $T = 0{,}8\ N$.

γ. Είναι $\alpha_\kappa = \omega^2\cdot r = \alpha_\gamma^2\cdot t_1^2\cdot r = \dfrac{\alpha_{cm}^2}{r^2}\cdot t_1^2\cdot r = \dfrac{\alpha_{cm}^2\cdot t_1^2}{r}$ ή $\alpha_\kappa = 6{,}4\ m/s^2$.

δ. Είναι $\Delta\upsilon_{\alpha\nu\acute{\omega}\tau} = \alpha_{\alpha\nu\acute{\omega}\tau}\cdot\Delta t = \left(\alpha_{cm} + \alpha_\gamma\cdot R\right)\cdot(t_2 - t_1) = \left(\alpha_{cm} + \dfrac{\alpha_{cm}}{r}\cdot R\right)\cdot(t_2 - t_1)$ ή $\Delta\upsilon = 20\ m/s$.

ΘΕΜΑ 72ο



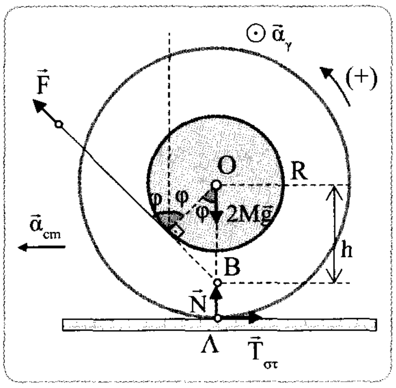
α. Για τη μεταφορική κίνηση του τροχού ισχύει: $\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm}$ ή $T_{\sigma\tau} = m\alpha_\gamma \cdot R$ (1). Για τη στροφική κίνηση του τροχού ισχύει: $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_\gamma$ ή $T' \cdot R - T_{\sigma\tau} \cdot R = I \cdot \alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι $T' = T$ και $F = T$, $F \cdot R - T_{\sigma\tau} \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha_\gamma$ ή $F - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} mR \cdot \alpha_\gamma$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει: $F = \frac{3}{2} mR \cdot \alpha_\gamma$ ή $m = 4\,kg$.

β. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $T_{\sigma\tau} = 4$ N.

γ. Είναι $\omega = \alpha_\gamma \cdot t_1$ ή $t_1 = 3$ s. Επομένως, είναι $x = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t_1^2 = \frac{1}{2}\alpha_\gamma \cdot R \cdot t_1^2$ ή $x = 4{,}5$ m.

δ. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $T_{\sigma\tau} = \frac{2F}{3}$ (3). Ακόμη ισχύει: $\Sigma F_y = 0$ ή $F + N = mg$ ή $N = mg - F$ (4). Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο τροχός, πρέπει να ισχύει: $T_{\sigma\tau} \le \mu N$ ή, μέσω των σχέσεων (3) και (4): $\frac{2F}{3} \le \mu \cdot (mg - F)$ ή $\frac{2F}{3} + \mu F \le \mu mg$ ή $F \cdot \left(\frac{2}{3} + \mu\right) \le \mu mg$ ή $F \le \frac{\mu mg}{\frac{2}{3} + \mu}$ ή $F_{max} = \frac{\mu mg}{\frac{2}{3} + \mu}$ ή $F_{max} = 8$ N.

ΘΕΜΑ 73ο



α. Η ευθεία του νήματος τέμνει την κατακόρυφο σε σημείο Β το οποίο απέχει απόσταση h από τον κεντρικό άξονα του καρουλιού. Ισχύει η σχέση: $h = \frac{r}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$ ή $h = 0{,}25\sqrt{2}$ m. Παρατηρούμε ότι είναι $h < R$. Ως προς το σημείο Λ, η μοναδική μη μηδενική ροπή είναι αυτή της δύναμης $\vec{F}$. Η παραπάνω ροπή στρέφει το καρούλι αριστερόστροφα και, συνεπώς, το καρούλι μετακινείται προς τα αριστερά.

β. Για τη μεταφορική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma F = 2M \cdot \alpha_{cm}$ ή $F \cdot \eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} = 2M \cdot \alpha_{cm}$ (1), όπου $T_{\sigma\tau}$ το μέτρο της συνισταμένης στατικής τριβής που δέχεται το καρούλι από το δάπεδο. Για τη στροφική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma\tau_{(O)} = I_{(O)} \cdot \alpha_\gamma$ ή $T_{\sigma\tau} \cdot R - F \cdot r = 2 \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_\gamma$ ή $T_{\sigma\tau} \cdot R - F \cdot r = MR^2 \cdot \alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma \cdot R$, $T_{\sigma\tau} \cdot R - F \cdot r = M \cdot \alpha_{cm} \cdot R$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $F \cdot R \cdot \eta\mu\varphi - F \cdot r = 3M \cdot \alpha_{cm} \cdot R$ ή $\alpha_{cm} = \frac{F(R \cdot \eta\mu\varphi - r)}{3MR}$ ή $\alpha_{cm} = 1\ m/s^2$. Έτσι, $\alpha_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R}$ ή $\alpha_\gamma = 2\ rad/s^2$.

γ. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $T_{\sigma\tau} = 17$ N.

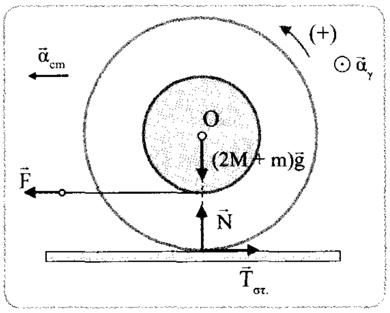
δ. Είναι $\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \omega \cdot r = \omega \cdot (R + r) = \alpha_\gamma \cdot t_1 \cdot (R + r)$ ή $\upsilon_A = 3$ m/s.

ΘΕΜΑ 74ο

α. Είναι $I = 2I_\delta + I_\kappa = 2\cdot\frac{1}{2}M\cdot R^2 + \frac{1}{2}m\cdot r^2$ ή $I = 0,25\ kg\cdot m^2$.

β. Για τη μεταφορική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma F = (2M+m)\cdot\alpha_{cm}$ ή

$F - T_{\sigma\tau} = (2M+m)\cdot\alpha_{cm}$ (1), όπου $T_{\sigma\tau}$ το μέτρο της συνισταμένης στατικής τριβής που δέχεται το καρούλι από το επίπεδο.



Για τη στροφική κίνηση του καρουλιού ισχύει:

$\Sigma\tau_{(O)} = I\cdot\alpha_\gamma$ ή $T_{\sigma\tau}\cdot R - F\cdot r = I\cdot\alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι

$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma\cdot R$, $T_{\sigma\tau}\cdot R - F\cdot r = I\cdot\frac{\alpha_{cm}}{R}$ (2). Από τις σχέσεις

(1) και (2) προκύπτει: $F(R-r) = \left[(2M+m)\cdot R + \frac{I}{R}\right]\alpha_{cm}$

ή $F = 105\ N$.

γ. Είναι $\alpha_\kappa = \omega^2\cdot r = \alpha_\gamma^2\cdot t_1^2\cdot r = \frac{\alpha_{cm}^2}{R^2}\cdot t_1^2\cdot r$ ή $\alpha_\kappa = 2,5\ m/s^2$.

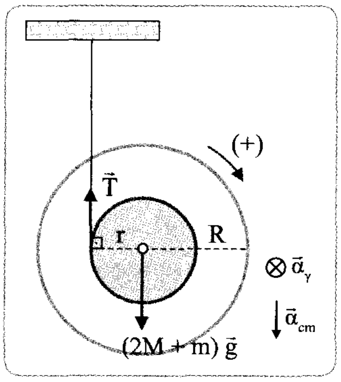
δ. $\Delta\upsilon_{\alpha\nu\acute{\omega}\tau.} = \alpha_{\alpha\nu\acute{\omega}\tau}\cdot(t_2 - t_1) = 2\alpha_{cm}\cdot(t_2 - t_1)$ ή $\Delta\upsilon_{\alpha\nu\acute{\omega}\tau.} = 10$ m/s.

ΘΕΜΑ 75ο

α. Έστω m η μάζα του κυλίνδρου του καρουλιού. Η ροπή αδράνειας του καρουλιού είναι: $I = 2\cdot\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$ ή

$I = MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$ (1). Για τη μεταφορική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma F = (2M+m)\cdot\alpha_{cm}$ ή

$(2M+m)\cdot g - T = (2M+m)\cdot\alpha_{cm}$ (2). Για τη στροφική κίνηση του καρουλιού ισχύει: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_\gamma$ ή $T\cdot r = I\cdot\alpha_\gamma$ ή, εφόσον είναι $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma\cdot R$, $T = I\cdot\frac{\alpha_{cm}}{r^2}$ (3). Από τις σχέσεις (2) και



(3) προκύπτει: $(2M+m)\cdot g - I\cdot\frac{\alpha_{cm}}{r^2} = (2M+m)\cdot\alpha_{cm}$ ή

$2Mg + mg - \frac{I}{r^2}\cdot\alpha_{cm} = 2M\cdot\alpha_{cm} + m\cdot\alpha_{cm}$ ή $m\cdot(g-\alpha_{cm}) = 2M\cdot(\alpha_{cm} - g) + \frac{I}{r^2}\cdot\alpha_{cm}$ ή $m = 0$.

β. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $R = \sqrt{\frac{I}{M}}$ ή $R = 0,8\ m$.

γ. Το μήκος το νήματος που ξετυλίγεται υπολογίζεται από τη σχέση $\Delta\ell = \Delta\theta\cdot r$, ενώ το μήκος του τόξου που διανύει ένα σημείο της περιφέρειας ενός δίσκου είναι $\Delta s = \Delta\theta\cdot R$. Επομένως, είναι $\frac{\Delta s}{\Delta\ell} = \frac{R}{r}$ ή $\frac{\Delta s}{\Delta\ell} = 2$ ή, για κάθε μέτρο νήματος που ξετυλίγεται $(\Delta\ell = 1\ m)$ ένα σημείο της περιφέρειας ενός δίσκου του καρουλιού διανύει μήκος τόξου $\Delta s = 2\ m$.

δ. Ισχύει: $\frac{dN}{dt} = f = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\alpha_\gamma\cdot t_1}{2\pi} = \frac{\alpha_{cm}\cdot t_1}{2\pi\cdot r}$ ή $\frac{dN}{dt} = 1,25$ περιστροφές/s.

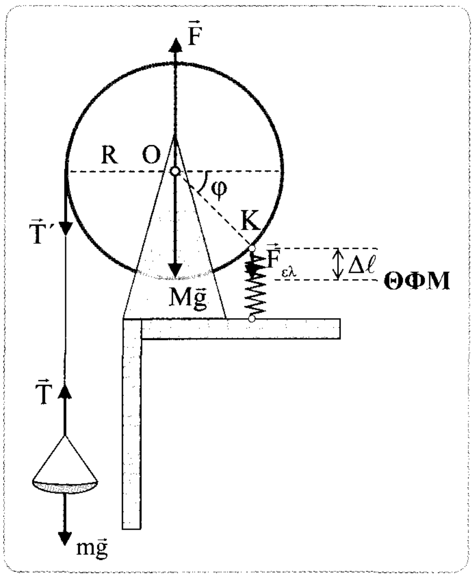
ΘΕΜΑ 76ο

είναι $T''' = T''$, $T'' - K\cdot\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}MR\cdot\alpha'_\gamma$ ή $T'' - K\cdot\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}M\cdot\alpha$ (3). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3), προκύπτει:

$(m+m')\cdot g - K\cdot\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \left(m+m'+\frac{1}{2}M\right)\cdot\alpha$ ή $\alpha = 1{,}6\ m/s^2$.

Έτσι $\alpha'_\gamma = \frac{\alpha}{R}$ ή $\alpha'_\gamma = 4\ rad/s^2$.

α. Επειδή ο δίσκος Δ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma F_y = 0$ ή $T = mg$ ή $T = 60\ N$. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{T'(O)} + \tau_{F_{\varepsilon\lambda}(O)} = 0$ ή $\tau_{F_{\varepsilon\lambda}(O)} = -\tau_{T'(O)}$ (1). Επειδή η δύναμη $\vec{T}'$ του νήματος τείνει να περιστρέφει την τροχαλία αριστερόστροφα, η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$, σύμφωνα με τη σχέση (1), τείνει να περιστρέψει την τροχαλία δεξιόστροφα. Επομένως, η $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ έχει φορά προς τα κάτω. Άρα, η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι κάτω από το σημείο Κ και, συνεπώς, το ελατήριο είναι επιμηκυμένο. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $T'\cdot R = F_{\varepsilon\lambda}\cdot R\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$ ή,



εφόσον είναι $T' = T$, $T = K\cdot\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$ ή $\Delta\ell = 0{,}25\ m$. Η αποθηκευμένη ενέργεια στο ελατήριο είναι: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}K\cdot\Delta\ell^2$ ή $U_{\varepsilon\lambda} = 12{,}5\ J$.

β. **i.** Αν κόψουμε το νήμα που συγκρατεί τον δίσκο Δ, από τον νόμο της στροφικής κίνησης προκύπτει: $\Sigma\tau_{(O)} = I\cdot\alpha_\gamma$ ή $F_{\varepsilon\lambda}\cdot R\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_\gamma$ ή $K\cdot\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}MR\cdot\alpha_\gamma$ ή $\alpha_\gamma = 10\ rad/s^2$.

ii. Για την κίνηση του συστήματος δίσκος – σώμα ισχύει: $\Sigma F = (m+m')\cdot\alpha$ ή $(m+m')\cdot g - T'' = (m+m')\cdot\alpha$ (2). Από τον νόμο της στροφικής κίνησης για την περιστροφή της τροχαλίας έχουμε: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha'_\gamma$ ή $T'''\cdot R - F_{\varepsilon\lambda}\cdot R\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha'_\gamma$ ή, εφόσον

είναι $T''' = T''$, $T'' - K\cdot\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}MR\cdot\alpha'_\gamma$ ή $T'' - K\cdot\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}M\cdot\alpha$ (3). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3), προκύπτει:

$(m+m')\cdot g - K\cdot\Delta\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \left(m+m'+\frac{1}{2}M\right)\cdot\alpha$ ή $\alpha = 1{,}6\ m/s^2$.

Έτσι $\alpha'_\gamma = \frac{\alpha}{R}$ ή $\alpha'_\gamma = 4\ rad/s^2$.

ΘΕΜΑ 77ο

α. Τα σημεία της περιφέρειας των δύο τροχών έχουν ίδια επιτρόχια ταχύτητα, αφού έρχονται σε επαφή χωρίς να ολισθαίνει το ένα σε σχέση με το άλλο. Επομένως, ισχύει $\upsilon_1 = \upsilon_2$ ή $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ ή $f_1 R_1 = f_2 R_2$, από την οποία προκύπτει ότι $f_2 = 12$ Hz.

β. Η ταχύτητα των σημείων Κ και Λ (και κάθε άλλου σημείου της περιφέρειας των τροχών), θα έχει μέτρο $\upsilon = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = 2\pi f_1 R_1 = 4{,}8\pi$ m/s.

γ. Όταν τα σημεία Κ και Λ βρεθούν ξανά σε χρόνο t στο ίδιο σημείο, ο τροχός R_1 θα έχει εκτελέσει N_1 στροφές και ο τροχός R_2 θα έχει εκτελέσει N_2 στροφές.

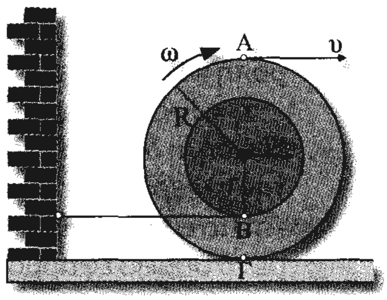
Θα ισχύει $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{f_1 t}{f_2 t} \Rightarrow \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

(Δεν ξεχνάμε ότι στην ομαλή στροφική κίνηση ισχύει $f = \dfrac{N}{t}$).

Επομένως, ο τροχός R_1 έχει εκτελέσει 2 περιστροφές και ο R_2 έχει εκτελέσει 3 περιστροφές. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι $t = N_1/f_1 = 2/8 = 0{,}25$ s.

δ. $\dfrac{\alpha_K}{\alpha_\Lambda} = \dfrac{\omega_2^2 R_2}{\omega_1^2 R_1} = \dfrac{f_2^2 R_2}{f_1^2 R_1} = \dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{3}{2}$

ΘΕΜΑ 78ο



α. Το ανώτερο σημείο της περιφέρειας του τροχού έχει ταχύτητα $\upsilon_A = \upsilon = \upsilon_{cm} + \omega R$ (1).
Το σημείο Β έχει ταχύτητα ίδια με την ταχύτητα των σημείων του νήματος που είναι δεμένο στον τοίχο και άρα θα είναι:

$$\upsilon_B = 0 = \upsilon_{cm} - \omega r, \text{ άρα } \omega = \frac{\upsilon_{cm}}{r} \quad (2)$$

Αντικαθιστούμε την (2) στην (1) και βρίσκουμε:

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \frac{R}{r}\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm}\frac{R+r}{r} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{r}{R+r}\upsilon$$

Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε $\upsilon_{cm} = 0{,}4$ m/s.
Η ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το δάπεδο είναι:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} - \omega R = \upsilon_{cm} - \frac{R}{r}\upsilon_{cm} = \upsilon_{cm}\frac{r-R}{r} = -0{,}4 \text{ m/s}$$

β. Από τη (2) βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού που είναι:

$$\omega = 0{,}4/0{,}1 = 4 \text{ rad/s}$$

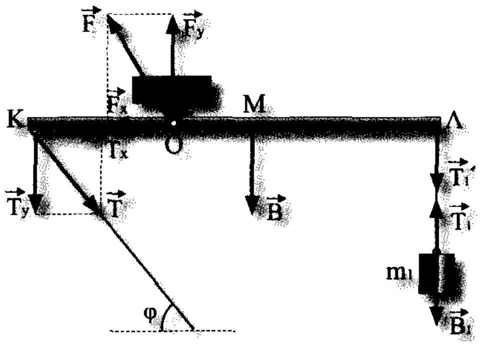
γ. Σε Ν περιστροφές του τροχού ξετυλίγεται νήμα μήκους $\Delta L_1 = N2\pi R$ από την εξωτερική περιφέρεια και $\Delta L_2 = N2\pi r$ από την εσωτερική περιφέρεια. Η μετατόπιση του τροχού ισούται με την αύξηση του μήκους του νήματος που είναι δεμένο στο σταθερό τοίχο, άρα θα είναι $S = \Delta L_2$. Θα είναι λοιπόν:

$$N = \frac{\Delta L_1}{2\pi R} = \frac{\Delta L_2}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \Delta L_2 = \frac{r}{R}\Delta L_1 = 1\ \text{m}$$

δ. Η επιτρόχια ταχύτητα των σημείων της εξωτερικής περιφέρειας του τροχού είναι $\upsilon_{\varepsilon\pi} = \omega R = 0{,}8$ m/s. Στο σημείο Σ που απέχει 20 cm από το δάπεδο η ταχύτητα υ_{cm} και η επιτρόχια ταχύτητα $\upsilon_{\varepsilon\pi}$ έχουν κάθετες διευθύνσεις και επομένως το Σ έχει ταχύτητα $\upsilon_{\Sigma} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\varepsilon\pi}^2} = 0{,}4\sqrt{5}$ m/s.

ΘΕΜΑ 79ο

α. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ενεργούν στη ράβδο και στο βαρίδι.



Στο βαρίδι ενεργούν το βάρος του $B_1 = m_1 g$ και η τάση T_1 του νήματος.
Αφού το βαρίδι ισορροπεί, θα ισχύει:

$T_1 = m_1 g = 40$ N (1)

Στη ράβδο ασκούνται:

- το βάρος της $B = mg = 20$N.
- η τάση $T'_1 = 40$ N.
- η τάση T του νήματος ΚΝ, την οποία αναλύουμε σε δύο συνιστώσες: $T_x = T\sigma\upsilon\nu 60^\circ$ και $T_y = T\eta\mu 60^\circ$
- η δύναμη F από τον άξονα περιστροφής Ο, την οποία αναλύουμε σε F_y και F_x.

Η συνθήκη ισορροπίας της ράβδου γράφεται:

$\Sigma F_x = 0$, δηλαδή $T_x - F_x = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0$, δηλαδή $F_y - T_y - B - T'_1 = 0$ (2)

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$, δηλαδή $T_y(KO) - B(MO) - T'_1(\Lambda O) = 0$ (3)

Από την τελευταία προκύπτει:

$0{,}2T_y = 20\cdot 0{,}1 + 40\cdot 0{,}4 = 2 + 16 = 18$ Nm και άρα $T_y = 90$ N

Επομένως, η τάση T θα έχει μέτρο $T = \dfrac{T_y}{\eta\mu 60^\circ} = \dfrac{90\ \text{N}}{\sqrt{3/2}} = 60\sqrt{3}$ N.

β. Από την (1) έχουμε $F_x = T_x = T\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 30\sqrt{3}$ N.

Από τη (2) έχουμε $F_y = T_y + B + T'_1 = 90\ \text{N} + 20\ \text{N} + 40\ \text{N} = 150$ N

Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον άξονα θα έχει μέτρο:

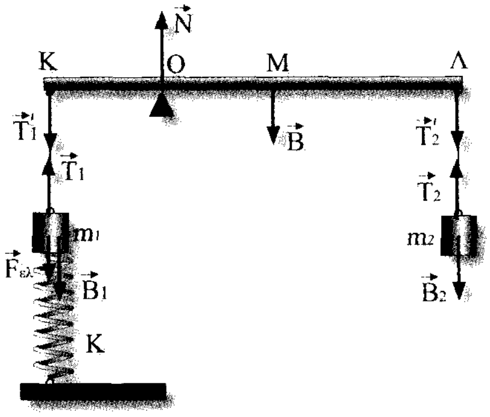
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 60\sqrt{7}\,\text{N}$$

γ. Αν κόψουμε το νήμα στο σημείο Λ, η συνθήκη ισορροπίας των ροπών θα γίνει:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$, δηλαδή $T'_y(KO) - B(MO) = 0$, άρα $T'_y = 10$ N

Επομένως, θα είναι $T' = \dfrac{T'_y}{\eta\mu 60^\circ} = \dfrac{10\ \text{N}}{\sqrt{3/2}} = \dfrac{20}{3}\sqrt{3}$ N.

ΘΕΜΑ 80ο



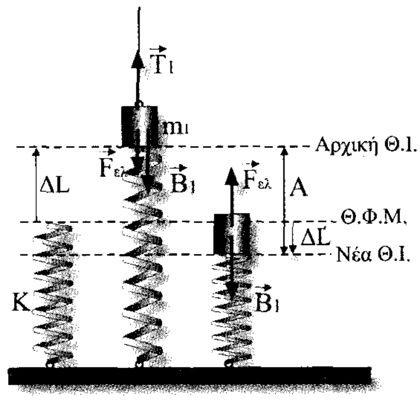
α. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις πάνω στα σώματα του συστήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Για το βαρίδι m_1 ισχύει:
$\Sigma F = 0$, άρα $F_{\varepsilon\lambda} + m_1 g - T_1 = 0$ (1)
(Υποθέσαμε ότι το ελατήριο είναι τεντωμένο.)
Για το βαρίδι m_2 ισχύει:
$\Sigma F = 0$, άρα $m_2 g - T_2 = 0 \Rightarrow$
$T_2 = m_2 g = 60$ N (2)
Για τη ράβδο ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \;\Rightarrow\; T'_1(KO) - B(MO) - T'_2(\Lambda O) = 0 \Rightarrow$$

$$0{,}5 \cdot T'_1 = 0{,}5 \cdot B + 1{,}5 \cdot T'_2 \;\Rightarrow\; T'_1 = 200 \text{ N}$$

β. Από την (1) βρίσκουμε $F_{\varepsilon\lambda} = T_1 - m_1 g = 160$ N. Όμως, $F_{\varepsilon\lambda} = K\Delta L$, οπότε θα είναι:

$$\Delta L = 0{,}4\text{m}$$



γ. Μόλις κόψουμε το νήμα στο σημείο Κ, η ράβδος προφανώς θα ανατραπεί και το βαρίδι m_1 θα εκτελέσει κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση στην οποία είναι $\Sigma F = 0$.
Στη θέση αυτή το ελατήριο θα είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta L'$ έτσι, ώστε $K\Delta L' = m_1 g$. Από την τελευταία βρίσκουμε ότι $\Delta L' = 0{,}1$ m. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

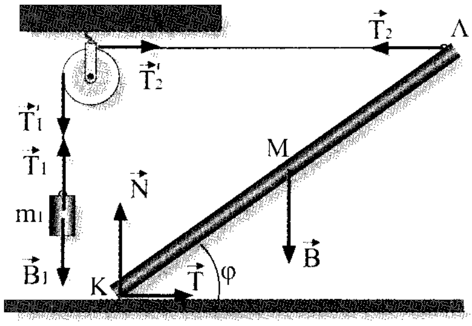
$$A = \Delta L + \Delta L' = 0{,}5 \text{ m}$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1}} = 10$ rad/s, και η αρχική της φάση είναι $\varphi_0 = \pi/2$ rad, αφού τη χρονική στιγμή t = 0 που αρχίζει ταλάντωση, έχει μηδενική ταχύτητα και βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση x = +A. (Θεωρούμε θετική φορά για την ταλάντωση προς τα πάνω). Επομένως, η εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης του βαριδιού θα είναι:

$$x = 0{,}5\eta\mu(10t + \pi/2) \text{ S.I.}$$

ΘΕΜΑ 81ο

α. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις πάνω στα σώματα του συστήματος, όπως στο σχήμα.



Για το βαρίδι m_1 ισχύει:

$\Sigma F = 0$, άρα $m_1g - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = m_1g$ (1)

Για την τροχαλία ισχύει $\Sigma\tau = 0$, άρα:

$$T_2{'}R = T_1{'}R, \text{ οπότε:}$$

$$T_2 = m_1g$$

Η ράβδος ισορροπεί οριακά, όταν η γωνία $\varphi = 60^\circ$ και αυτό σημαίνει ότι η δύναμη τριβής που δέχεται είναι $T = \mu N$.

Οι συνθήκες ισορροπίας της ράβδου είναι:

$\Sigma F_x = 0$, άρα $T_2 - T = 0$ ή $T_2 = \mu N$ (2)

$\Sigma F_y = 0$, άρα $N - B = 0$ ή $N = mg$ (3)

$\Sigma\tau_{(K)} = 0$, άρα $T_2(K\Lambda)\eta\mu\varphi - B(KM)\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$ (4)

Αν L είναι το μήκος της ράβδου ΚΛ θα είναι ΚΜ = L/2, οπότε από την (4) έχουμε:

$$T_2 = \frac{mg\frac{L}{2}\frac{1}{2}}{L\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{mg\sqrt{3}}{6} = 5\sqrt{3}\ \text{N}$$

Αντικαθιστούμε στην (3) και λόγω της (2) προκύπτει $\mu = \frac{T_2}{N} = \frac{5\sqrt{3}}{30} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

β. Αφού βρήκαμε το μέτρο της τάσης T_2 βρίσκουμε τη μάζα m_1 που θα είναι:

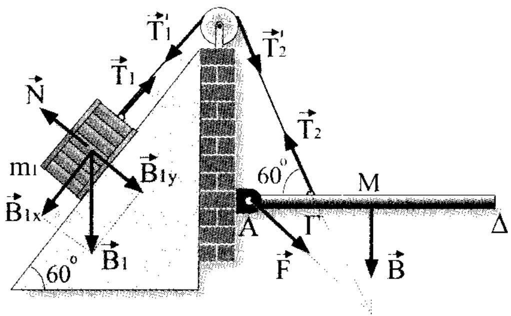
$$m_1 = 0{,}5\sqrt{3}\ \text{kg}$$

γ. Η δύναμη του δαπέδου F_δ είναι η συνισταμένη της τριβής Τ και της κάθετης αντίδρασης Ν, οπότε το μέτρο της θα είναι:

$$F_\delta = \sqrt{T^2 + N^2} = \sqrt{75 + 900} = \sqrt{975}\,\text{N} = 31{,}22\ \text{N}$$

ΘΕΜΑ 82ο

α. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις πάνω στα σώματα του συστήματος, όπως στο σχήμα. Αναλύουμε το βάρος B_1 του κιβωτίου σε δύο συνιστώσες:



$B_{1x} = B_1\eta\mu 60^\circ$ και $B_{1y} = B_1\sigma\upsilon\nu 60^\circ$

Εφόσον το κιβώτιο ισορροπεί, θα είναι:

$$T_1 = B_1\eta\mu 60^\circ$$

Λόγω ισορροπίας της τροχαλίας ισχύει:

$$T_2 = T_1 = B_1\eta\mu 60^\circ$$

Ερχόμαστε στη ράβδο. Η συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς την άρθρωση είναι:

$$T_2(A\Gamma)\eta\mu 60 - B(AM) = 0,\ \text{άρα}\ T_2 = 40\sqrt{3}\ \text{N}$$

88

Επομένως, θα είναι $m_1 g\frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3} \Rightarrow m_1 = 8$ kg.

β. Για τη ράβδο ισχύουν οι συνθήκες:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_2 συν60^o \Rightarrow F_x = 20\sqrt{3}N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + B - T_2 ημ60^o = 0 \Rightarrow F_y = 30N$$

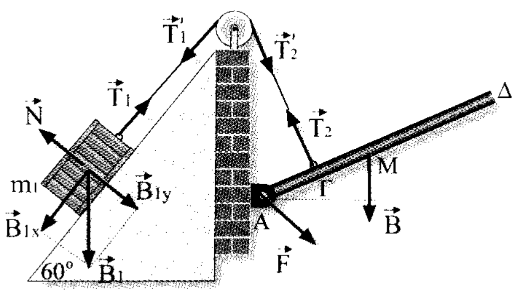
Επομένως, θα είναι $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{1200+900} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21}$ N.

Η δύναμη της άρθρωσης σχηματίζει γωνία θ με τη ράβδο, όπου $εφθ = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

γ. Η αβαρής τροχαλία ασκεί στον τοίχο δύναμη, που είναι η συνισταμένη των δύο τάσεων που δέχεται από το νήμα. Επειδή οι τάσεις έχουν ίσα μέτρα $T'_1 = T'_2 = T = 40\sqrt{3}N$ και κάθε νήμα σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφη, η συνισταμένη τους θα είναι κατακόρυφη και θα έχει μέτρο:

$$F_{τρ} = \sqrt{T^2 + T^2 + 2T^2 συν60^o} = T\sqrt{3} = 120N$$

δ. Τραβάμε το κιβώτιο, ώστε η ράβδος να στραφεί και να γίνει κάθετη στο νήμα. Τώρα οι δυνάμεις στη ράβδο θα είναι, όπως στο διπλανό σχήμα.



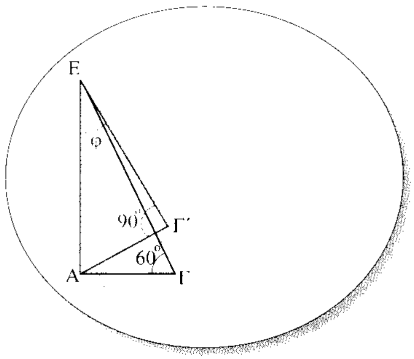
Η συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς την άρθρωση είναι:

$$T_2(ΑΓ) - B(ΑΜ)συνφ = 0$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζει τώρα η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση.

Λόγω κάθετων πλευρών, η γωνία φ είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει τώρα το νήμα με τον κατακόρυφο τοίχο.

Προσέξτε στον κύκλο τα δύο τρίγωνα που σχηματίζουν το σημείο Γ, η άρθρωση Α και η τροχαλία Ε στην αρχική θέση της ράβδου (ΑΓΕ) και στη νέα θέση της ράβδου (ΑΓ΄Ε).



Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓ΄Ε ισχύει $ημφ = \frac{ΑΓ'}{ΑΕ}$.

Για το αρχικό τρίγωνο ΑΓΕ ισχύει $εφ60^o = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \Rightarrow ΑΕ = ΑΓ \cdot \sqrt{3}$.

Οπότε θα είναι $ημφ = \frac{ΑΓ'}{ΑΓ \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $συνφ = \sqrt{1 - ημ^2φ} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (ΑΓ = ΑΓ΄).

Επανερχόμαστε στη συνθήκη ισορροπίας και έχουμε:

$$0{,}5T_2 = B\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow T_2 = 20\sqrt{6}\,N$$

Επομένως, το κιβώτιο πρέπει να έχει μάζα $m_1' = 2\sqrt{6}$ kg.