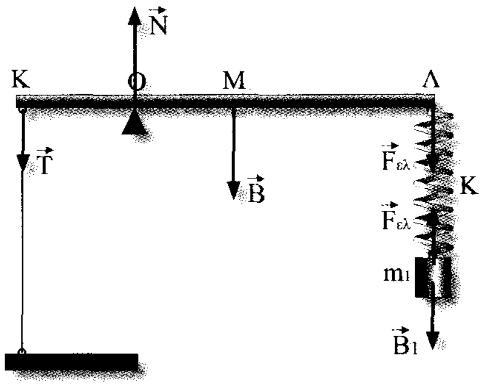
ΘΕΜΑ 83ο

α. Στο βαρίδι m_1 που ισορροπεί δεμένο στο ελατήριο θα είναι $F_{ελ} = m_1 g = 30$ N. Το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά:

$$\Delta L_0 = \frac{F_{ελ}}{K} = \frac{30N}{300\ N/m} = 0{,}1\ m$$



Στην κατάσταση ισορροπίας της ράβδου ενεργούν σε αυτή η τάση του νήματος T στο σημείο K, το βάρος της B στο μέσο της M, η δύναμη του ελατηρίου στο Λ και η δύναμη του στηρίγματος N στο σημείο O. Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το σημείο O έχουμε:

$$T(KO) - B(OM) - F_{ελ}(ΛO) = 0 \quad (1)$$

Είναι KO = 0,2 m, MO = 0,2 m και ΛO = 0,6 m. Επομένως θα έχουμε:

$$0{,}2T = 0{,}2 \cdot 40 + 0{,}6 \cdot 30, \text{ άρα } T = 130\ N$$

β. Η ισορροπία της ράβδου διαταράσσεται σε δύο περιπτώσεις:

1. όταν η τάση του νήματος γίνει μεγαλύτερη από το όριο θραύσης, δηλαδή $T_{max} = 175$ N.

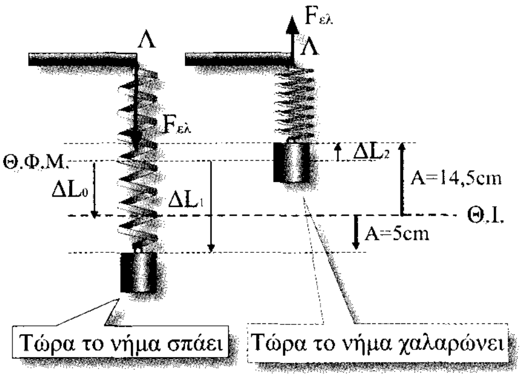
Αυτό συμβαίνει, όταν η δύναμη του ελατηρίου είναι:

$(1) \rightarrow 0{,}2 \cdot 175 - 0{,}2 \cdot 40 = 0{,}6 \cdot F_{ελ}$ ή

$0{,}6 \cdot F_{ελ} = 35 - 8 = 27$, άρα $F_{ελ} = 45$ N.

Το ελατήριο ασκεί αυτή τη δύναμη, όταν έχει παραμόρφωση:

$$\Delta L_1 = \frac{F_{ελ}}{K} = \frac{45N}{300\ N/m} = 0{,}15\ m$$



Άρα, το σώμα πρέπει να βρεθεί κατά $A_1 = \Delta L_1 - \Delta L_0 = 0{,}05$ m κάτω από τη θέση ισορροπίας του.

2. όταν η τάση του νήματος μηδενιστεί και αυτό συμβαίνει, όταν η δύναμη του ελατηρίου είναι:

$(1) \rightarrow -0{,}2 \cdot 40 = 0{,}6 \cdot F_{ελ}$ ή $0{,}6 \cdot F_{ελ} = -8$ N, άρα $F_{ελ} = -40/3$ N.

Το ελατήριο ασκεί αυτή τη δύναμη, όταν έχει παραμόρφωση (συσπείρωση):

$$\Delta L_2 = \frac{F_{ελ}}{K} = \frac{-40\ N}{900\ N/m} = -0{,}045\ m$$

Άρα, το σώμα πρέπει να βρεθεί κατά $A_2 = \Delta L_0 - \Delta L_2 = 0{,}145$ m πάνω από τη θέση ισορροπίας του. Βλέπουμε ότι αυξάνοντας το πλάτος της ταλάντωσης συμβαίνει πρώτα η θραύση του νήματος.

Επομένως, το μέγιστο πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης του σώματος είναι:

$$A_{max} = 5\ cm$$

γ. Μετακινώντας το στήριγμα κατά 20 cm προς το σημείο Λ, η ράβδος θα στηρίζεται στο μέσο της και επομένως η συνθήκη ισορροπίας θα είναι:

$$T(KM) - F_{ελ}(ΛM) = 0, \text{ άρα } T = F_{ελ} = 30N$$

Τώρα θραύση του νήματος θα έχουμε, όταν $K\Delta L_1 = 175$, άρα $\Delta L_1 = 0{,}58$ m, επομένως το σώμα πρέπει να βρεθεί 0,58 – 0,1 = 0,48 m κάτω από την αρχική θέση ισορροπίας του.

Χαλάρωση του νήματος έχουμε, όταν Τ = 0, άρα $F_{\varepsilon\lambda} = 0$, οπότε $\Delta L_2 = 0$, άρα το σώμα πρέπει να βρεθεί 0,1 m πάνω από την αρχική θέση ισορροπίας του. Άρα, το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης τώρα θα είναι $A_{max} = 0{,}1$ m.

ΘΕΜΑ 84ο

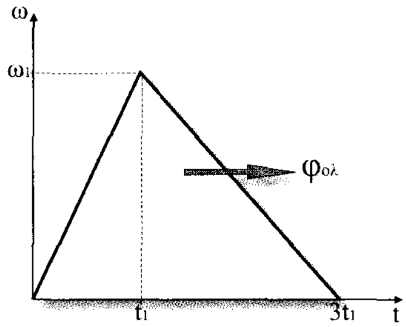
α. Θα είναι $I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 = 0{,}2\ \text{kgm}^2$.

β. $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma$, άρα $F_1R - F_2r = I\alpha_\gamma$, οπότε $\alpha_\gamma = 8\ \text{rad/s}^2$.

γ. Ο δίσκος περιστρέφεται κατά τη φορά της ροπής της δύναμης F_1. Εφόσον, μόλις καταργηθεί η μία από τις δυνάμεις, ο δίσκος αρχίζει να επιβραδύνεται (αφού κάποια στιγμή η γωνιακή ταχύτητα μηδενίζεται), καταλαβαίνουμε ότι καταργείται η F_1, γιατί διαφορετικά ο δίσκος θα επιταχυνόταν στροφικά και μάλιστα με μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση. Από το θεμελιώδη νόμο βρίσκουμε τη γωνιακή επιβράδυνση που θα αποκτήσει ο δίσκος. Δηλαδή:

$$\Sigma\tau = I\alpha'_\gamma,\ \text{άρα}\ -F_2r = I\alpha'_\gamma,\ \text{οπότε}\ \alpha'_\gamma = -4\ \text{rad/s}^2.$$

Έχουμε λοιπόν δύο φάσεις:



1. *Από t = 0 έως t_1 στροφικά επιταχυνόμενη, οπότε τη στιγμή t_1 θα έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = \alpha_\gamma t_1$.*

2. Από t_1 έως t_2 στροφικά επιβραδυνόμενη μέχρι μηδενισμού της γωνιακής του ταχύτητας, οπότε θα ισχύει η εξίσωση:

$$\omega = \omega_0 + \alpha'_\gamma t'$$

όπου ω_0 είναι η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή που άρχισε η επιβραδυνόμενη κίνηση (δηλαδή $\omega_0 = \omega_1 = \alpha_\gamma t_1$) και t΄ ο χρόνος επιβράδυνσης.

Τη στιγμή *που σταματά ο δίσκος, θα είναι ω = 0, οπότε:*

$$0 = \omega_1 + \alpha'_\gamma t' \ \text{ ή }\ 0 = \alpha_\gamma t_1 + \alpha'_\gamma t'$$

Αντικαθιστώντας τις γωνιακές επιταχύνσεις με τις αλγεβρικές τους τιμές στο S.I. έχουμε $8t_1 = 4t'$, δηλαδή θα είναι $t' = 2t_1$ και επομένως ο δίσκος σταματά τη χρονική στιγμή $t = 3t_1$.

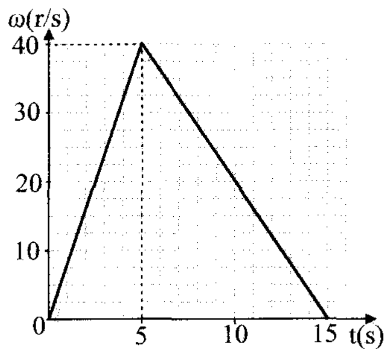
Η συνολική γωνιακή μετατόπιση είναι $\varphi_{o\lambda} = N2\pi = 300$ rad.

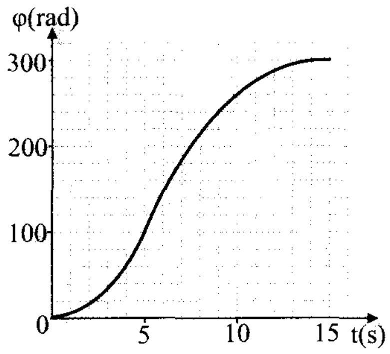
Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση ω = f(t), της οποίας το εμβαδόν ισούται αριθμητικά με τη συνολική γωνιακή μετατόπιση:

$$\varphi_{o\lambda} = \frac{1}{2}\omega_1 3t_1 \xrightarrow{\omega_1 = 8t_1} 300 = \frac{1}{2}24t_1^2 \Rightarrow t_1 = 5\,\text{s}$$

δ. Τώρα μπορούμε να βρούμε τις τιμές των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν για να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις.

2





ΘΕΜΑ 85°

α. Ο δίσκος θα εκτελέσει κύλιση και επομένως θα εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση και για τη στροφική κίνηση.

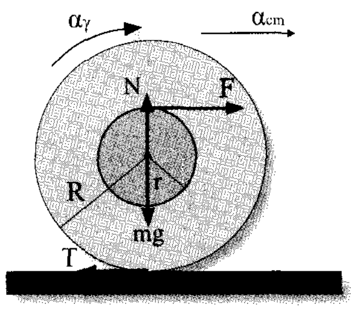
Για τη μεταφορική κίνηση:

$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm}$, δηλαδή $F - T = m \cdot a_{cm}$ (1)

$\Sigma F_y = 0$, δηλαδή $N = mg$ (2)

Για τη στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot a_{\gamma} \Rightarrow F \cdot r + T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot a_{\gamma} \quad (3)$$



Εφόσον ο δίσκος κυλάει χωρίς ολίσθηση σε ακλόνητο δάπεδο, θα ισχύει $a_{cm} = a_{\gamma} \cdot R$ και η (3) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$F \cdot r + T \cdot R = \frac{1}{2} m R \cdot a_{cm} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με R και προσθέτουμε κατά μέλη με την (4), ώστε να απαλλαγούμε από την τριβή Τ. Επομένως:

$$\left.\begin{aligned} F \cdot R - T \cdot R &= m R \cdot a_{cm} \\ F \cdot r + T \cdot R &= \frac{1}{2} m R \cdot a_{cm} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} F(R + r) = \frac{3}{2} m R \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2F(R + r)}{3mR}$$

Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε $a_{cm} = 2\ m/s^2$. Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου θα είναι $a_{\gamma} = a_{cm}/R = 5\ rad/s^2$.

β. Από την (1) βρίσκουμε την τριβή $T = F - m \cdot a_{cm} = 2\ N$.

γ. Τη στιγμή t = 4 s η μεταφορική ταχύτητα του δίσκου θα είναι $\upsilon_{cm} = a_{cm} t = 8\ m/s$. Το σημείο που βρίσκεται 10 cm πάνω από το σημείο επαφής του δίσκου με το δάπεδο έχει ακτίνα περιστροφής $r' = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3\ m$ και λόγω της αρχής της επαλληλίας θα έχει ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \upsilon_{cm} - \omega r'$.
Επειδή είναι $\omega = \upsilon_{cm}/R = 20\ rad/s$, θα είναι $\upsilon = 8\ m/s - 6\ m/s = 2\ m/s$.

δ. Όσο ο δίσκος κυλάει χωρίς ολίσθηση, η δύναμη τριβής που δέχεται από το δάπεδο είναι στατική και γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι:

$$T_{max} = \mu N$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση της επιτάχυνσης στην εξίσωση (1) και λύνοντας ως προς την τριβή βρίσκουμε:

$$F - T = m \cdot a_{cm} \quad \Rightarrow F - T = m \cdot \frac{2F(R+r)}{3mR} \Rightarrow$$

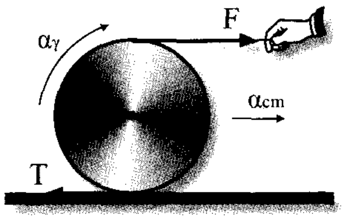
$$T = F\left(1 - \frac{2(R+r)}{3R}\right) \quad \Rightarrow \quad T = F\frac{R-2r}{3R} = \frac{F}{6}$$

Επομένως για κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει:

$$\frac{F}{6} \le \mu N \quad \Rightarrow \quad F_{max} = 6\mu mg = 60 \;\; N$$

ΘΕΜΑ 86ο

α1. Αν το δάπεδο είναι λείο, η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο είναι η F. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική και στροφική κίνηση και έχουμε:



$\Sigma F = m \cdot a_{cm}$ άρα $F = m \cdot a_{cm}$, οπότε είναι $a_{cm} = 2m/s^2$.

$$\Sigma\tau_{(cm)} = I_{cm} \cdot a_\gamma, \text{ άρα } F \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 a_\gamma \quad \Rightarrow$$

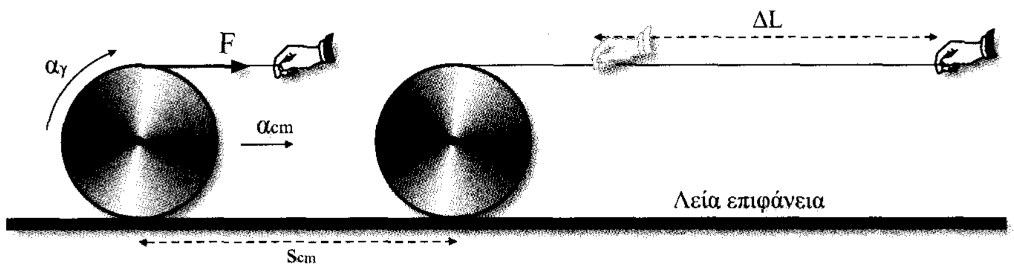
$$a_\gamma = \frac{2F}{mR} = 20 \;\; rad/s^2$$

α2. Όταν ο κύλινδρος έχει εκτελέσει N = 180/π περιστροφές έχει γωνιακή μετατόπιση φ = 2πN = 360 rad. Αφού έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, ισχύει η σχέση:

$$\varphi = \frac{1}{2} a_\gamma t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\varphi}{a_\gamma}} = 6\,s$$

Στο χρόνο αυτό ο κύλινδρος έχει μετατοπιστεί κατά $s_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = 36 \;\; m$.

Επειδή, ο κύλινδρος έχει εκτελέσει N περιστροφές και σε κάθε περιστροφή ξετυλίγεται μήκος 2πR νήματος, το μήκος του οριζόντιου τμήματος του νήματος θα έχει αυξηθεί κατά ΔL = N2πR = 72 m.



Επομένως, το χέρι που τραβάει το άκρο του νήματος έχει μετατοπιστεί κατά:

$$s = s_{cm} + \Delta L = 36m + 72m = 108\ m.$$

β1. Όταν το δάπεδο έχει τριβές, στον κύλινδρο θα ασκείται κατά την οριζόντια διεύθυνση και η στατική τριβή T. Τώρα θα ισχύουν οι σχέσεις:

Για τη μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_x = m\cdot \alpha_{cm}, \text{ δηλαδή } F - T = m\cdot\alpha_{cm} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0, \text{ δηλαδή } N = mg \qquad (2)$$

Για τη στροφική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(cm)} = I_{cm}\cdot\alpha_\gamma \Rightarrow F\cdot R + T\cdot R = \frac{1}{2}mR^2\cdot\alpha_\gamma \qquad (3)$$

Εφόσον ο δίσκος κυλάει χωρίς ολίσθηση σε ακλόνητο δάπεδο, θα ισχύει, $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma\cdot R$ και η (3) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$F + T = \frac{1}{2}m\cdot\alpha_{cm} \qquad (4)$$

Από τις (1) + (4) έχουμε, $2F = \frac{3}{2}m\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{4F}{3m} = \frac{8}{3}$ m/s^2.

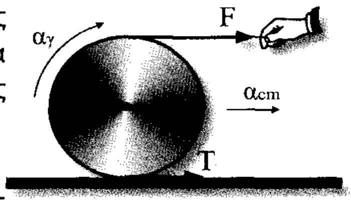
Ελέγχουμε αν η υπόθεση ότι ο δίσκος κυλάει χωρίς ολίσθηση είναι σωστή. Για να κυλάει χωρίς ολίσθηση πρέπει $T<\mu N = \mu mg = 4$ N.

Βρίσκουμε την τριβή αντικαθιστώντας τη σχέση της επιτάχυνσης στην (1) και έχουμε:

$$F - T = \frac{4F}{3} \Rightarrow T = -\frac{F}{3} = -\frac{4}{3} \text{ N}$$

Το πρόσημο δηλώνει ότι η στατική τριβή έχει φορά αντίθετη από αυτή που θεωρήσαμε. Το μέτρο της είναι μικρότερο από τη μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει η στατική τριβή, οπότε ο κύλινδρος κυλάει χωρίς ολίσθηση. Η γωνιακή επιτάχυνση θα είναι:

$$\alpha_\gamma = \alpha_{cm}/R = 40/3 \text{ rad/s}^2.$$



β2. Από τη σχέση της στατικής τριβής με την δύναμη F καταλαβαίνουμε ότι πρέπει:

$$\frac{F}{3} \le \mu mg \Rightarrow F \le 3\mu mg \Rightarrow F_{max} = 12\text{N}$$

ΘΕΜΑ 87ο

α. Προσέξτε τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό. Για να ισορροπεί το στερεό, θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς το σημείο επαφής του νήματος με το στερεό να είναι μηδέν. Άρα πρέπει:

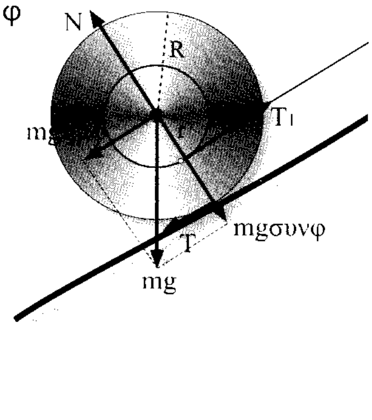
$$mg\eta\mu\varphi\cdot r - T\cdot(R-r) = 0 \Rightarrow T = \frac{mg\eta\mu\varphi\cdot r}{R-r} = mg\eta\mu\varphi$$

Επειδή, ισχύει ημ^{2}φ + συν^{2}φ = 1, θα είναι συνφ = = 0,8.

Η μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει η στατική τριβή είναι ίση με την τριβή ολίσθησης, επομένως θα ισχύει:

$$mg\eta\mu\varphi \le \mu N \Rightarrow mg\eta\mu\varphi \le \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\mu \ge \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = 0{,}75$$



β. Αν ο συντελεστής τριβής γίνει $\mu = 0,5$ το στερεό θα ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο και η δύναμη τριβής ολίσθησης θα έχει μέτρο $T = \mu N = \mu m g συνφ$. Επειδή το σημείο επαφής του τεντωμένου νήματος με το αυλάκι του τροχού έχει κάθε στιγμή μηδενική ταχύτητα, θα ισχύει $α_{cm} = α_γ \cdot r$.

Εφαρμόζουμε τους θεμελιώδεις νόμους:

$ΣF = m \cdot α_{cm}$, άρα $mgημφ + \mu mgσυνφ - T_1 = m \cdot α_{cm}$ (1)

$Στ = I \cdot α_γ$, άρα $T_1 \cdot r - \mu mg \cdot συνφ \cdot R = 0,5mR^2 \cdot α_γ$ και επειδή $R = 2r$ και $α_{cm} = α_γ \cdot r$ θα είναι:

$$T_1 - 2\mu mg \cdot συνφ = 2m \cdot α_{cm} \quad (2)$$

Από τις (1) + (2) προκύπτει:

$mgημφ - \mu mg \cdot συνφ = 3m \cdot α_{cm}$, άρα $α_{cm} = g(ημφ - \mu συνφ)/3 = 2/3\ m/s^2$.

γ. Αντικαθιστώντας στη (2) βρίσκουμε $T_1 = 2\mu mg \cdot συνφ + 2m \cdot α_{cm} = 28$ N.

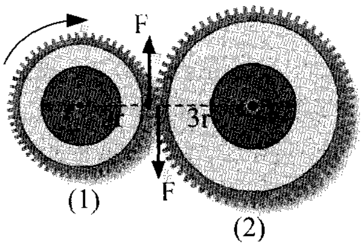
δ. Το νήμα θα ξετυλιχτεί, όταν το στερεό έχει εκτελέσει $N = L/2πr = 7,5/2π$ στροφές. Άρα, η γωνιακή μετατόπιση του στερεού είναι $φ = N \cdot 2π = 7,5$ rad. Η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού είναι $α_γ = α_{cm}/r = 20/3\ rad/s^2$. Από τη σχέση της γωνιακής μετατόπισης θα έχουμε:

$$φ = \frac{1}{2} α_γ t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2φ}{α_γ}} = \sqrt{\frac{45}{20}} = \frac{3}{2}\,s$$

και επομένως θα είναι $ω = α_γ \cdot t = 10$ rad/s.

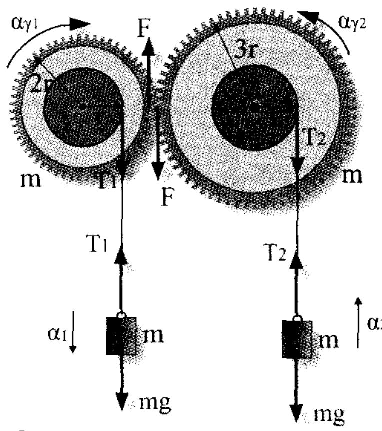
ΘΕΜΑ 88ο

α. Στο σχήμα βλέπουμε το μικρό (1) και το μεγάλο (2) γρανάζι. Στο σημείο επαφής τους το ένα γρανάζι ασκεί στο άλλο ίδιου μέτρου εφαπτομενική δύναμη F (δράση - αντίδραση). Η δύναμη που ασκεί το μικρό γρανάζι στο μεγάλο έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του μεγάλου με μέτρο $τ_{(1\text{-}2)} = F \cdot 3r$, ενώ η δύναμη που ασκεί το μεγάλο γρανάζι στο μικρό έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του μικρού γραναζιού με μέτρο $τ_{(2\text{-}1)} = F \cdot 2r$.



Βλέπουμε ότι το μικρό γρανάζι ασκεί μεγαλύτερη ροπή στο μεγάλο γρανάζι επομένως, αφού τα βαρίδια που τείνουν να στρέψουν τα δύο γρανάζια είναι ίδια και απέχουν ίδια απόσταση r από τον κάθε άξονα περιστροφής, θα κατεβαίνει το βαρίδι που συνδέεται με το μικρό τροχό και θα ανεβαίνει το άλλο.

β. Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που επηρεάζουν την κινητική κατάσταση του συστήματος. **Προσέχουμε,** τώρα, τη σχέση των επιταχύνσεων. Έστω, $α_1$ η επιτάχυνση του αριστερού βαριδιού που κατεβαίνει. Ίδια θα είναι και η επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου επαφής του κατακόρυφου νήματος με την περιφέρεια ακτίνας r του αυλακιού του μικρού γραναζιού. Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση του μικρού γραναζιού θα είναι $α_{γ1} = α_1/r$ και άρα, η επιτρόχια επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας ακτίνας 2r του μικρού γραναζιού θα είναι $α_{γ1}{\cdot}2r = 2α_1$.



Αφού τα γρανάζια συμπλέκονται στο σημείο επαφής τους θα έχουν ίδια επιτρόχια επιτάχυνση, επομένως η επιτρόχια επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του μεγάλου γραναζιού θα είναι και αυτή $2α_1$.

Άρα, η γωνιακή επιτάχυνση του μεγάλου γραναζιού είναι $α_{γ2} = 2α_1/3r$. Η επιτρόχια επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του αυλακιού του μεγάλου γραναζιού είναι $α_2 = α_{γ2}{\cdot}r = 2α_1/3$.

Αφού βρήκαμε τις σχέσεις των επιταχύνσεων, εφαρμόζουμε τώρα το θεμελιώδη νόμο για κάθε ένα από τα σώματα του συστήματος.

Αριστερό βαρίδι: $mg - T_1 = mα_1$ (1)

Μικρό γρανάζι: $T_1 \cdot r - F \cdot 2r = \frac{1}{2} m 4r^2 α_{γ1} \Rightarrow T_1 - 2F = 2mα_1$ (2)

Μεγάλο γρανάζι: $F \cdot 3r - T_2 \cdot r = \frac{1}{2} m 9r^2 α_{γ2} \Rightarrow 3F - T_2 = 3mα_1$ (3)

Δεξί βαρίδι: $T_2 - mg = mα_2 \Rightarrow T_2 - mg = \frac{2}{3} mα_1$ (4)

Από τις (1) + (2) προκύπτει $mg - 2F = 3mα_1$ (5)

Από τις (3) + (4) προκύπτει $3F - mg = \frac{11}{3} mα_1$ (6)

$$\left.\begin{aligned} (5)\cdot 3 \Rightarrow \quad & 3mg - 6F = 9mα_1 \\ (6)\cdot 2 \Rightarrow \quad & 6F - 2mg = \frac{22}{3} mα_1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} mg = \frac{49}{3} mα_1 \quad \Rightarrow \quad α_1 = \frac{3g}{49}.$$

Επομένως, το αριστερό βαρίδι κατεβαίνει με επιτάχυνση $α_1 = \frac{3g}{49}$ και το δεξί βαρίδι ανεβαίνει με επιτάχυνση $α_2 = \frac{2g}{49}$.

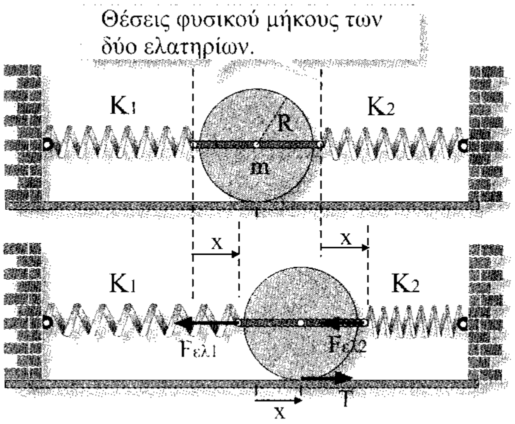
γ. Από τη σχέση (5) βρίσκουμε $mg - 2F = 3mα_1 \Rightarrow 2F = mg - 3mα_1 \Rightarrow F = \frac{20}{49} mg.$

δ. Αφού τα βαρίδια ξεκινούν από την ηρεμία ό,τι σχέση έχουν οι επιταχύνσεις την ίδια σχέση θα έχουν και οι μετατοπίσεις, επομένως θα είναι $s_2 = 2s_1/3 = 40$ cm.

ΘΕΜΑ 89ο

α. Στην τυχαία θέση εκτροπής την οποία θεωρούμε θετική στον κύλινδρο, ενεργούν οι εξής οριζόντιες δυνάμεις:

* Η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ1} = K_1x$.
* Η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ2} = K_2x$.
* Η δύναμη στατικής τριβής T από το δάπεδο.



Για να αποδείξουμε ότι ο κύλινδρος θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση, πρέπει να δείξουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx$$

Στην τυχαία θέση ο θεμελιώδης νόμος για τη μεταφορική κίνηση γράφεται με τη μορφή:

$$F_{ελ1} + F_{ελ2} - T = m \cdot a_{cm} \quad ή \quad K_1 \cdot x + K_2 \cdot x - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

Ο θεμελιώδης νόμος για τη στροφική κίνηση γράφεται με τη μορφή:

$$TR = \frac{1}{2} mR^2 a_\gamma \xrightarrow{a_{cm}=a_\gamma R} T = \frac{1}{2} m a_{cm} \Rightarrow m a_{cm} = 2T \quad (2)$$

Από την (1) λόγω της (2) δίνει $K_1 \cdot x + K_2 \cdot x - T = 2T \Rightarrow 3T = (K_1 + K_2) \cdot x \quad (3)$

Ερχόμαστε στη συνθήκη της ταλάντωσης και έχουμε:

$$\Sigma F = -F_{ελ1} - F_{ελ2} + T = -K_1 \cdot x - K_2 \cdot x + T =$$

$$= -(K_1 + K_2) \cdot x + \frac{(K_1 + K_2)}{3} x = -\frac{2}{3}(K_1 + K_2) \cdot x$$

Επομένως, έχουμε αρμονική ταλάντωση με σταθερά:

$$D = \frac{2}{3}(K_1 + K_2) = 200 \text{ N/m}$$

β. Τη στιγμή t = 0 ο κύλινδρος αφήνεται από την ακραία θέση της ταλάντωσής του και επομένως, η ταλάντωση έχει αρχική φάση π/2.

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10$ rad/s.

Επομένως, η εξίσωση είναι $x = 0{,}2ημ(10t + π/2)$ (S.I.)

γ. Η μέγιστη ταχύτητα λόγω ταλάντωσης είναι $υ = ω \cdot A = 2$ m/s, οπότε η εξίσωση της ταχύτητας λόγω αρμονικής ταλάντωσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $υ_{cm} = 2συν(10t + π/2)$ (S.I.). Εφόσον ο κύλινδρος κυλάει χωρίς ολίσθηση ισχύει $υ_{cm} = ω \cdot R$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

Επομένως, η εξίσωση είναι $\omega = \frac{υ_{cm}}{R} = 10συν(10t + \frac{π}{2})$ (S.I.).

δ. Η μηχανική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E = \frac{1}{2}DA^2 = 4\,J$.
Η μέγιστη δυναμική ενέργεια λόγω παραμόρφωσης των δύο ελατηρίων είναι:

$$U_{max} = \frac{1}{2}K_1A^2 + \frac{1}{2}K_2A^2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)A^2 = 6\ J$$

Βλέπουμε, ότι η μέγιστη ενέργεια της ταλάντωσης είναι μικρότερη από τη μέγιστη αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια των ελατηρίων. Αυτό συμβαίνει, γιατί ο κύλινδρος αποκτά και κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης που δεν εμφανίζεται στην ενέργεια της ταλάντωσης, η οποία οφείλεται στη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου.

ε. Από την εξίσωση (3) έχουμε $T = \frac{(K_1 + K_2)}{3} \cdot x$. Για να μην ολισθαίνει ο κύλινδρος πρέπει να είναι $T \le \mu N \;\Rightarrow\; \frac{(K_1 + K_2)}{3} \cdot x \le \mu mg \;\Rightarrow\; x \le \frac{3\mu mg}{K_1 + K_2}$. Επομένως:

$$A_{max} = 16\ cm$$

ΘΕΜΑ 90^ο^

α. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο του είναι:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}0,2kg \cdot 0,04m^2 = 4 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Η κινητική ενέργεια του δίσκου δίνεται από τη σχέση:

$$K_1 = \frac{1}{2}I \cdot \omega_1^2 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 288 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}}} = 12\ \ rad/s$$

β. Το διάνυσμα της τελικής στροφορμής είναι κάθετο στο διάνυσμα της αρχικής στροφορμής του δίσκου, επομένως θα είναι:

$$\Delta L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{I^2\omega_1^2 + I^2\omega_2^2} = I\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} =$$

$$= 4 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2 \cdot 20\ \ rad/s = 8 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot m^2/s$$

γ. Η τελική κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2}I \cdot \omega_2^2 \;\Rightarrow\; K_2 = \frac{1}{2}4 \cdot 10^{-3} \cdot 256\,J = 0,512\ J$$

Το έργο της ροπής της δύναμης που ασκήθηκε πάνω στο δίσκο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας και επομένως:

$$W_\tau = K_2 - K_1 = 0,512\ J - 0,288\ J = 0,224\ J$$

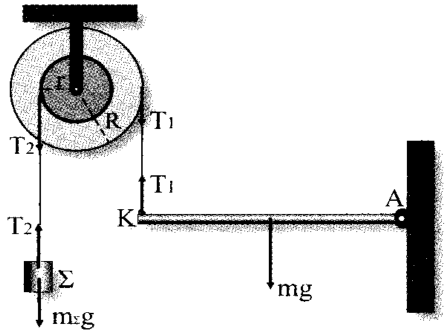
ΘΕΜΑ 91^ο^

α. Από τη συνθήκη ισορροπίας της ράβδου προκύπτει:

$$T_1\ell - mg\frac{\ell}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad T_1 = \frac{mg}{2}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας της τροχαλίας προκύπτει:

$$T_2 r - T_1 R = 0 \quad\Rightarrow\quad T_2 = 2T_1 = mg$$

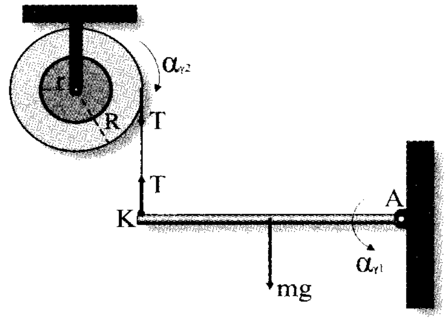


Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Σ έχουμε:

$$m_\Sigma g = T_2,\ \text{επομένως}\ m_\Sigma = m = 600\text{g}$$

β. Αν κόψουμε το νήμα που συγκρατεί το βαρίδι, η ράβδος θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma1}$ και η τροχαλία γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma2}$. Βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς την άρθρωση:

$$I_A = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2$$



Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για κάθε στερεό και έχουμε:

- για τη ράβδο $\quad mg\frac{\ell}{2} - T\ell = \frac{1}{3}m\ell^2\alpha_{\gamma1} \quad (1)$
- για την τροχαλία $\quad TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma2} \quad (2)$

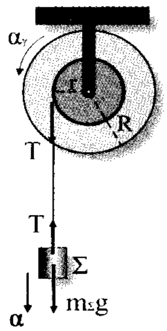
Η επιτρόχια επιτάχυνση του άκρου Κ της ράβδου είναι ίση με την επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας στο οποίο εφάπτεται το νήμα, αφού τα δύο αυτά σημεία είναι και σημεία του τεντωμένου νήματος.

Επομένως, θα ισχύει $\alpha_{\gamma2}R = \alpha_{\gamma1}\ell \Rightarrow \alpha_{\gamma2} = \alpha_{\gamma1}\frac{\ell}{R}$

Οι (1) και (2) γράφονται $\quad mg\frac{1}{2} - T = \frac{1}{3}m\ell\alpha_{\gamma1}$ και $T = \frac{1}{2}m\alpha_{\gamma1}\ell$ από τις οποίες

προκύπτει ότι $\alpha_{\gamma1} = \frac{3g}{5\ell} = 3\ \text{rad/s}^2$ και $\alpha_{\gamma2} = \alpha_{\gamma1}\frac{\ell}{R} = \frac{3g}{5R} = 15\ \text{rad/s}^2$.

γ. Αν κόψουμε το νήμα που συγκρατεί τη ράβδο, τότε το σώμα Σ θα αποκτήσει επιτάχυνση α με φορά προς τα κάτω και η τροχαλία θα αρχίσει να στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma = \alpha/r = 2\alpha/R$.



Για το σώμα Σ θα ισχύει $mg - T = m\alpha \quad (3)$

Για την τροχαλία θα ισχύει $Tr = \frac{1}{2}mR^2\alpha_\gamma \quad\Rightarrow\quad T = 2m\alpha \quad (4)$

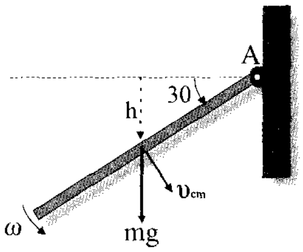
Από τις (4) και (3) προκύπτει ότι το σώμα Σ θα αποκτήσει επιτάχυνση $\alpha = g/3$ και επομένως, θα είναι $T = 2mg/3$.

Για το σώμα Σ θα είναι $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = mg - T = mg/3 = 2\ \text{kgm/s}^2$.

Για την τροχαλία θα είναι $\frac{dL}{dt} = Tr = 0{,}8\ \ \text{kgm}^2/\text{s}^2$.

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος, είναι η ισχύς της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του.

Για τη ράβδο, τη στιγμή που θα έχει στραφεί κατά 30°, θα ισχύει $\frac{dK}{dt} = mg\sigma\upsilon\nu 30^\circ \upsilon_{cm}$.



Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας. Ισχύει:

$$mg\frac{\ell}{2}\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} = \sqrt{7,5}\ \text{rad/s}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι $\upsilon_{cm} = \omega\frac{\ell}{2} = \sqrt{7,5}$ m/s.

Άρα $\frac{dK}{dt} = 6\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{7,5} = 3\sqrt{22,5}$ J/s.

ΘΕΜΑ 92ο

α. Η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι:

$$I_\Gamma = \frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{4} + \frac{1}{12}mL^2 + m\frac{5L^2}{4} = \frac{5}{3}mL^2 = 4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

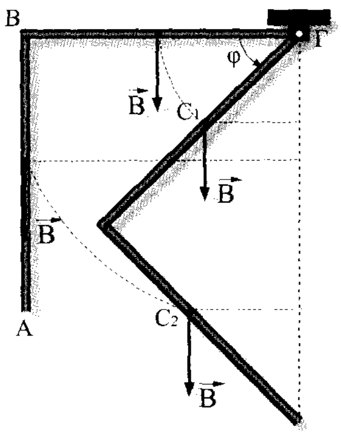
11

β. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας είναι η γωνιακή επιτάχυνση αγ, την οποία θα προσδιορίσουμε εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης. Οπότε έχουμε:

$$mgL + mg\frac{L}{2} = I\cdot\alpha_\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha_\gamma = \frac{3mgL}{2I} = 4,5\ \text{rad/s}$$

Η επιτάχυνση του άκρου Α θα είναι $\alpha_A = \alpha_\gamma(A\Gamma) = 9\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$

γ. Τη στιγμή που τα κέντρα μάζας βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη, η ράβδος ΒΓ σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επειδή το ορθογώνιο τρίγωνο BC_1C_2 είναι ισοσκελές και η ευθεία C_1C_2 είναι κατακόρυφη, η ράβδος ΒΓ θα σχηματίζει γωνία 45° με την κατακόρυφη. Επομένως θα είναι:



$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{(\Gamma)} = 2mgd = 2mg\frac{L}{2}\eta\mu 45^\circ =$$

$$= mgL\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

δ. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας από την αρχική θέση μέχρι τη στιγμή που η ράβδος ΒΓ γίνει κατακόρυφη προκύπτει:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mg\frac{L}{2} + mgL \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3mgL}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3mgL}{I}} = 3\ \text{rad/s}$$

ΘΕΜΑ 93ο

α. Το σφαιρίδιο φθάνει στην προεξοχή με ταχύτητα που θα βρεθεί με θεώρημα έργου - ενέργειας. Άρα, έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2gh}$$

Αν h = R θα είναι υ = 2 m/s.
Για την κρούση του σφαιριδίου με το στερεό ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$L_{πριν} = L_{μετά} \ \Rightarrow \ m\upsilon R = I\omega$$

όπου η ροπή αδράνειας του συστήματος τροχός - σφαιρίδιο είναι $I = mR^2 + mR^2$.
Οπότε:

$$m\upsilon R = 2mR^2\omega \ \Rightarrow \ \omega = \frac{\upsilon}{2R} = 5 \ \text{rad/s}$$

β. Για να εκτελέσει πλήρη ανακύκλωση, το σφαιρίδιο θα πρέπει να φθάσει στο ανώτερο σημείο της κυκλικής κίνησης πάνω στην περιφέρεια του τροχού με μηδενική (οριακά) ταχύτητα. Κατά την κίνηση η μόνη δύναμη που παράγει ή καταναλώνει έργο είναι το βάρος του σφαιριδίου.
Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας από τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι την ανώτερη θέση του σφαιριδίου. Δηλαδή:

$$-\frac{1}{2}I\omega^2 = -mgR \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}2mR^2\omega^2 = mgR \ \Rightarrow \ \omega^2 = \frac{g}{R}$$

Λόγω της αρχής διατήρησης της στροφορμής είναι ω = υ/2R και επομένως:

$$\frac{\upsilon^2}{4R^2} = \frac{g}{R} \ \Rightarrow \ \frac{2gh_{min}}{4R^2} = \frac{g}{R} \ \Rightarrow \ h_{min} = 2R = 40 \text{ cm}$$

γ. Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού αυξάνεται, όσο το σφαιρίδιο κατέρχεται (γιατί το βάρος του παράγει έργο) και μειώνεται, όταν το σφαιρίδιο ανέρχεται. Επομένως, μέγιστη γωνιακή ταχύτητα θα έχουμε, όταν το σφαιρίδιο βρεθεί στην κατώτερη δυνατή θέση.
Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας. Δηλάδή:

$$\frac{1}{2}I\omega^2_{max} - \frac{1}{2}I\omega^2 = mgR \ \Rightarrow \ mR^2\omega^2_{max} - mgR = mgR \ \Rightarrow$$

$$\omega^2_{max} = \frac{2g}{R} \ \Rightarrow \ \omega_{max} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ω_{max} = 10 rad/s.

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι κάθε στιγμή ίσος με την ισχύ της ροπής δηλαδή:

$$\frac{dK}{dt} = \tau \cdot \omega$$

Στην περίπτωση που το αρχικό ύψος είναι $h_2 = 2h_{min} = 4R$ εφαρμόζουμε:
Θεώρημα έργου - ενέργειας για τη πτώση της σφαίρας:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh_2 \ \Rightarrow \ \upsilon = \sqrt{2gh_2} = 2\sqrt{2gR}$$

Αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$m\upsilon R = 2mR^2\omega_0 \;\Rightarrow\; \omega_0 = \frac{\upsilon}{2R} = \frac{2\sqrt{2gR}}{2R} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

Θεώρημα έργου - ενέργειας για τη στροφική κίνηση του συστήματος μέχρι να στραφεί ο τροχός κατά 210° (σχεδιάστε το σχήμα):

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = -mgR\eta\mu 30^\circ \;\Rightarrow\; mR^2\omega^2 - mR2g = -mg\frac{R}{2} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{3g}{2R}}$$

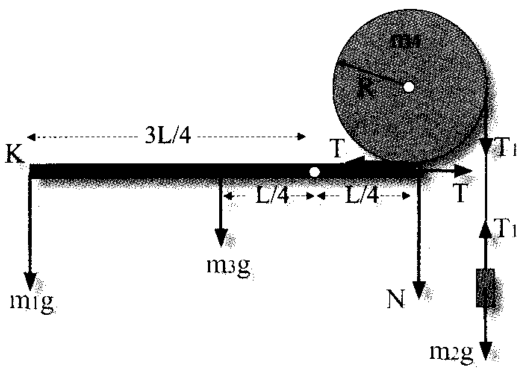
Η ροπή του βάρους του σφαιριδίου ως προς τον άξονα περιστροφής τη στιγμή που μας ενδιαφέρει έχει μέτρο $\tau = mgR\sigma\upsilon\nu 30^o$ και άρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = -\tau\cdot\omega = -mgR\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{3g}{2R}} = -mgR\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2R}} = -6\ \text{J/s}$$

Το πρόσημο (–) δηλώνει ότι η κινητική ενέργεια μειώνεται.

ΘΕΜΑ 94^o

α. Στο σημείο επαφής της ράβδου με το δίσκο, η ράβδος ασκεί στο δίσκο δύναμη τριβής T, η οποία εμποδίζει την περιστροφή του δίσκου. Στο δίσκο ασκείται επίσης, η τάση T_1 του νήματος που στην κατάσταση ισορροπίας είναι ίση με το βάρος m_2g του βαριδιού που κρέμεται. Για να ισορροπεί ο δίσκος, πρέπει $\Sigma\tau = 0$, άρα $T{\cdot}R - m_2gR = 0$ ή $m_2g = T$.



Η μέγιστη τιμή, που μπορεί να έχει το μέτρο της τριβής T, είναι η τριβή ολίσθησης $T = \mu N$, όπου N η κάθετη δύναμη επαφής μεταξύ δίσκου και ράβδου. Θα υπολογίσουμε τη δύναμη N εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών στη ράβδο. Δηλαδή:

$$m_1g\frac{3L}{4} + m_3g\frac{L}{4} - N\frac{L}{4} = 0 \;\Rightarrow\; N = (3m_1 + m_3)g = 140\ \text{N}$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι $T_{max} = \mu N = 28$ N. Άρα:

$$m_{2max} = T_{max}/g = 2{,}8\ \text{kg}$$

β. Αν το βαρίδι έχει μάζα $m'_2 = 2m_{2max} = 5{,}6$ kg θα αποκτήσει επιτάχυνση α προς τα κάτω και ο δίσκος θα στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση α_γ. Θα εφαρμόσουμε θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση του βαριδιού και το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του δίσκου. Οπότε, έχουμε:

$$m'_2g - T_1 = m'_2\alpha$$

$$T_1R - TR = \frac{1}{2}m_4R^2\alpha_\gamma \;\Rightarrow\; T_1 - T = \frac{1}{2}m_4\alpha$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και βρίσκουμε:

$$m_2'g - T = \left(m_2' + \frac{m_4}{2}\right)\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\ \text{m/s}^2$$

γ. Σε χρόνο t = 2 s το βαρίδι m'_2 έχει κατέβει κατά $s = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 4\ \text{m}$.

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου, τόση θα είναι και η επιτρόχιος μετατόπιση των σημείων της περιφέρειας του δίσκου, επομένως το έργο της τριβής ολίσθησης που ασκεί η ράβδος στο δίσκο θα είναι:

$$W_T = -T\cdot s = -28\text{N}\cdot 4\text{m} = -112\ \text{J}$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης πάνω στο δίσκο εκφράζει τη μηχανική ενέργεια που έχασε ο δίσκος και μετατράπηκε σε θερμότητα. Συνεπώς, η θερμότητα που εκλύεται σε χρόνο t = 2 s είναι Q = 112 J.

δ. Από τη σχέση $s = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{\alpha}} = 3\ \text{s}$ βρίσκουμε σε πόσο χρόνο θα πραγματοποιηθεί η συγκεκριμένη μετατόπιση. Από τη σχέση $\upsilon = \alpha\cdot t = 6$ m/s βρίσκουμε την ταχύτητα του βαριδιού, που είναι και επιτρόχια ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του δίσκου. Επομένως, η στροφορμή του δίσκου είναι:

$$L = I\cdot\omega = \frac{1}{2}m_4R^2\omega = \frac{1}{2}m_4R\upsilon = 10{,}08\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

ΘΕΜΑ 95º

α. Έστω υ η ταχύτητα κίνησης κάθε ανθρώπου σε σχέση με την επιφάνεια του δίσκου και ω η γωνιακή του ταχύτητα.

Για την ταχύτητα υ ισχύει $\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\pi R}{t} = 0{,}4\pi\ \text{m/s}$.

Ο δίσκος λόγω της αρχής διατήρησης της στροφορμής θα περιστρέφεται προς την αντίθετη κατεύθυνση και άρα κάθε σημείο της περιφέρειας θα έχει γραμμική ταχύτητα ωR αντίθετης φοράς από την ταχύτητα υ. Άρα, η πραγματική ταχύτητα κάθε ανθρώπου θα είναι ίση με τη διαφορά $\upsilon - \omega R$.

Ο άντρας θα αποκτήσει στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$L_1 = m_1(\upsilon - \omega R)R$$

Το παιδί θα αποκτήσει στροφορμή $L_2 = m_2(\upsilon - \omega R)R$.

Ο δίσκος θα αποκτήσει στροφορμή $L = -I\omega$.

Λόγω της αρχής διατήρησης της στροφορμής θα ισχύει:

$$m_1(\upsilon - \omega R)R + m_2(\upsilon - \omega R)R - \frac{1}{2}MR^2\omega = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)\upsilon R = (m_1 + m_2 + \frac{M}{2})\omega R^2 \Rightarrow \omega = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon}{(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})R} = 0{,}04\pi\ \text{rad/s}$$

β. Η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου θα είναι $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 0{,}2\pi$ rad.

γ. Η μηχανική ενέργεια που απέκτησε το σύστημα είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωμάτων που κινούνται.
Κάθε άνθρωπος έχει ταχύτητα ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon - \omega R = 0{,}4\pi - 0{,}16\pi = 0{,}24\pi \text{ m/s}$$

Άρα $E = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = 36$ J.

δ. Στην περίπτωση που ο άντρας κινείται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, επειδή ο άνδρας έχει μεγαλύτερη μάζα, ο δίσκος θα έχει αντίθετη φορά περιστροφής από τον άνδρα και ίδια φορά περιστροφής με το παιδί. Επομένως:

Ο άντρας θα αποκτήσει στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$L_1 = m_1(\upsilon - \omega R)R$$

Το παιδί θα αποκτήσει στροφορμή $L_2 = -m_2(\upsilon + \omega R)R$.
Ο δίσκος θα αποκτήσει στροφορμή $L = -I\omega$.
Λόγω της αρχής διατήρησης της στροφορμής θα ισχύει:

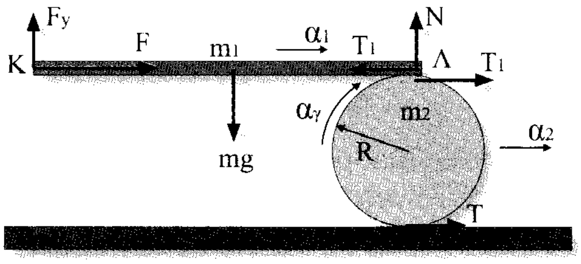
$$m_1(\upsilon - \omega R)R - m_2(\upsilon + \omega R)R - \frac{1}{2}MR^2\omega = 0 \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_2)\upsilon R = (m_1 + m_2 + \frac{M}{2})\omega R^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon}{(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})R} = 0{,}02\pi \text{ rad/s}$$

ΘΕΜΑ 96ο

α. Η σανίδα ασκεί στο ανώτερο σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου δύναμη στατικής τριβής T_1 και δέχεται την αντίδρασή της. Στον κύλινδρο ασκούνται η T_1 από τη σανίδα και η στατική τριβή T από το οριζόντιο έδαφος, που έχει φορά ίδια με της T_1, όπως έχουμε διαπιστώσει σε προηγούμενα προβλήματα. (Αν θεωρήσουμε αντίθετη τη φορά της T, δεν πειράζει).



Έστω, ότι είναι α_1 η επιτάχυνση της σανίδας και α_2 η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, ο οποίος θα έχει και γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma = \alpha_2/R$, αφού κυλάει χωρίς ολίσθηση.
Εφαρμόζουμε τους θεμελιώδεις νόμους για τη σανίδα και για τον κύλινδρο.

$$F - T_1 = m_1\alpha_1 \quad (1)$$

$$T_1 + T = m_2\alpha_2 \quad (2)$$

$$T_1R - TR = \frac{1}{2}m_2R^2\alpha_\gamma \Rightarrow T_1 - T = \frac{1}{2}m_2\alpha_2 \quad (3)$$

15

Αφού η σανίδα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο, τα σημεία της σανίδας έχουν ίδια επιτάχυνση με την οριζόντια επιτάχυνση του ανώτερου σημείου του κυλίνδρου που λόγω της αρχής της επαλληλίας είναι $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_\gamma R = 2\alpha_2$.
Η (1) γράφεται $F - T_1 = 2m_1\alpha_2$ (4)
Πολλαπλασιάζοντας την (4) επί 2 και προσθέτοντας με τις (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει:

$$2F = \left(4m_1 + \frac{3m_2}{2}\right)\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0,6 \ m/s^2 \ \text{ και άρα } \ \alpha_1 = 1,2 \ m/s^2$$

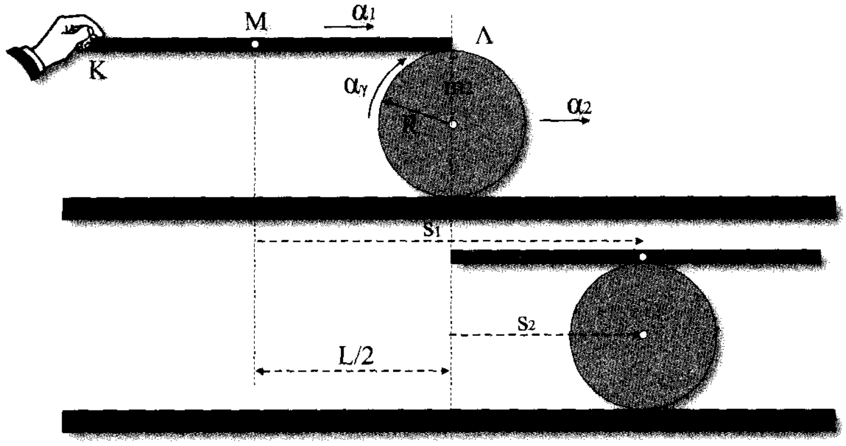
β. Όταν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου βρεθεί κάτω από το κέντρο της σανίδας, ο κύλινδρος θα έχει μετατοπιστεί κατά s_2 και η σανίδα θα έχει μετατοπιστεί κατά s_1.

Όπως φαίνεται από το σχήμα, θα ισχύει $s_1 - s_2 = L/2 = 2,7$ m. Άρα:

$$\frac{1}{2}\alpha_1 t^2 - \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 = 2,7\,m \Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)t^2 = 2,7\,m$$

Από την τελευταία έχουμε:

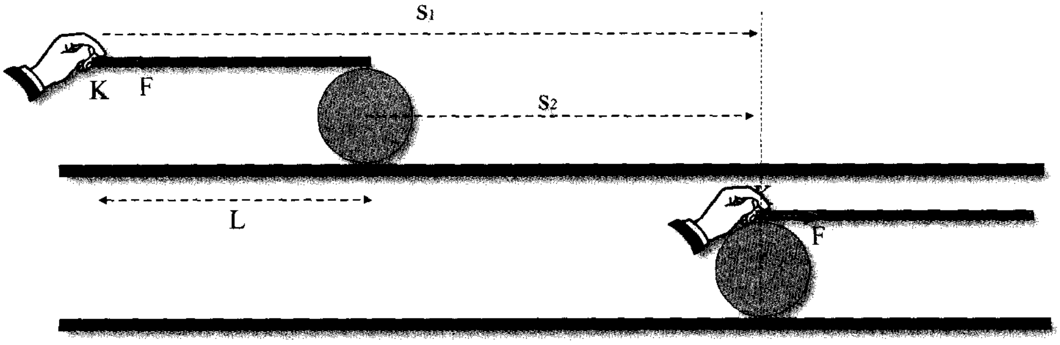
$$\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)t^2 = 2,7\,m \Rightarrow t = \sqrt{\frac{5,4}{(\alpha_1 - \alpha_2)}} = \sqrt{\frac{5,4}{0,6}} = 3\,s$$



γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς το κέντρο μάζας του δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{(cm)} = I_{(cm)} \cdot \alpha_\gamma = \frac{1}{2}m_2R^2\frac{\alpha_2}{R} = \frac{1}{2}m_2R\alpha_2 = 24 \cdot 10^{-2} \ \ kg \cdot m^2/s^2$$

δ. Όταν το κέντρο του κυλίνδρου φθάσει κάτω από το άκρο Κ της σανίδας, ο κύλινδρος θα έχει μετατοπιστεί κατά s_2 και η σανίδα κατά s_1. Αφού η σανίδα έχει κάθε στιγμή διπλάσια επιτάχυνση και διπλάσια ταχύτητα από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα ισχύει $s_1 = 2s_2$.



Επειδή $s_1 - s_2 = L$, θα ισχύει $s_1 - \frac{s_1}{2} = L \Rightarrow s_1 = 2L = 10,8$ m.

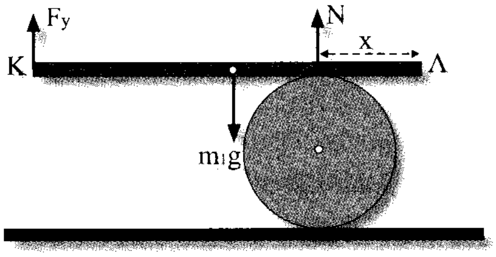
Το έργο της δύναμης F θα είναι $W_F = F \cdot s_1 = 3 \cdot 10,8$ J $= 32,4$ J.

ε. Την τυχαία χρονική στιγμή t η σανίδα έχει μετατοπιστεί κατά:

$$s_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 = 0,6t^2 \ \text{(S.I.)}$$

και ο κύλινδρος έχει μετατοπιστεί κατά:

$$s_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 = 0,3t^2 \ \text{(S.I.)}$$



Επομένως, το σημείο επαφής του κυλίνδρου με τη σανίδα απέχει από το άκρο της Λ απόσταση x που δίνεται από τη σχέση:

$$x = s_1 - s_2 = 0,6 \cdot t^2 - 0,3 \cdot t^2 = 0,3 \cdot t^2$$

Αφού η σανίδα δεν περιστρέφεται, θα ισχύει $\Sigma\tau = 0$, άρα:

$$F_y(L - x) - mg\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow F_y = \frac{10(2,7 - x)}{5,7 - x} \Rightarrow F_y = \frac{27 - 3t^2}{5,7 - 0,3t^2} \ \text{(S.I.)}$$

ΘΕΜΑ 97^o

α. Όταν το σφαιρίδιο συσσωματωθεί, η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είνα

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} + 2mL^2 \xrightarrow{M=2m} I = \frac{8}{3}mL^2$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα. Έχουμ

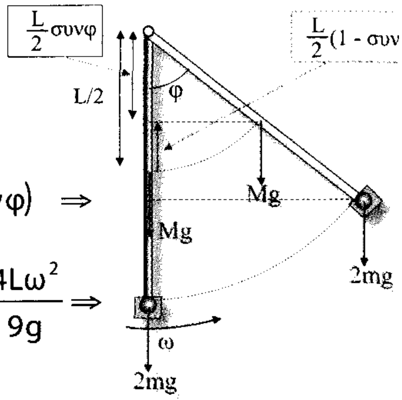
$$m\upsilon_0 L = \frac{8}{3}mL^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{3\upsilon_0}{8L} = \frac{30}{10} = 3 \ \text{rad/s}$$

β. Η αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 20$ J.

Η κινητική ενέργεια μετά την κρούση είναι $K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}I \cdot \omega^2 = \frac{4}{3}mL^2\omega^2 = 7,5$ J.

Η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι $K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda} = 12,5$ J.

γ. Μετά τη σύγκρουση το σύστημα περιστρέφεται κατά γωνία φ μέχρι να σταματήσει. Για να βρούμε τη γωνία φ εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας. Επομένως έχουμε:



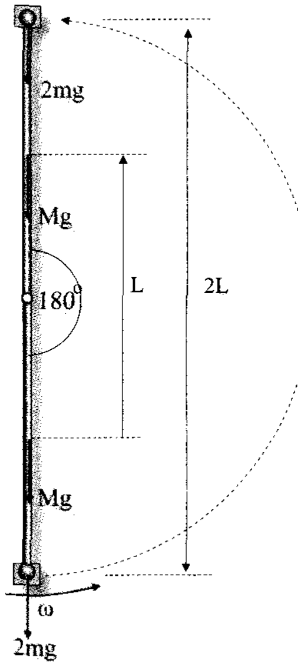
$$0-\frac{1}{2}I\omega^2=-Mg\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi\right)-2mg(L-L\sigma\upsilon\nu\varphi)\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{8}{3}mL^2\omega^2=3mgL(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)\ \Rightarrow\ 1-\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{4L\omega^2}{9g}\Rightarrow$$

$$1-\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{2}$$

Επομένως, η ράβδος θα στραφεί κατά 60° μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

δ. Για να εκτελέσει πλήρη κατακόρυφη περιστροφή η ράβδος, θα πρέπει η γωνιακή της ταχύτητα να μηδενιστεί, όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη, όπως στο σχήμα. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας από την κατώτερη στην ανώτερη κατακόρυφη θέση.



$$0-\frac{1}{2}I\omega^2=-MgL-2mg2L\ \Rightarrow$$

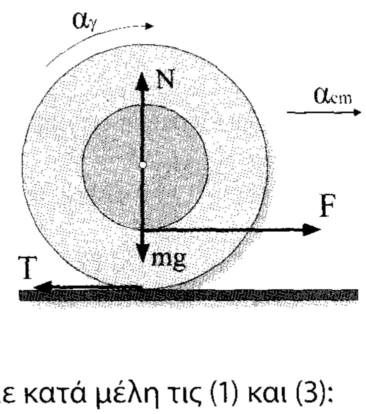
$$\frac{1}{2}\frac{8}{3}mL^2\omega^2=6mgL\Rightarrow\omega=3\sqrt{\frac{g}{2L}}=6\ \text{rad/s}$$

Τώρα εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για την κρούση. Δηλαδή:

$$m\upsilon_0L=\frac{8}{3}mL^2\omega\ \Rightarrow\ \upsilon_0=\frac{8}{3}L\omega=20\ \text{m/s}$$

ΘΕΜΑ 98º

α. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου. Επομένως, έχουμε:



$$\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm},\ \text{άρα}\ F-T=m\cdot\alpha_{cm}\qquad(1)$$

$$\Sigma\tau_{(cm)}=I_{(cm)}\alpha_\gamma\ \Rightarrow\ TR-Fr=\frac{1}{2}mR^2\alpha_\gamma\qquad(2)$$

Αφού ο κύλινδρος κυλάει χωρίς ολίσθηση θα είναι $\alpha_{cm}=\alpha_\gamma R$ οπότε η (2) γράφεται:

$$TR-Fr=\frac{1}{2}mR^2\frac{\alpha_{cm}}{R}\ \Rightarrow\ TR-Fr=\frac{1}{2}mR\alpha_{cm}\qquad(3)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) επί R και προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (3):

18

$$\left.\begin{aligned} FR - TR &= mR\alpha_{cm} \\ TR - Fr &= \frac{1}{2}mR\alpha_{cm} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} F(R-r) = \frac{3}{2}mR\alpha_{cm} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{cm} = \frac{2F(R-r)}{3mR}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $\alpha_{cm} = 2\ m/s^2$.

β. Για τον κύλινδρο ισχύει $S_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2S_{cm}}{\alpha_{cm}}} = 2\ s$.

Αυτή τη στιγμή θα είναι $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t = 4\ m/s$.

Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \xrightarrow{\upsilon_{cm}=\omega R} K = \frac{3}{4}m\upsilon_{cm}^2 = 24\ J$$

Αφού η στατική τριβή ούτε προσφέρει ούτε αφαιρεί ενέργεια από τον κύλινδρο, η κινητική ενέργεια που βρήκαμε είναι ίση με το έργο της δύναμης που ασκούμε πάνω του. Επομένως, είναι $W_F = 24\ J$.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς το κέντρο μάζας του δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dL_{(cm)}}{dt} = \Sigma\tau_{(cm)} = I_{cm}\alpha_{\gamma} = \frac{1}{2}mR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{1}{2}mR\alpha_{cm} = 0,4\ \ kg\cdot m^2/s^2$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το σημείο επαφής του με το έδαφος (το οποίο, καθώς είναι ακίνητο θεωρείται στιγμιαίος άξονας περιστροφής) θα είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = F\cdot r = 1,2\ \ kg\cdot m^2/s^2$$

δ. Θα εξετάσουμε για ποια τιμή της δύναμης F ο κύλινδρος αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο.

Από τη σχέση της επιτάχυνσης που βρήκαμε στο πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\alpha_{cm} = \frac{2F(R-r)}{3mR} = \frac{F}{3m}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην (1) βρίσκουμε:

$$F - T = \frac{F}{3} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2F}{3}$$

Για να κυλάει ο κύλινδρος χωρίς ολίσθηση πρέπει να είναι:

$$T \le \mu N \quad \Rightarrow \quad \frac{2F}{3} \le \mu mg \quad \Rightarrow \quad F \le \frac{3}{2}\mu mg \quad \Rightarrow \quad F \le 12N$$

Αφού η δύναμη που ασκούμε είναι F = 20 N, ο κύλινδρος θα ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο και η τριβή που θα δέχεται θα είναι τριβή ολίσθησης, δηλαδή θα είναι:

$$T = \mu mg$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση, απ' όπου προκύπτει:

$$F - \mu mg = m\alpha_{cm} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{cm} = \frac{F}{m} - \mu g = 6\ \ m/s^2$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση και έχουμε:

$$\mu mgR - Fr = \frac{1}{2}mR^2\alpha_\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha_\gamma = 2\frac{\mu mgR - Fr}{mR^2} = -10 \ \ rad/s^2$$

Προσέξτε ότι η γωνιακή επιτάχυνση είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται με αντίθετη φορά από αυτή που υποθέσαμε.
(Τι τιμή έπρεπε να έχει η δύναμη F, ώστε ο κύλινδρος να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση;) **Απ.** 16N.
(Υπολογίστε το έργο της δύναμης F = 20 N σε χρόνο t = 2 s και τη θερμότητα λόγω τριβών με το δάπεδο στον ίδιο χρόνο.) **Απ.** $W_F = 280$ J, $Q_T = 128$ J

<u>ΘΕΜΑ 99ο</u>

α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κατακόρυφη κίνηση της σφαίρας μέχρι τη στιγμή λίγο πριν τη σύγκρουση και βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2gh} = 8 \ \ m/s$$

Αρχικά η ράβδος ισορροπεί ενώ τα βαρίδια στα άκρα της έχουν ίδια μάζα. Επομένως, ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο της ομογενούς ράβδου. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για την κρούση, απ' όπου προκύπτει:

$$m\upsilon\frac{L}{2} = \left(\frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{4} + 2m\frac{L^2}{4}\right)\omega_1 \quad \Rightarrow \quad m\upsilon\frac{L}{2} = \frac{5}{6}mL^2\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{3\upsilon}{5L} = 2 \ \ rad/s$$

β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας από την οριζόντια μέχρι την κατακόρυφη θέση για το σύστημα και έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{5}{6}mL^2\omega_2^2 - \frac{1}{2}\frac{5}{6}mL^2\omega_1^2 = -mg\frac{L}{2} + 2mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{12}mL^2\omega_2^2 = \frac{5}{12}mL^2\omega_1^2 + mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{6g}{5L}} = 3 \ \ rad/s$$

γ. Τη στιγμή που η ράβδος έχει στραφεί κατά 180° θα είναι πάλι οριζόντια. Εκείνη τη στιγμή λόγω της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας θα έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega_1 = 2$ rad/s.
Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής θα είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{(O)} = -2mg\frac{L}{2} + mg\frac{L}{2} = -mg\frac{L}{2} = -4{,}8 \ \ kg\cdot m^2/s^2$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής της ενέργειας θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau_{(O)}\cdot\omega = -mg\frac{L}{2}\omega_1 = -9{,}6 \ \ J/s$$

20

δ. Για να εκτελέσει πλήρη ανακύκλωση, πρέπει το συσσωμάτωμα 2m να βρεθεί στην ανώτερη δυνατή θέση. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας από την οριζόντια μέχρι την κατακόρυφη θέση με το συσσωμάτωμα 2m πάνω και έχουμε:

$$0-\frac{1}{2}\frac{5}{6}mL^2\omega_1'^2=+mg\frac{L}{2}-2mg\frac{L}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{5}{12}mL^2\omega_1'^2=mg\frac{L}{2}\quad\Rightarrow$$

$$\omega_1'=\sqrt{\frac{6g}{5L}}=\sqrt{5}\ \text{rad/s}$$

Άρα, η ράβδος αμέσως μετά την κρούση πρέπει να έχει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega'_1=\sqrt{5}\ \text{rad/s}$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για την κρούση θα έχουμε:

$$m\upsilon'\frac{L}{2}=\frac{5}{6}mL^2\omega_1'\quad\Rightarrow\quad\upsilon'=\frac{5L\omega'}{3}=4\sqrt{5}\ \text{m/s}$$

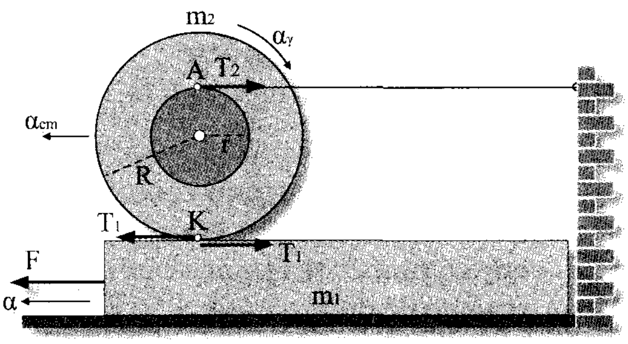
Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κατακόρυφη κίνηση της σφαίρας από το ύψος h΄ που την αφήνουμε μέχρι τη στιγμή λίγο πριν τη σύγκρουση και έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon'^2=mgh'\quad\Rightarrow\quad h'=\frac{\upsilon'^2}{2g}=4\ \text{m}$$

ΘΕΜΑ 100ο

α. Ασκώντας δύναμη στην πλατφόρμα, αυτή αποκτά επιτάχυνση α προς τα αριστερά. Αφού ο κύλινδρος κυλάει χωρίς ολίσθηση πάνω στην πλατφόρμα, το σημείο Κ θα έχει επιτάχυνση ίδια με της πλατφόρμας. Άρα, είναι:

$$\alpha_K=\alpha$$



Το σημείο Α στο οποίο το οριζόντιο νήμα εφάπτεται στο μικρό αυλάκι του κυλίνδρου, θα έχει μηδενική επιτάχυνση, αφού το νήμα είναι ακίνητο. Αν το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει επιτάχυνση α_{cm} και ταυτόχρονα ο κύλινδρος περιγράφεται με γωνιακή επιτάχυνση ως προς το κέντρο μάζας του, για τα σημεία Α και Κ ισχύουν:

$\alpha_A=\alpha_{cm}-\alpha_\gamma\cdot r=0$, άρα $\alpha_{cm}=\alpha_\gamma\cdot r$ (1)

$\alpha_K=\alpha_{cm}+\alpha_\gamma\cdot R=\alpha$ και λόγω της (1) έχουμε $\alpha=\alpha_\gamma(R+r)$ (2)

Επειδή είναι $R=2r$, η (2) γίνεται $\alpha=\alpha_\gamma 3r$ (3)

Επομένως, θα είναι $\alpha_\gamma=\dfrac{\alpha}{3r}$ και $\alpha_{cm}=\dfrac{\alpha}{3}$.

Τώρα θα εφαρμόσουμε τους θεμελιώδεις νόμους για τη μεταφορική και για τη στροφική κίνηση. Οπότε, έχουμε:

$$F - T_1 = m_1 \alpha$$

$$T_1 - T_2 = m_2 \alpha_{cm} \Rightarrow T_1 - T_2 = m_2 \frac{\alpha}{3}$$

$$T_1 \cdot R + T_2 \cdot r = \frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha_\gamma \quad \Rightarrow \quad T_1 \cdot 2r + T_2 \cdot r = \frac{1}{2} m_2 4r^2 \frac{\alpha}{3r} \quad \Rightarrow \quad 2T_1 + T_2 = \frac{2}{3} m_2 \alpha$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη από τις εξισώσεις με 3 και προσθέσουμε κατά μέλη θα έχουμε:

$$3F = (3m_1 + m_2)\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3F}{3m_1 + m_2} = 4{,}5 \ m/s^2$$

β. Έχουμε ήδη βρει ότι $\alpha_\gamma = \frac{\alpha}{3r} = \frac{4{,}5}{0{,}6} = 7{,}5 \ rad/s.$

γ. Από την πρώτη σχέση έχουμε $T_1 = F - m_1\alpha = 12N - 9N = 3\ N$.

δ. Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $T_2 = T_1 - m_2 \frac{\alpha}{3} = 3N - 2\frac{4{,}5}{3} = 0.$

Επομένως, η τάση του νήματος είναι μηδέν και αυτό σημαίνει ότι το νήμα είναι οριακά τεντωμένο και δεν ασκεί δύναμη στον κύλινδρο.

ε. Η πλατφόρμα αρχίζει να κινείται από την ηρεμία με επιτάχυνση $\alpha = 4{,}5\ m/s^2$ και ο κύλινδρος αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση $\alpha_{cm} = 1{,}5\ m/s^2$.
Ο κύλινδρος θα φθάσει στην άκρη της πλατφόρμας τη στιγμή που η πλατφόρμα θα έχει μετατοπιστεί κατά d περισσότερο από τον κύλινδρο. Επομένως, θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}\alpha t^2 - \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 = d \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{\alpha - \alpha_{cm}}} = 2\ s$$

Στο χρονικό αυτό διάστημα η μετατόπιση της πλατφόρμας θα είναι:

$$s = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 9\ m$$

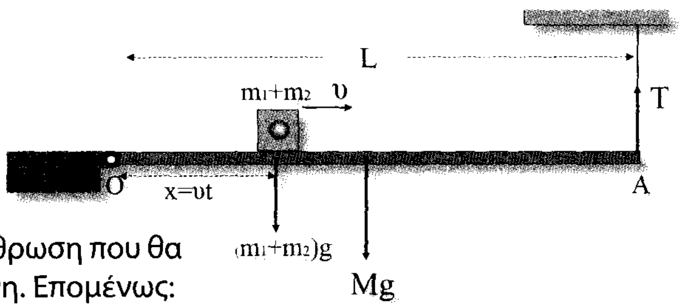
και το έργο της δύναμης πάνω στην πλατφόρμα είναι $W_F = F \cdot s = 108\ J$.
Στο ίδιο χρονικό διάστημα ο κύλινδρος θα έχει αποκτήσει $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t = 3\ m/s$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega = \alpha_\gamma t = 15\ rad/s$.

ΘΕΜΑ 101ο

α,β. Αφού η κρούση είναι πλαστική θα ισχύει $m_2\upsilon_0 = (m_1+m_2)\upsilon$, άρα $\upsilon = 0{,}5\ m/s$.
Το συσσωμάτωμα ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στη σανίδα, επομένως την τυχαία χρονική στιγμή t θα απέχει από την άρθρωση Ο απόσταση:

$$x = \upsilon \cdot t$$

Αυτή τη στιγμή, αφού η σανίδα ισορροπεί, θα δέχεται ροπές ως προς την άρθρωση που θα έχουν μηδενική συνισταμένη. Επομένως:



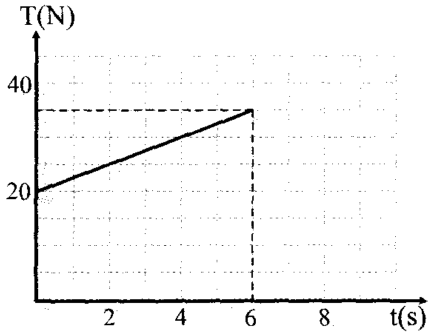
$\Sigma\tau_{(O)} = 0$, άρα

$(m_1 + m_2)\cdot g\cdot x + Mg\cdot L/2 - T\cdot L = 0$

Άρα $T = 20 + 5\cdot x = 20 + 2{,}5\cdot t$ (S.I)

Η γραφική παράσταση του μέτρου της τάσης του νήματος θα είναι μια ευθεία με αρχική τιμή 20 N. Επειδή είναι $T_{max} = 35$ N το νήμα θα σπάσει όταν:

$20 + 2{,}5t = 35$ ή $t = 6$ s.



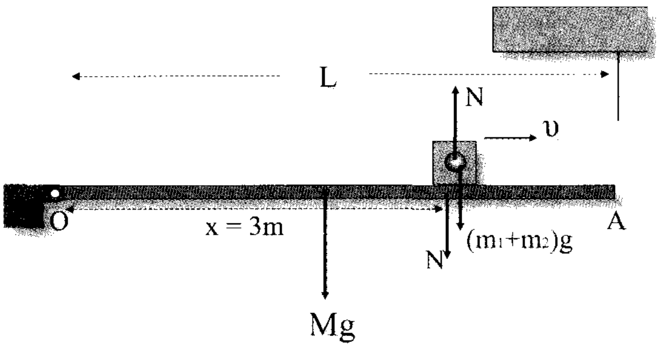
γ. Τη στιγμή που το νήμα θα σπάσει το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απόσταση $x = \upsilon\cdot t = 0{,}5\cdot 6 = 3$ m. Υποθέτουμε ότι το συσσωμάτωμα διατηρεί την επαφή του με τη σανίδα μετά το σπάσιμο του νήματος ασκώντας στη σανίδα δύναμη επαφής N. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση της σανίδας και έχουμε:

$$Mg\frac{L}{2} + N\cdot x = \frac{1}{3}ML^2\alpha_\gamma \quad \Rightarrow \quad 80 + 3N = \frac{64}{3}\alpha_\gamma \quad \text{(S.I.)} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση του συσσωματώματος κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και έχουμε:

$(m_1+m_2)g - N = (m_1+m_2)\alpha$

όπου $\alpha = \alpha_\gamma x$ είναι η επιτρόχια επιτάχυνση του συσσωματώματος.



Άρα $20 - N = 6\alpha_\gamma$ (S.I.) και λύνουμε ως προς αγ:

$$\alpha_\gamma = \frac{20-N}{6} \xrightarrow{(1)} 240 + 9N = 64\frac{20-N}{6} \quad \Rightarrow \quad 1440 + 54N = 720 - 64\,N$$

$$118N = -720 \quad \Rightarrow N < 0$$

Αφού προκύπτει ότι $N < 0$ καταλαβαίνουμε ότι η υπόθεση πως το συσσωμάτωμα διατηρεί επαφή με τη σανίδα είναι λανθασμένη. Μόλις κοπεί το νήμα το συσσωμάτωμα χάνει την επαφή του με τη σανίδα και έτσι ο θεμελιώδης νόμος για τη στροφική κίνηση της σανίδας θα γραφεί με τη μορφή:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{3}ML^2\alpha_\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha_\gamma = \frac{3g}{2L} = 3{,}75\ \text{rad/s}^2$$

δ. Αφού η σανίδα κινείται μετά το σπάσιμο του νήματος ανεξάρτητα από το συσσωμάτωμα, εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας μόνο για τη σανίδα και βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 = Mgh \xrightarrow{h=\frac{L}{2}} \frac{1}{6}ML^2\omega^2 = Mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{7{,}5}\ \text{rad/s}$$

ΘΕΜΑ 102º

α. Στη ράβδο ασκούνται το βάρος της Mg στο μέσο της Κ, η δύναμη F στο άκρο της Γ, η κάθετη αντίδραση N του δίσκου στο σημείο Β και κάποια κατακόρυφη δύναμη F_A από την άρθρωση. Αφού η ράβδος ισορροπεί, θα ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0,\ \text{άρα}\ N(BA) - F(\Gamma A) - Mg(KA) = 0,\ \text{επομένως}\ N = 32\ N$$

β. Στον κύλινδρο ασκούνται η τάση του κατακόρυφου νήματος T_1, και η στατική τριβή $T_{\sigma\tau}$ από τη ράβδο. (Το βάρος και η δύναμη από το σταθερό άξονα στον κύλινδρο δεν επηρεάζουν τη στροφική του ισορροπία). Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών για τον κύλινδρο έχουμε:

$$\Sigma\tau = 0,\ \text{άρα}\ T_1 \cdot R_1 - T_{\sigma\tau} \cdot R_2 = 0 \quad (1)$$

Αφού το βαρίδι ισορροπεί θα είναι $T_1 = mg = 10$ N και επομένως από την (1) προκύπτει ότι $T_{\sigma\tau} = 5$ N.

γ. Ο κύλινδρος αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση α_γ και το βαρίδι κατεβαίνει με επιτάχυνση α. Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του βαριδιού, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας, απ’ όπου προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \xrightarrow{\upsilon=\omega R_1} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\frac{\upsilon^2}{R_1^2} = mgh \quad \upsilon^2 = \frac{2gh}{1+\frac{I}{mR_1^2}} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mR_1^2}}} = 1\ m/s$$

δ. Ο ρυθμός παραγωγής έργου πάνω στον κύλινδρο είναι ίσος με την ισχύ της τάσης του νήματος, την οποία θα υπολογίσουμε με το θεμελιώδη νόμο.
Για το βαρίδι ισχύει $mg - T = m\alpha \quad (2)$
Για τον κύλινδρο ισχύει $T \cdot R_1 = I\alpha_\gamma \quad (3)$
Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου είναι $\alpha_\gamma = \alpha/R_1$
και η (3) γίνεται $\frac{TR_1^2}{I} = \alpha$ την οποία αντικαθιστούμε στη (2) και βρίσκουμε:

$$mg - T = \frac{mR_1^2}{I}T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{1+\frac{mR_1^2}{I}} = 9\ N$$

Επομένως, η ισχύς της ροπής της τάσης πάνω στο στερεό θα είναι:

$$P_T = T \cdot R_1 \cdot \omega \xrightarrow{\omega=\frac{\upsilon}{R_1}} P_T = T \cdot \upsilon = 9\ J/s$$

ΘΕΜΑ 103^o

α. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$I_{(O)} = \frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}mL^2$$

Για να υπολογίσουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας, απ' όπου προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 = mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 5\sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

Η ταχύτητα του άκρου της ράβδου είναι επιτρόχια ταχύτητα και έχει μέτρο:

$$\upsilon_A = \omega \cdot L = 3\sqrt{2}\ \text{m/s}$$

β. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση της ράβδου μετά την κρούση, θα υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα ω΄ της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega'^2 = -mg\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad \omega' = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)} = \sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

γ. Για να βρούμε την ταχύτητα υ του σώματος μετά την κρούση, θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής. Επομένως, έχουμε:

$$I\omega = m\upsilon L - I\omega' \quad \Rightarrow \quad m\upsilon L = I(\omega + \omega') \quad \Rightarrow \quad m\upsilon L = \frac{1}{3}mL^2(\omega + \omega') \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{1}{3}L(\omega + \omega') = 1{,}2\sqrt{2}\ \text{m/s}$$

δ. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με:

$$\omega_\tau = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10\ \text{rad/s}$$

Η ταχύτητα που βρήκαμε είναι μέγιστη της ταλάντωσης, αφού τη στιγμή της κρούσης το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας οπότε θα είναι:

$$A = \frac{\upsilon}{\omega} = 0{,}12\sqrt{2}\ \text{m}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης θα είναι $x = 0{,}12\sqrt{2}\eta\mu(10t)$ S.I.

Όταν η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια ισχύει:

$$K = U \quad \Rightarrow \quad 2U = E \quad \Rightarrow \quad 2\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

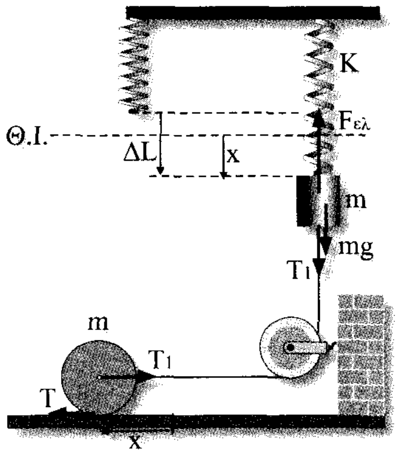
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε:

$$\eta\mu(10t) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 10t = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

Η τρίτη φορά που θα συμβεί αυτό που θέλουμε είναι η τρίτη λύση της γενικής εξίσωσης, οπότε θα είναι 10t = 5π/4 ή t = 5π/40 s. Εκείνη τη στιγμή το σώμα θα έχει απομάκρυνση $x = -\frac{A}{\sqrt{2}} = -0{,}12$ m, επομένως θα απέχει από τη θέση ισορροπίας του 12 cm.

ΘΕΜΑ 104ο

α. Στη θέση εκτροπής ο κύλινδρος θα δέχεται από το νήμα μια τάση T_1 και τη δύναμη στατικής τριβής Τ. Επειδή η τροχαλία είναι αβαρής, η τάση T_1 θα ενεργεί και στο σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο.
Για την τυχαία εκτροπή κατά x από τη θέση ισορροπίας, εφαρμόζουμε για κάθε σώμα τους θεμελιώδεις νόμους και έχουμε:



$$K\Delta L - mg - T_1 = m\alpha \qquad (1)$$

$$T_1 - T = m\alpha \qquad (2)$$

$$T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_\gamma \xrightarrow{\alpha_\gamma = \frac{\alpha}{R}} T = \frac{1}{2} m\alpha \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) βρίσκουμε $T_1 = \frac{3}{2} m\alpha$ (4)

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει:

$$K\,\Delta L - mg = \frac{5}{2} m\alpha \qquad (5)$$

Όμως $\Delta L = \Delta L_0 + x$, όπου ΔL_0 είναι η αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος που είναι δεμένο από αυτό. Για την αρχική παραμόρφωση ισχύει:

$$K\Delta L_0 = mg \quad \text{ή} \quad m = K\Delta L_0/g = 2\text{ kg}$$

Επομένως η (5) γίνεται $K \cdot \Delta L_0 + K \cdot x - mg = \frac{5}{2} m\alpha \Rightarrow K \cdot x = \frac{5}{2} m\alpha$

Άρα, όταν ο κύλινδρος βρίσκεται σε απόσταση x από την αρχική του θέση (στην οποία αρχική θέση δε δέχεται τάση από το νήμα), θα έχει επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση $\alpha = \frac{2}{5}\frac{K}{m} x$.

Αντικαθιστώντας όπου x = 10 cm βρίσκουμε $\alpha = 10\text{ m/s}^2$.

β,γ. Θα αποδείξουμε ότι το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα εκτελέσει τμήμα αρμονικής ταλάντωσης. Στην τυχαία θέση σε απομάκρυνση x από την αρχική για τον κύλινδρο και θεωρώντας θετική φορά προς τα αριστερά, ο θεμελιώδης νόμος γράφεται:

$$\Sigma F = T - T_1 \text{ που λόγω της (2) γράφεται } \Sigma F = -m\alpha = -\frac{2K}{5} x$$

Άρα, ο κύλινδρος εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά D = 2K/5 = 200 N/m. Επομένως, η μέγιστη ταχύτητα θα είναι $\upsilon_{max} = \omega_\tau \cdot A$, όταν περάσει από τη θέση ισορροπίας. (ω_τ είναι η κυκλική συχνότητα της ταλάντωση που είναι $\omega_\tau = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10$ rad/s). Θα είναι λοιπόν $\upsilon_{max} = 1$ m/s.

Ο κύλινδρος θα αποκτήσει την ταχύτητα αυτή σε χρόνο Τ/4 από τη στιγμή που τον αφήσαμε, δηλαδή σε χρόνο t = 0,05π s.

δ. Μόλις το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο φθάσει στη θέση ισορροπίας του, η τάση του νήματος μηδενίζεται. Από εκείνη τη στιγμή και μετά ο μεν κύλινδρος θα κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_{max}$, γιατί δε θα ασκείται πάνω του δύναμη, ενώ το σώμα θα εκτελέσει νέα αρμονική ταλάντωση με σταθερά $D' = K$. Η νέα ταλάντωση θα έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια ίση με τη μέγιστη κινητική του σώματος στη θέση ισορροπίας, άρα θα είναι $U_{max} = K_{max} = \frac{1}{2}mυ_{max}^2 = 1$ J.

ΘΕΜΑ 106ο

α. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για να βρούμε την ταχύτητα με την οποία η σφαίρα m_1 θα φθάσει στην κατώτερη θέση. Επομένως, έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 = m_1gL \quad \Rightarrow \quad υ_1 = \sqrt{2gL} = 5 \text{ m/s}$$

β. Μετά την κρούση η σφαίρα ανακλάται και σταματά, όταν το νήμα σχηματίζει γωνία με συνφ = 0,84. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για να βρούμε την ταχύτητα $υ'_1$ με την οποία ανακλάται:

$0 - \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 = -m_1gh \quad \Rightarrow \quad υ_1' = \sqrt{2gh}$, όμως $h = L - Lσυνφ = 0{,}16L$ και άρα θα είναι:

$$υ_1' = \sqrt{2g0{,}16L} = 0{,}4 \cdot 5 m/s = 2 \text{ m/s}$$

Λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής για την κρούση θα έχουμε:

$$m_1 \cdot υ_1 = - m_1 \cdot υ'_1 + m_2 \cdot υ_2, \text{ άρα } υ_2 = m_1(υ_1 + υ'_1)/m_2 = 2 \text{ m/s}$$

γ. Το σώμα m_2 θα φύγει από την αρχική θέση ισορροπίας με ταχύτητα $υ_2 = 2$ m/s, η οποία θα είναι η μέγιστη ταχύτητα της αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει.

Επειδή θα είναι $ω = \sqrt{\frac{K}{m_2}} = 5$ rad/s το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \frac{υ_0}{ω} = 0{,}4m$$

δ. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι $K_1 = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 = 25$ J και η τελική κινητική ενέργεια μετά την κρούση θα είναι $K'_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 = 4 + 14 = 18$ J.

Άρα, χάθηκαν 7 J μηχανική ενέργεια λόγω της κρούσης.

ΘΕΜΑ 107ο

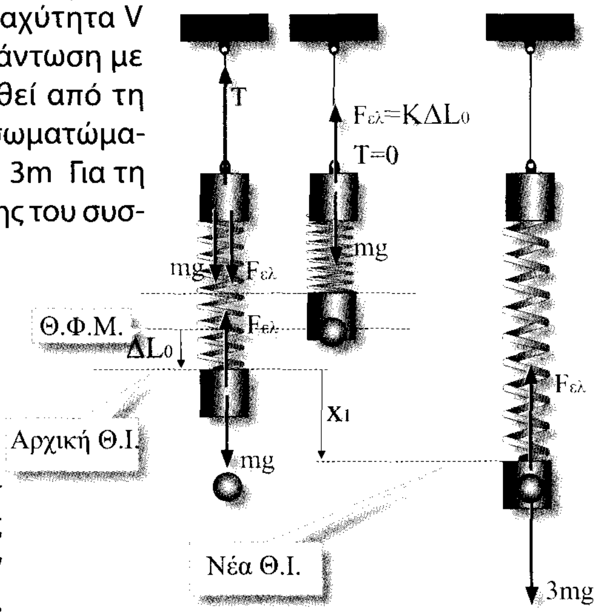
α. Παρατηρήστε ότι $m_1 = m_2 = m$ και $m_3 = 2$ m.
Αρχικά το σώμα $Σ_2$ ισορροπεί και το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $ΔL_0$ από τη θέση φυσικού μήκους. Για την αρχική κατάσταση ισορροπίας ισχύει $ΣF = 0$, επομένως θα είναι $mg = KΔL_0 \quad \Rightarrow \quad ΔL_0 = \frac{mg}{K} = 0{,}1$ m.

Η συνθήκη ισορροπίας για το $Σ_1$ απαιτεί να ισχύει $T = mg + KΔL$ και επομένως για να μηδενιστεί η τάση του νήματος πρέπει να ισχύει $ΔL = -\frac{mg}{K}$, δηλαδή το

27

σώμα $Σ_2$ να ανέβει κατά $2\frac{mg}{K} = 20$ cm από την αρχική θέση ισορροπίας του.

Όταν το βλήμα συγκρουστεί με το $Σ_2$ το συσσωμάτωμα θα φύγει από τη θέση ισορροπίας του $Σ_1$ με αρχική ταχύτητα V και θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας που θα βρεθεί από τη συνθήκη ισορροπίας του συσσωματώματος που θα έχει μάζα $m_2 + m_3 = 3m$ Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος ισχύει:



$$3mg = K(ΔL_0 + x_1) \quad \Rightarrow$$

$$3mg = KΔL_0 + Kx_1 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{2mg}{K} = 0{,}2 \text{ m}$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος βρίσκεται 20 cm κάτω από την αρχική θέση ισορροπίας του $Σ_2$.

Άρα, για να μηδενιστεί η τάση του νήματος πρέπει το συσσωμάτωμα να εκτελέσει αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 4\frac{mg}{K}$.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος και έχουμε:

$$\frac{1}{2}3mV^2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 = \frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow 3mV^2 = 16\frac{m^2g^2}{K} - 4\frac{m^2g^2}{K} \Rightarrow$$

$$3mV^2 = 12\frac{m^2g^2}{K} \Rightarrow V = 2g\sqrt{\frac{m}{K}} = 2 \text{ m/s}$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση βρίσκουμε:

$$2mυ_0 = 3mV, \quad \text{άρα} \quad υ_0 = 3 \text{ m/s}$$

β.1. Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω, η εξίσωση της ταλάντωσης του συσσωματώματος θα είναι $x = Aημ(ωt + φ_0)$, όπου:

$$ω = \sqrt{\frac{K}{3m}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s} \quad \text{και} \quad A = 4\frac{mg}{K} = 0{,}4 \text{ m}$$

Τη στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση (t = 0) είναι $x = x_1 = 0{,}2$ m με θετική ταχύτητα επομένως θα είναι $ημφ_0 = ½$ και άρα $φ_0 = π/6$ rad. Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης θα είναι:

$$x = 0{,}4ημ\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}t + \frac{π}{6}\right) \text{S.I.}$$

Το νήμα σπάει, όταν η τάση του νήματος γίνει $T = T_Θ$, άρα όταν $mg + KΔL = 16$ N, δηλαδή, όταν $ΔL = 0{,}3$ m.
Η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $ΔL = ΔL_0 + x_1 - x$, άρα $x = ΔL_0 + x_1 - ΔL$.
Επομένως, το νήμα σπάει, όταν $x = 0{,}3\text{m} - 0{,}3\text{m} = 0$.
Από την εξίσωση της ταλάντωσης βρίσκουμε:

$$0 = 0{,}4ημ\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}t + \frac{π}{6}\right) \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3}t + \frac{π}{6} = π \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3}t = \frac{5π}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{12}π \text{ s}$$

β.2. Η εξίσωση του μέτρου της τάσης του νήματος είναι:

$$T = mg + KΔL = mg + KΔL_0 + Kx_1 - Kx \Rightarrow$$

$$T = 16 - 16ημ\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}t + \frac{π}{6}\right) \text{ S.I.}$$

Επομένως, η γραφική παράσταση του μέτρου της τάσης θα είναι αυτή του σχήματος.

β.3. Τη στιγμή που σπάει το νήμα στο σώμα $Σ_1$ θα ασκούνται το βάρος του mg και η δύναμη του ελατηρίου που εκείνη τη στιγμή θα έχουν $ΣF = mg + KΔL = T_Θ$.
Από το θεμελιώδη νόμο θα έχουμε:

$$α = \frac{ΣF}{m} = \frac{mg + F_{ελ}}{m} = \frac{16\text{N}}{0{,}4\text{kg}} = 40 \text{ m/s}^2$$

α. Μόλις αφήσουμε ελεύθερο το σώμα Α από τη θέση μέγιστης εκτροπής, αυτό θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0{,}4$ m, κυκλική συχνότητα $ω = \sqrt{\frac{K}{m_1}} = 10$ rad/s και αρχική φάση $φ_0 = π/2$ rad, αφού αρχίζει από την ακραία θέση της ταλάντωσης. 29
Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $x = 0{,}4ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right)$ S.I..

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι $υ = 4συν\left(10t + \frac{π}{2}\right)$ S.I..

Η σύγκρουση πραγματοποιείται τη στιγμή που είναι $x = -0{,}2\sqrt{3}$m. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της απομάκρυνσης βρίσκουμε:

$$-0{,}2\sqrt{3} = 0{,}4ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right) \Rightarrow ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 10t + \frac{π}{2} = \frac{4π}{3} \Rightarrow$$

$$10t = \frac{5π}{6} \Rightarrow t = \frac{5π}{60}\text{s}$$

β. Εκείνη τη στιγμή η ταχύτητα του σώματος Α με την οποία θα γίνει η σύγκρουση είναι:

$$υ = 4συν\left(\frac{4π}{3}\right) = -2 \text{ m/s}$$

γ. Για να μελετήσουμε την κρούση θεωρούμε θετική τη φορά της ταχύτητας $\upsilon = 2$ m/s του σώματος Α πριν την κρούση.
Έστω ότι είναι υ_A και υ_B οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής και της ενέργειας έχουμε:
Α.Δ.Ο.: $m \cdot \upsilon = m \cdot \upsilon_A + m \cdot \upsilon_B$ ή $\upsilon = \upsilon_A + \upsilon_B$ (1)
Α.Δ.Ε.: $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + Q$, όπου $Q = 0,42\frac{1}{2}m\upsilon^2$, η ενέργεια που έχασε το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση.
Επομένως η Α.Δ.Ε. γράφεται:

$$0,58\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 \Rightarrow 0,58 \cdot \upsilon^2 = \upsilon_A^2 + \upsilon_B^2 \quad (2)$$

Από την (1) προκύπτει:

$$\upsilon_A^2 + \upsilon_B^2 + 2\upsilon_A\upsilon_B = \upsilon^2 \xrightarrow{(2)} 0,58 \cdot \upsilon^2 + 2\upsilon_A\upsilon_B = \upsilon^2 \Rightarrow$$

$$2\upsilon_A\upsilon_B = 0,42\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon_B = \frac{0,21 \cdot \upsilon^2}{\upsilon_A}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε:

$$\upsilon = \upsilon_A + \frac{0,21 \cdot \upsilon^2}{\upsilon_A} \Rightarrow \upsilon_A^2 - \upsilon \cdot \upsilon_A + 0,21 \cdot \upsilon^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_A = \frac{\upsilon \pm \sqrt{\upsilon^2 - 0,84 \cdot \upsilon^2}}{2} = \frac{\upsilon \pm 0,4\upsilon}{2} \Rightarrow \begin{matrix} \upsilon_A = 0,7 \cdot \upsilon = 1,4 \text{ m/s} \\ \upsilon_A = 0,3 \cdot \upsilon = 0,6 \text{ m/s} \end{matrix}$$

Άρα ή θα είναι $\upsilon_A = 1,4$ m/s και $\upsilon_B = \upsilon - \upsilon_A = 0,6$ m/s
ή θα είναι $\boldsymbol{\upsilon_A = 0,6}$ **m/s** και $\boldsymbol{\upsilon_B} = \upsilon - \upsilon_A = \mathbf{1,4}$ **m/s**.
Από τις δύο λύσεις δεχόμαστε τη δεύτερη, γιατί πρέπει να είναι $\upsilon_A < \upsilon_B$.

δ. Τη στιγμή που το σώμα Α έχει μετατοπιστεί κατά 60 cm από την αρχική θέση θα έχει απομάκρυνση $x = -0,2$ m (με βάση τη θετική φορά της ταλάντωσης) και συνεπώς δεν έχει συγκρουστεί ακόμα με το Β. Στη θέση αυτή το σώμα Α θα έχει ταχύτητα προς την αρνητική κατεύθυνση με μέτρο που βρίσκεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση. Δηλαδή:

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow \upsilon'^2 = \frac{K(A^2 - x^2)}{m_1} \Rightarrow \upsilon' = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Α δίνεται από τη σχέση:

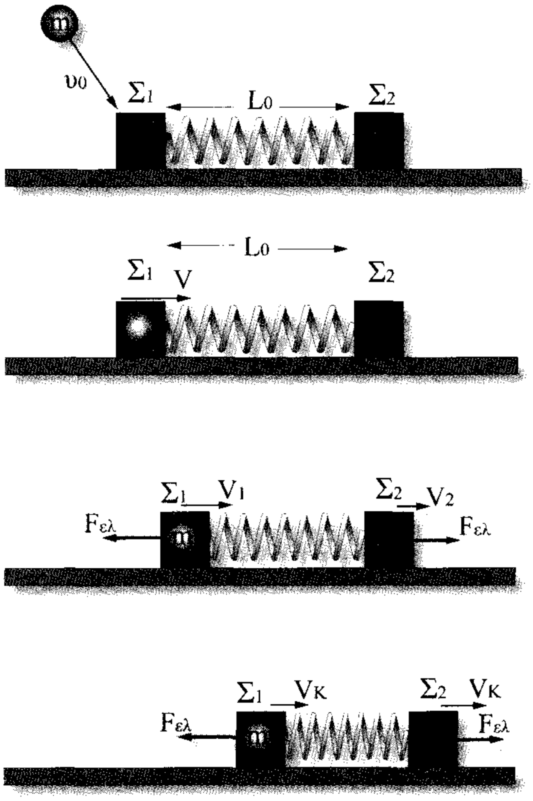
$$\frac{dK}{dt} = F_{\varepsilon\pi} \cdot \upsilon' = -K \cdot x \cdot \upsilon' = -80\sqrt{3} \text{ J/s}$$

ΘΕΜΑ 108ο

α. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής κατά τον οριζόντιο άξονα:

$$m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu 60^\circ = (m_1 + m)V, \text{ άρα } V = \frac{m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu 60^\circ}{m + m_1} = 12 \text{ m/s}$$

Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα $(m + m_1)$ ξεκινά με αρχική ταχύτητα $V = 12$ m/s και το ελατήριο αρχίζει να συσπειρώνεται. Καθώς το ελατήριο συσπειρώνεται το συσσωμάτωμα δέχεται δύναμη από το ελατήριο που το επιβραδύνει, ενώ το $Σ_2$ θα δέχεται δύναμη από το ελατήριο που το επιταχύνει.



β. Όση ώρα το συσσωμάτωμα $(m + m_1)$ έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το $Σ_2$, το ελατήριο συσπειρώνεται και αποκτά μέγιστη συσπείρωση τη στιγμή που τα δύο σώματα αποκτούν στιγμιαία κοινή ταχύτητα V_K.

Την κοινή αυτή ταχύτητα μπορούμε να την υπολογίσουμε με την αρχή διατήρησης της ορμής, αφού το σύστημα δε δέχεται εξωτερικές δυνάμεις. Άρα:

$$(m + m_1)V = (m + m_1 + m_2)V_K,$$

οπότε $V_K = 8$ m/s.

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή διατήρησης της ενέργειας, σύμφωνα με την οποία η κινητική ενέργεια του συσσωμάτωματος θα είναι ίση με την τελική κινητική ενέργεια των σωμάτων και την ενέργεια λόγω παραμόρφωσης του ελατηρίου.

Επομένως θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}(m+m_1)V^2 = \frac{1}{2}(m+m_1+m_2)V_K^2 + \frac{1}{2}K\,ΔL_{max}^2 \Rightarrow$$

$$K = \frac{(m+m_1)V^2 - (m+m_1+m_2)V_K^2}{ΔL_{max}^2} \Rightarrow$$

$$K = \frac{0{,}2\ \text{kg}\cdot 144\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 0{,}3\ \text{kg}\cdot 64\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{0{,}04\ \text{m}^2} = 240\ \text{N/m}$$

Η σταθερά του ελατηρίου είναι $K = 240$ N/m.

γ. Μετά από τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης το $Σ_2$ θα συνεχίσει να επιταχύνεται και το συσσωμάτωμα $(m + m_1)$ θα συνεχίσει να επιβραδύνεται, οπότε θα έχει μικρότερη ταχύτητα από το $Σ_2$ και το ελατήριο θα αρχίσει να επιστρέφει στην κατάσταση φυσικού μήκους.

Το $Σ_2$ θα επιταχύνεται όσο το ελατήριο είναι συσπειρωμένο και άρα ασκεί στο $Σ_2$ δύναμη προς την κατεύθυνση της ταχύτητας. Άρα η ταχύτητα του $Σ_2$ θα γίνει μέγιστη τη στιγμή που το ελατήριο ξαναβρεθεί στο φυσικό του μήκος.

Εφαρμόζοντας της αρχή διατήρησης της ορμής από τη στιγμή αμέσως μετά την πλαστική κρούση μέχρι τη στιγμή που το ελατήριο ξαναβρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους προκύπτει:

$$(m + m_1)V = (m + m_1)V_1 + m_2V_2,\ \text{άρα}\ 0{,}2V = 0{,}2V_1 + 0{,}1V_2 \quad (S.I.) \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας της αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}(m+m_1)V^2 = \frac{1}{2}(m+m_1)V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \Rightarrow 0{,}2V^2 = 0{,}2\cdot V_1^2 + 0{,}1\cdot V_2^2 \quad (S.I.) \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow \quad 2(V - V_1) = V_2 \\ (2) \quad 2(V - V_1)(V + V_1) = V_2^2\end{array}\right\} \Rightarrow V + V_1 = V_2$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$2V = 2V_1 + V + V_1 \Rightarrow 3V_1 = V \Rightarrow V_1 = \frac{V}{3} = 4\ m/s,\ \text{άρα:}$$

$$V_2 = V + \frac{V}{3} = \frac{4V}{3} = 16\ m/s$$

δ. Τη στιγμή που η ταχύτητα του συσσωματώματος $(m + m_1)$ γίνει $V_1 = 12\ m/s - 2\ m/s = 10\ m/s$ το σώμα Σ_2 θα έχει ταχύτητα V_2 που θα βρεθεί από την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$0{,}2\cdot 12 = 0{,}2\cdot V_1 + 0{,}1\cdot V_2,\ \text{άρα}\ V_2 = 4\ m/s$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας βρίσκουμε την παραμόρφωση του ελατηρίου εκείνη τη στιγμή. Δηλαδή:

$$\frac{1}{2}(m+m_1)V^2 = \frac{1}{2}(m+m_1)V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \frac{1}{2}K\,\Delta L^2 \Rightarrow$$

$$\Delta L^2 = \frac{(m+m_1)V^2 - (m+m_1)V_1^2 - m_2V_2^2}{K} \Rightarrow$$

$$\Delta L^2 = \frac{0{,}2\cdot 144 - 0{,}2\cdot 100 - 0{,}1\cdot 16}{240} = \frac{7{,}2}{240}\ m^2 \Rightarrow \Delta L = 0{,}1\sqrt{3}\ m$$

Η αρνητική ισχύς της δύναμης του ελατηρίου εκφράζει το ρυθμό αύξησης της δυναμικής του ενέργειας λόγω παραμόρφωσης και η θετική ισχύς εκφράζει το ρυθμό μείωσης της δυναμικής του ενέργειας λόγω παραμόρφωσης. Κατά συνέπεια ο ρυθμός αύξησης της ενέργειας του ελατηρίου εκείνη τη στιγμή θα είναι ίσος με το αντίθετο της ισχύος των δυνάμεων που ασκεί το ελατήριο στα δύο σώματα. Επομένως:

$$\frac{dU}{dt} = F_{\varepsilon\lambda}V_1 - F_{\varepsilon\lambda}V_2 = K\,\Delta L\,(V_1 - V_2) = 144\sqrt{3}\quad J/s$$

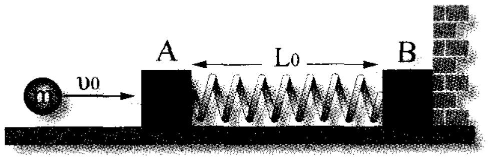
ΘΕΜΑ 109^o

α. Αμέσως μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα μάζας 2m θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και θα ξαναβρεθεί στη θέση ισορροπίας σε χρόνο $t_1 = T/2$, όπου:

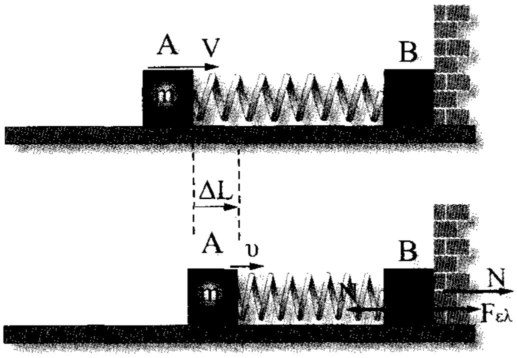
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}} = 0{,}2\pi\ s$$

Άρα, θα είναι $t_1 = 0{,}1\pi$ s.

Αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 το ελατήριο θα αρχίσει να επιμηκύνεται, οπότε το σώμα Β θα δεχθεί από το ελατήριο δύναμη, η οποία θα το επιταχύνει και το σώμα Β θα χάσει την επαφή του με τον τοίχο.



β. Όσο το ελατήριο είναι συμπιεσμένο, στο σώμα Β ασκούνται η δύναμη του ελατηρίου με μέτρο Κ·ΔL και φορά προς τον τοίχο και μια δύναμη επαφής Ν από τον τοίχο.



Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών είναι μηδέν, επομένως θα είναι Ν = = Κ·ΔL. Αυτό είναι το μέτρο και της δύναμης που ασκεί το σημείο Β στον τοίχο λόγω δράσης - αντίδρασης. Η μέγιστη τιμή της δύναμης επαφής θα είναι $N_{max} = K \cdot \Delta L_{max}$.

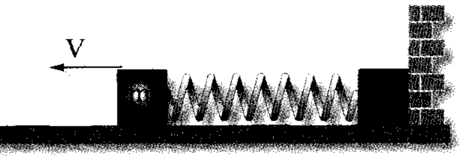
Για να βρούμε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, εφαρμόζουμε πρώτα την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση. Δηλαδή:

$$m \cdot \upsilon_0 = 2m \cdot V, \ \text{άρα} \ V = \upsilon_0/2 = 3 \text{ m/s}$$

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος και επειδή η κυκλική συχνότητα ισούται με ω = 2π/Τ = 10 rad/s, το πλάτος της ταλάντωσης που ταυτίζεται με τη μέγιστη συσπείρωση θα είναι $A = \upsilon_0/\omega =$ $= 0{,}3$ m. Επομένως $N_{max} = K \cdot A = 120$ N.

γ. Τη στιγμή που το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, απομακρυνόμενο από τον τοίχο, έχει ορμή 2mV.

Εκείνη τη στιγμή το σώμα Β χάνει την επαφή του με τον τοίχο και παύει να δέχεται δύναμη από αυτόν. Έτσι το σύστημα δε δέχεται εξωτερική δύναμη και από εκείνη τη στιγμή και μετά η ολική του ορμή διατηρείται σταθερή.



Όσο το σώμα Α έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Β, το ελατήριο θα επιμηκύνεται και η απόσταση των Α και Β θα αυξάνεται. Όμως η δύναμη του ελατηρίου θα επιβραδύνει το σώμα Α και θα επιταχύνει το σώμα Β. Κάποια στιγμή οι δύο ταχύτητες θα αποκτήσουν ίσα μέτρα V_K και άρα η μεταξύ τους απόσταση θα πάψει να αυξάνεται.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής θα έχουμε:

$$2mV = 3mV_K, \ \text{άρα} \ V_K = 2V/3 = 2 \text{ m/s}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}2mV^2 = \frac{1}{2}3mV_K^2 + \frac{1}{2}K\Delta L^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta L = 0{,}1\sqrt{3} \text{ m}$$

Επομένως, η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σωμάτων Α και Β είναι:

$$d_{max} = 50cm + 10\sqrt{3}cm = 67,3\ cm$$

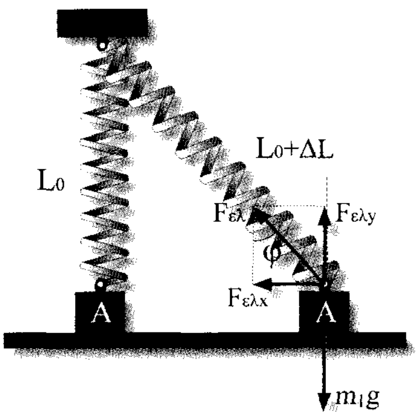
δ. Αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του σώματος Α μηδενίζεται κάποια στιγμή, τότε το σώμα Β θα έχει ταχύτητα V_B που λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής θα είναι:

$$mV_B = 2mV \text{ και άρα } V_B = 6\ m/s$$

Η κινητική ενέργεια του Β θα είναι $K_B = \frac{1}{2}mV_B^2 = 36\ J$ που είναι μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση που ήταν ίση με $\frac{1}{2}2mV^2 = 18\ J$. Παραβιάζεται λοιπόν η αρχή διατήρησης της ενέργειας και η υπόθεση απορρίπτεται.

ΘΕΜΑ 110ο

α. Καθώς το σώμα Α αρχίζει να μετατοπίζεται, το ελατήριο επιμηκύνεται και ασκείται στο σώμα Α δύναμη ελατηρίου $F_{ελ} = KΔL$ όπου ΔL είναι η παραμόρφωσή του.



Η δύναμη του ελατηρίου αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία κατακόρυφη και μία οριζόντια. Το σώμα Α θα χάσει την επαφή του με το δάπεδο, όταν γίνει $F_{ελy} = mg$.

Άρα, αν είναι φ η γωνία που σχηματίζει το ελατήριο με την κατακόρυφη, θα είναι φ και η γωνία που σχηματίζει η δύναμη του ελατήριου με την κατακόρυφη.

Επομένως, θα ισχύει $F_{ελ}\cdotσυνφ = mg$.

Από το τρίγωνο που σχηματίζεται διαπιστώνουμε ότι είναι $συνφ = \frac{L_0}{L_0 + ΔL}$.

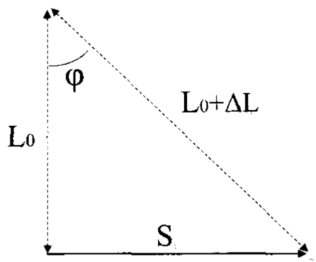
Επομένως:

$$K \cdot ΔL \frac{L_0}{L_0 + ΔL} = mg \quad \Rightarrow$$

$$K \cdot ΔL \cdot L_0 = mgL_0 + mgΔL \Rightarrow$$

$$(K \cdot L_0 - mg)ΔL = mgL_0$$

$$ΔL = \frac{mgL_0}{K \cdot L_0 - mg} = 0,3\ m$$



Άρα, το μήκος του ελατηρίου στη θέση όπου το σώμα θα χάσει την επαφή του με το δάπεδο, θα είναι $L = L_0 + ΔL = 0,6\ m$.

Επομένως, το διάστημα που θα διανύσει το σώμα Α μέχρι να χάσει την επαφή του με το δάπεδο θα είναι $S = \sqrt{L^2 - L_0^2} = 30\sqrt{3}\ cm$.

β. Για να μεταβεί το σώμα Α στο σημείο όπου θα χάσει την επαφή του με το δάπεδο θα πρέπει να ξεκινήσει από την αρχική του θέση με ταχύτητα $υ_A$, η οποία θα βρεθεί εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας:

$$0-\frac{1}{2}m_1υ_A^2=-\frac{1}{2}KΔL^2 \Rightarrow υ_A=ΔL\sqrt{\frac{K}{m_1}}=\sqrt{6}\ \text{m/s}$$

Επειδή το σώμα Β συγκρούεται ελαστικά με το σώμα Α θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$υ_A=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}υ_0 \Rightarrow υ_0=\frac{m_1+m_2}{m_2-m_2}υ_A=\frac{3}{1}\sqrt{6}=3\sqrt{6}\ \text{m/s}$$

γ. Η ταχύτητα του σώματος Β μετά την κρούση θα είναι:

$$υ_B=\frac{2m_2}{m_1+m_2}υ_0 \Rightarrow υ_B=\frac{2}{3}3\sqrt{6}\ \text{m/s}=2\sqrt{6}\ \text{m/s}$$

δ. Όταν το σώμα Α μετατοπιστεί κατά $S_1=10\sqrt{3}$ cm το ελατήριο θα σχηματίζει γωνία θ που θα έχει $εφθ=\frac{S_1}{L_0}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ και άρα $θ=30^o$.

Επομένως, το μήκος του ελατηρίου θα είναι $L=\frac{S_1}{ημθ}=20\sqrt{3}=34$ cm.

Η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι ΔL = 0,04 m και η δύναμη του ελατηρίου θα έχει μέτρο F = K·ΔL = 16/3 N.

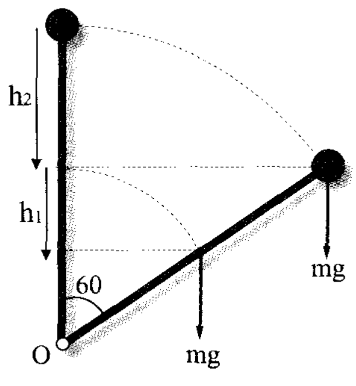
Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α είναι ίσος με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και άρα θα είναι:

$$\frac{dp}{dt}=-Fημθ=-\frac{16}{3}\frac{1}{2}=-\frac{8}{3}\ \text{kgm/s}^2$$

ΘΕΜΑ 111^o

α. Αρχικά βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος δίσκος ως προς τον άξονα περιστροφής Ο. Θα είναι:

$$I=\frac{1}{12}mL^2+m\frac{L^2}{4}+mL^2=\frac{4}{3}mL^2$$



Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για τη ράβδο από την αρχική της θέση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1. Οπότε, έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{4}{3}mL^2ω_1^2=mgh_1+mgh_2$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι είναι:

$$h_1=\frac{L}{2}-\frac{L}{2}συν60^o=\frac{L}{4} \quad \text{και} \quad h_2=L-Lσυν60^o=\frac{L}{2}$$

Επομένως:

$$\frac{2}{3}mL^2ω_1^2=\frac{3}{4}mgL \Rightarrow ω_1^2=\frac{9g}{8L} \Rightarrow ω_1=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}=\frac{15}{8}\ \text{rad/s}$$

β. Τη στιγμή t_1 ο ανιχνευτής που βρίσκεται στο άκρο της ράβδου έχει ταχύτητα:

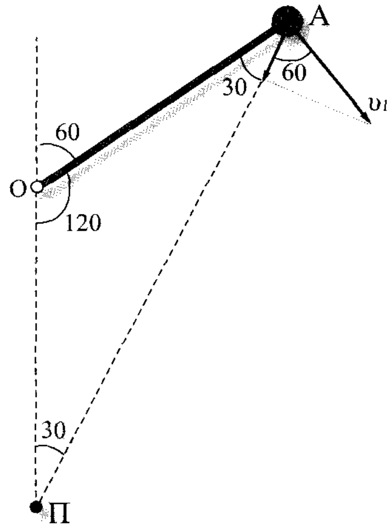
$$υ_1 = ω_1 L = 6\ m/s$$

Επειδή η ταχύτητα $υ_1$ είναι κάθετη στη ράβδο και το τρίγωνο ΑΟΠ είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής 120°, θα έχει γωνίες βάσης 30° η καθεμία. Συνεπώς, η ταχύτητα $υ_1$ του ανιχνευτή σχηματίζει γωνία φ = 60° με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΠ που συνδέει τον ανιχνευτή με την πηγή του ηχητικού κύματος.

Επομένως, η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής είναι:

$$f_{A1} = \frac{υ_H + υ_1 συν 60^o}{υ_H} fs = \frac{340+3}{340} 680\ Hz = 686\ Hz$$

γ. Η μέγιστη συχνότητα καταγράφεται τη στιγμή που ο ανιχνευτής έχει μέγιστη ταχύτητα κατά τη διεύθυνση ΑΠ και αυτή εμφανίζεται, όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη, ελάχιστα πριν περάσει από την πηγή.



Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για τη ράβδο από την αρχική της θέση μέχρι τη νέα κατακόρυφη θέση της ράβδου. Δηλαδή:

$$\frac{1}{2}\frac{4}{3} mL^2 ω_2^2 = mgL + mg2L \quad \Rightarrow \quad ω_2 = 3\sqrt{\frac{g}{2L}}$$

Η ταχύτητα του ανιχνευτή θα είναι:

$$υ_2 = ω_2 L = 12\ m/s$$

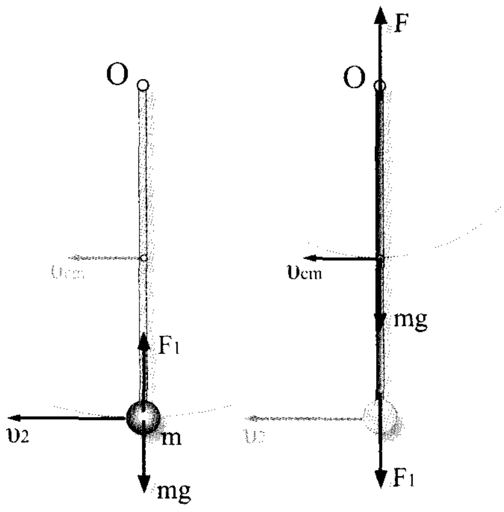
Επομένως:

$$f_{A2} = \frac{υ_H + υ_2}{υ_H} fs = \frac{340+12}{340} 680\ Hz = 704\ Hz$$

δ. Τη στιγμή που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη το κέντρο μάζας της εκτελεί κυκλική κίνηση με ταχύτητα $υ_{cm} = ω_2 L/2 = 6\ m/s$ και το σφαιρίδιο στο άκρο της εκτελεί και αυτό κυκλική κίνηση με ταχύτητα $υ_2 = 12\ m/s$.

Εκείνη τη στιγμή η ράβδος ασκεί στο σφαιρίδιο κατακόρυφη δύναμη F_1 με φορά προς τα πάνω τέτοια, ώστε να ισχύει: (Θεμελιώδης νόμος για το σφαιρίδιο)

$$F_1 - mg = \frac{mυ_2^2}{L} \quad \Rightarrow \quad F_1 = mg + \frac{mυ_2^2}{L}$$



Οι δυνάμεις στη σφαίρα

Οι δυνάμεις στη ράβδο

Λόγω δράσης - αντίδρασης και το σφαιρίδιο ασκεί ίσου μέτρου αντίθετη δύναμη στη ράβδο. Επίσης στη ράβδο θα ασκείται και η δύναμη F από τον άξονα Ο. Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο για την κυκλική κίνηση του κέντρου μάζας της ράβδου προκύπτει:

$$F - F_1 - mg = \frac{m\upsilon_{cm}^2}{L/2} \Rightarrow F = F_1 + mg + \frac{2m\upsilon_{cm}^2}{L} =$$

$$2mg + \frac{m\upsilon_2^2}{L} + \frac{2m\upsilon_{cm}^2}{L} = 350 \text{ N}$$

ΘΕΜΑ 112ο

Οι αποστάσεις από τη Θ.Φ.Μ είναι:

$x_2 = \frac{2mg}{K} \Rightarrow \frac{m}{K} = \frac{x_2}{2g} \Rightarrow \frac{m}{K} = \frac{0,2}{20} = \frac{1}{100}$ αφού $x_2 = 20$ cm

$x_1 = \frac{mg}{K} = \frac{1}{100} \cdot 10 = 0{,}1\text{m}$ άρα $x_1 = 10$ cm

Η στιγμή που ξεκολλά η μάζα m, το κιβώτιο ξεκινά ταλάντωση (από την ακραία θέση, αφού η αρχική του ταχύτητα είναι $\upsilon_0 = 0$)

πλάτους $A_1 = x_2 - x_1 = 0{,}1$m

και περιόδου $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\pi}{5}$ sec.

Η ανώτερη θέση της ταλάντωσης του κιβωτίου, βρίσκεται σε απόσταση $2A_1 = 0{,}2$ m, από την αρχική θέση και το σώμα συγκρούεται με το κιβώτιο στον ίδιο χρόνο, το σώμα κάνει ελεύθερη πτώση και διανύει απόσταση

$d - x = \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}10\frac{\pi^2}{100} = 0{,}5$ m

Άρα $d = x + 0{,}5 = 2A_1 + 0{,}5 = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$ m

Αφού το κιβώτιο βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, άρα έχει ταχύτητα μηδέν.

Το σώμα λόγω της ελεύθερης πτώσης για χρόνο t=T/2 έχει ταχύτητα

$\upsilon = gt = 10 \cdot \frac{\pi}{10} = \pi$ m/s

Έτσι το συσσωμάτωμα ξεκινά τη νέα ταλάντωση στην απομάκρυνση $x = x_2 = 0{,}2$ m

με ταχύτητα $\upsilon = \frac{\pi}{2}$ m/s

εφαρμόζοντας ΑΔΕΤ έχουμε:

37

$$\frac{1}{2}k\,x^2+\frac{1}{2}(2m)\upsilon^2=\frac{1}{2}k\,A^2\Rightarrow$$

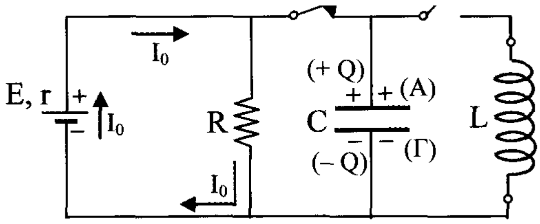
$$\frac{k}{m}x^2+2\upsilon^2=\frac{k}{m}A^2\Rightarrow$$

$$100x^2+2\upsilon^2=100A^2\Rightarrow$$

$$100\cdot\frac{4}{100}+2\cdot\frac{\pi^2}{4}=100A^2\Rightarrow A^2=\frac{2}{100}\Rightarrow A=0{,}3\,m$$

ΘΕΜΑ 113º

α. Ο κλάδος που περιέχει τον πυκνωτή **δεν** διαρρέεται από ρεύμα. Από ρεύμα διαρρέεται **μόνο** ο βρόχος του κυκλώματος που περιέχει την πηγή (Ε, r) και τον αντιστάτη αντίστασης R.



Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I_0=\frac{E}{R+r}\qquad \textbf{(1)}$$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή ισούται με την τάση στα άκρα του αντιστάτη αντίστασης R. Δηλαδή:

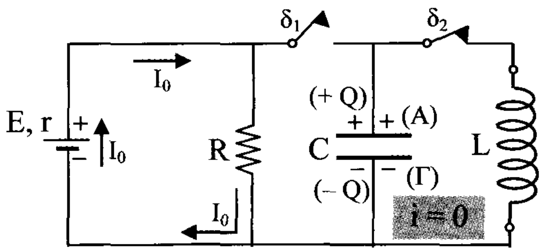
$$V_C=V_R=I_0R\quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1),}\quad V_C=\frac{ER}{R+r}$$

Το φορτίο που αποθηκεύεται στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι:

$$Q=CV_C\quad \text{ή, λόγω της προηγούμενης σχέσης,}$$

$$Q=\frac{CER}{R+r}=\frac{20\cdot10^{-6}\cdot25\cdot3}{3+2}\,C\quad \text{ή}\quad Q=3\cdot10^{-4}\,C$$

β. Το διπλανό σχήμα δείχνει την κατάσταση του κυκλώματος τη χρονική στιγμή t = 0, δηλαδή τη χρονική στιγμή κατά την οποία ανοίγουμε τον διακόπτη δ_1 και κλείνουμε τον διακόπτη δ_2.



t = 0

Επειδή αυτή τη χρονική στιγμή το πηνίο **δεν** διαρρέεται από ρεύμα, οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις αρχίζουν με μέγιστο ηλεκτρικό φορτίο. Η γωνιακή συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{0{,}5\cdot10^{-3}\cdot20\cdot10^{-6}}}\,\text{rad/s}\quad \text{ή}\quad \omega=10^4\,\text{rad/s}$$

Το πλάτος της έντασης του ρεύματος είναι:

$$I = \omega Q = 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-4}\ \text{A} \quad ή \quad I = 3\ \text{A}$$

Οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου του πυκνωτή (φορτίο αρχικά θετικά φορτισμένου οπλισμού) καθώς και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι αντίστοιχα:

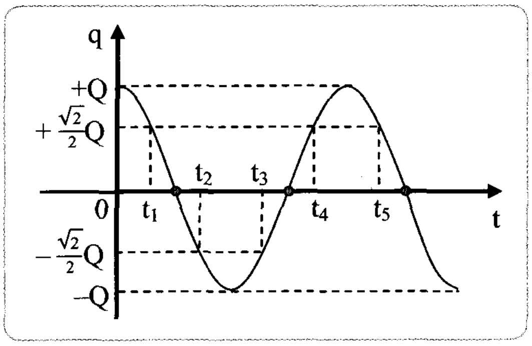
$$q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t) \quad ή \quad q = 3 \cdot 10^{-4}\sigma\upsilon\nu(10^4 t) \quad (\text{S.I.}) \quad \text{και}$$

$$i = -I\eta\mu(\omega t) \quad ή \quad i = -3\eta\mu(10^4 t) \quad (\text{S.I.})$$

γ. Εφόσον η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι ίση με την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή ($U_B = U_E$), εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$U_E + U_B = E_T \quad ή \quad 2U_E = E_T \quad ή \quad 2\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad ή \quad q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}Q$$

Όπως απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα, τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου ισούται με την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή για πρώτη φορά είναι $q > 0$.



Επομένως, η ζητούμενη τιμή του φορτίου είναι:

$$q = +\frac{\sqrt{2}}{2}Q = +\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-4}\ \text{C} \quad ή \quad q = 1{,}5\sqrt{2} \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

δ. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης. Δηλαδή:

$$U_E + U_B = E_T \quad ή \quad \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$ή \quad i = \pm\sqrt{\frac{Q^2 - q^2}{LC}} = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2} \quad ή \quad i = \pm 1{,}5\sqrt{2}\ \text{A}$$

39

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η αλγεβρική τιμή της έντασης του ρεύματος είναι αρνητική, δεχόμαστε τη λύση $i = +1{,}5\sqrt{2}$ A.

Ο ρυθμός μεταβολής της τάσης του πυκνωτή υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{d(q/C)}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} \quad ή \quad \frac{dV_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών παίρνουμε:

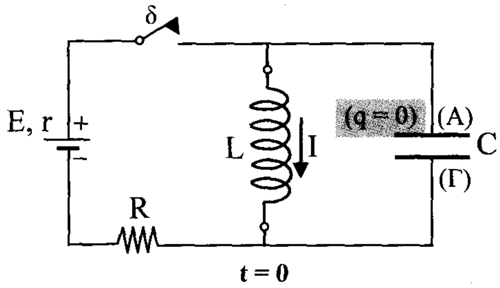
$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1{,}5\sqrt{2}}{20 \cdot 10^{-6}}\,V/s \quad ή \quad \frac{dV_C}{dt} = 0{,}75\sqrt{2} \cdot 10^{5}\,V/s$$

ΘΕΜΑ 114^{ο}

α. Ο βρόχος που περιέχει την πηγή (E, r), το πηνίο L και τον αντιστάτη αντίστασης R διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης I, η οποία υπολογίζεται από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα, σύμφωνα με τη σχέση:

$$I = \frac{E}{R + r} \quad ή \quad I = 1\,A$$

β. Τη χρονική στιγμή t = 0 ανοίγουμε τον διακόπτη δ, χωρίς απώλεια ενέργειας, με αποτέλεσμα η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα LC λόγω της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου να ελαττώνεται σταδιακά και ο πυκνωτής να αρχίζει να φορτίζεται. Η κατάσταση του κυκλώματος τη χρονική στιγμή t = 0 απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα.



Το ιδανικό κύκλωμα LC αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Επειδή ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος τη χρονική στιγμή t = 0, οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις αρχίζουν με μέγιστη ένταση ρεύματος. Θεωρώντας θετική τη φορά που έχει το ρεύμα τη χρονική στιγμή t = 0, οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου του πυκνωτή (φορτίο οπλισμού που θα φορτιστεί πρώτος θετικά – οπλισμός Γ) καθώς και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι, αντίστοιχα:

$$q = Qημ(ωt) \quad και \quad i = Iσυν(ωt)$$

όπου ω η γωνιακή συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

Η περίοδος Τ των ηλεκτρικών ταλαντώσεων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad ή \quad T = 4\pi\cdot 10^{-4}\ s$$

Η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το φορτίο του πυκνωτή θα αποκτήσει τη μέγιστη τιμή του (κατ' απόλυτη τιμή) για δεύτερη φορά είναι:

$$t_1 = \frac{3T}{4} \quad ή \quad t_1 = 3\pi\cdot 10^{-4}\ s$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ή \quad \omega = 5000\ rad/s$$

Η μέγιστη τιμή του φορτίου του πυκνωτή υπολογίζεται ως εξής:

$$I = \omega Q \quad ή \quad Q = \frac{I}{\omega} \quad ή \quad Q = 2\cdot 10^{-4}\ C$$

δ. Η χρονική εξίσωση της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad ή \quad U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2\eta\mu^2(\omega t)}{C} = \frac{1}{2}\frac{(2\cdot 10^{-4})^2\eta\mu^2(5000t)}{2\cdot 10^{-6}}$$

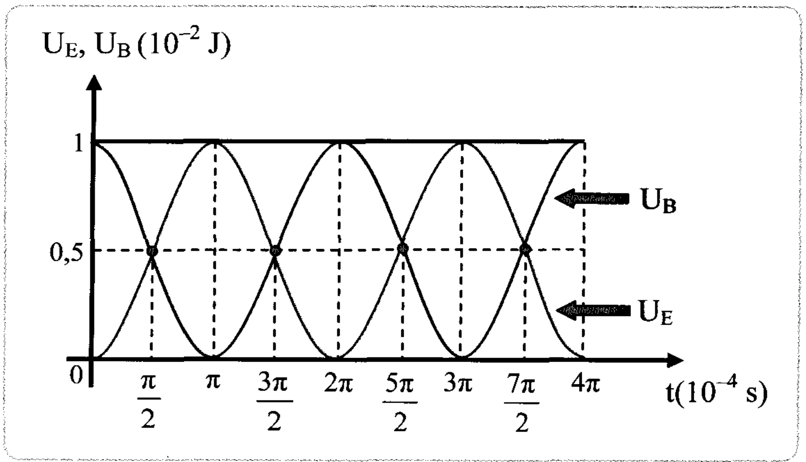
$$ή \quad U_E = 10^{-2}\eta\mu^2(5000t) \quad (S.I.)$$

Η χρονική εξίσωση της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \quad ή \quad U_B = \frac{1}{2}LI^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = \frac{1}{2}20\cdot 10^{-3}\sigma\upsilon\nu^2(5000t)$$

$$ή \quad U_B = 10^{-2}\sigma\upsilon\nu^2(5000t) \quad (S.I.)$$

Το ζητούμενο διάγραμμα απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



41

ΘΕΜΑ 115ο

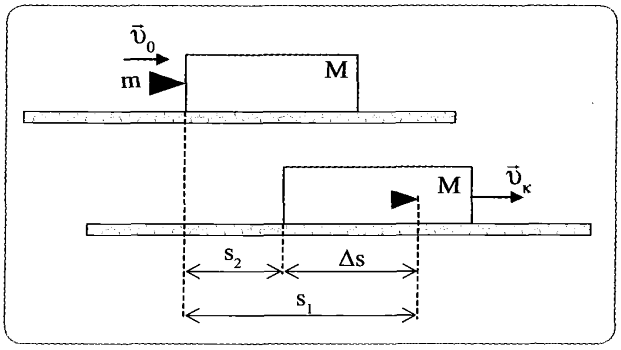
α. Από την Α.Δ.Ο. έχουμε: $m \cdot \upsilon_0 = (M+m)\cdot \upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 20$ m/s. Από το Θ.Ε.Ε. για το βλήμα έχουμε: $\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_0^2 = -\bar{F}\cdot(s+d)$ (1). Από το Θ.Ε.Ε. για το σώμα έχουμε: $\frac{1}{2}M\cdot\upsilon_\kappa^2 - 0 = \bar{F}\cdot s$ (2). Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε:

$$\frac{m\cdot(\upsilon_\kappa^2-\upsilon_0^2)}{M\cdot\upsilon_\kappa^2} = -\frac{s+d}{s} \quad \text{ή} \quad d = 90 \text{ cm}.$$

β. Από τη σχέση (2) προκύπτει: $\bar{F} = \frac{M\cdot\upsilon_\kappa^2}{2\,s}$ ή $\bar{F} = \frac{28}{3}\cdot 10^3$ N.

γ. Από τον Θ.Ν.Μ. για το βλήμα ισχύει: $\bar{F} = m\cdot\alpha$ ή $\alpha = \frac{\bar{F}}{m}$ (3). Για την επιβραδυνόμενη κίνηση του βλήματος ισχύει η σχέση: $\upsilon_\kappa = \upsilon_0 - \alpha\cdot\Delta t$ ή, λόγω της σχέσης (3),

$$\upsilon_\kappa = \upsilon_0 - \frac{\bar{F}}{m}\cdot\Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta t = 6\cdot 10^{-3} \text{ s}.$$



ΘΕΜΑ 116ο

α. Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ η παροχή του σωλήνα είναι σταθερή και ίση με 750 L/min. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ η παροχή του σωλήνα ελαττώνεται γραμμικά με τον χρόνο, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της παροχής είναι σταθερός. Έστω Π η παροχή του σωλήνα μία τυχαία χρονική στιγμή t ανάμεσα στις χρονικές στιγμές t_1 και t_2. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\Delta\Pi}{\Delta t} = \frac{\Pi-\Pi_1}{t-t_1} \quad \text{και} \quad \frac{\Delta\Pi}{\Delta t} = \frac{\Pi_2-\Pi_1}{t_2-t_1}$$

Από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει:

$$\frac{\Pi-\Pi_1}{t-t_1} = \frac{\Pi_2-\Pi_1}{t_2-t_1} \quad \text{ή} \quad \frac{\Pi-(750\text{ L/min})}{t-(5\text{ min})} = \frac{0-(750\text{ L/min})}{(20\text{ min})-(5\text{ min})} \quad \text{ή}$$

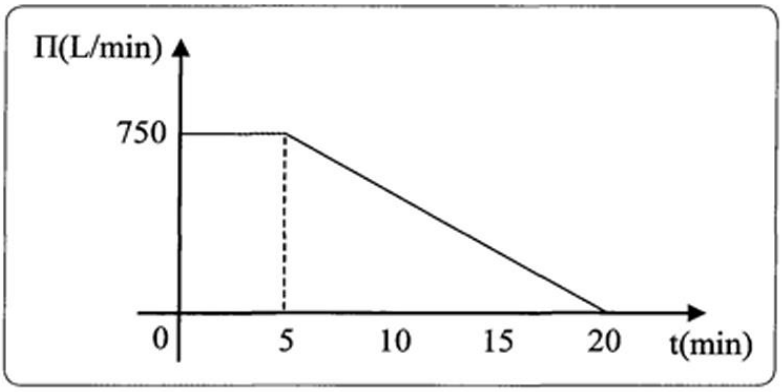
42

$$\frac{\Pi-(750\ \text{L/min})}{t-(5\ \text{min})}=-50\ \text{L/min}^2 \quad \text{ή} \quad \Pi=1000-50t \quad (t\rightarrow \text{min},\ \Pi\rightarrow \text{L/min})$$

Συγκεντρωτικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$\Pi=\left\{\begin{array}{l}750,\ 0\leq t\leq 5\ \text{min}\\ 1000-50t,\ 5\ \text{min}\leq t\leq 20\ \text{min}\end{array}\right\}\ (t\rightarrow \text{min},\ \Pi\rightarrow \text{L/min})$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



β. Τη χρονική στιγμή t_3 = 3 min η παροχή του σωλήνα είναι Π_3 = 750 L/min. Έστω υ_3 το μέτρο της ταχύτητας ροής του νερού τη χρονική στιγμή t_3. Ισχύει η σχέση:

$$\Pi_3=A\cdot\upsilon_3 \quad \text{ή} \quad \upsilon_3=\frac{\Pi_3}{A}=\frac{750\ \text{L/min}}{10\cdot10^{-4}\ \text{m}^2}=\frac{750\cdot10^{-3}\ \text{m}^3/\text{min}}{10\cdot10^{-4}\ \text{m}^2} \quad \text{ή} \quad \upsilon_3=750\ \text{m/min}$$

Τη χρονική στιγμή t_4 = 15 min η παροχή του σωλήνα είναι:

$$\Pi_4=(1000-50\cdot15)\ \text{L/min} \quad \text{ή} \quad \Pi_4=250\ \text{L/min}$$

Έστω υ_4 το μέτρο της ταχύτητας ροής του νερού τη χρονική στιγμή t_4. Ισχύει η σχέση:

$$\Pi_4=A\cdot\upsilon_4 \quad \text{ή} \quad \upsilon_4=\frac{\Pi_4}{A}=\frac{250\ \text{L/min}}{10\cdot10^{-4}\ \text{m}^2}=\frac{250\cdot10^{-3}\ \text{m}^3/\text{min}}{10\cdot10^{-4}\ \text{m}^2} \quad \text{ή} \quad \upsilon_3=250\ \text{m/min}$$

γ. Ο όγκος του νερού που εξέρχεται από τον πυροσβεστικό σωλήνα ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν της επιφάνειας (εδώ σχήματος τραπεζίου) που εκτείνεται μεταξύ της γραμμής που απεικονίζει τη μεταβολή Π = f(t) και του άξονα των χρόνων. Έχουμε:

$$V=\frac{5\ \text{min}+20\ \text{min}}{2}\cdot750\ \frac{\text{L}}{\text{min}} \quad \text{ή} \quad V=9375\ \text{L}$$

Έστω m η ζητούμενη μάζα. Από την εξίσωση ορισμού της πυκνότητας έχουμε:

$$\rho=\frac{m}{V} \quad \text{ή} \quad m=\rho\cdot V=(1\cdot10^3\ \text{kg/m}^3)\cdot(9375\cdot10^{-3}\ \text{m}^3) \quad \text{ή} \quad m=9375\ \text{kg}$$

ΘΕΜΑ 117ο

α. Μετά την πρόσκρουση της φλέβας επάνω στην πλάκα, το νερό κινείται παράλληλα προς την επιφάνεια της πλάκας και προς τα άκρα της. Επομένως, η ταχύτητα της φλέβας, μετά την πρόσκρουση της τελευταίας στην πλάκα, στη διεύθυνση της αρχικής ροής ισούται με μηδέν $\left(\vec{\upsilon}_2 = 0\right)$.

Έστω Δm η μάζα του νερού που προσκρούει στην πλάκα σε χρόνο Δt. Θεωρώντας θετική φορά τη φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$, η μεταβολή της ορμής της μάζας Δm του νερού εξαιτίας της πρόσκρουσης είναι:

$$\Delta P = P_{\tau\varepsilon\lambda.} - P_{\alpha\rho\chi.} = \Delta m \cdot \upsilon_2 - \Delta m \cdot \upsilon_1 = \Delta m \cdot 0 - \Delta m \cdot \upsilon_1 \quad \acute{\eta} \quad \Delta P = -\Delta m \cdot \upsilon_1 \quad \textbf{(1)}$$

Η μεταβολή της ορμής στη μονάδα του χρόνου ισούται με τη δύναμη που προκαλεί η πρώτη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε, ισούται με τη δύναμη που ασκεί η πλάκα στη μάζα Δm του νερού. Δηλαδή:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1),} \quad F = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\upsilon_1 = -\frac{\rho \cdot \Delta V}{\Delta t}\upsilon_1 \quad \acute{\eta} \quad F = -\rho \Pi \upsilon_1 \quad \textbf{(2)}$$

όπου Π η παροχή της φλέβας, δηλαδή το πηλίκο της διαίρεσης του όγκου ΔV του νερού που προσκρούει επάνω στην πλάκα σε χρόνο Δt. Όμως είναι:

$$\Pi = A \cdot \upsilon_1 \quad \textbf{(3)}$$

Επομένως, η σχέση (2), λόγω της σχέσης (3), γράφεται:

$$F = -\rho A \upsilon_1^2 = -\left(1\cdot 10^3 \text{ kg/m}^3\right)\cdot\left(10\cdot 10^{-4} \text{ m}^3\right)\cdot\left(2 \text{ m/s}\right)^2 \quad \acute{\eta} \quad F = -4 \text{ N}$$

Λόγω δράσης – αντίδρασης η δύναμη που ασκεί η φλέβα στην πλάκα είναι:

$$F' = -F \quad \acute{\eta} \quad F' = 4 \text{ N}$$

β. Έστω ότι σε χρόνο Δt προσκρούει στην πλάκα ποσότητα νερού μάζας Δm. Θεωρώντας θετική φορά τη φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$, στη διεύθυνση της ροής η μεταβολή της ορμής της μάζας Δm του νερού είναι:

$$\Delta P = P_{\tau\varepsilon\lambda.} - P_{\alpha\rho\chi.} = \Delta m \cdot \upsilon_2 - \Delta m \cdot \upsilon_1 = \Delta m \cdot (0{,}5\upsilon_1) - \Delta m \cdot \upsilon_1 \quad \acute{\eta} \quad \Delta P = -0{,}5\Delta m \cdot \upsilon_1 \quad \textbf{(4)}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της μάζας Δm του νερού ισούται με τη δύναμη που ασκεί η πλάκα στην παραπάνω ποσότητα. Έχουμε:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (4),} \quad F = -0{,}5\frac{\Delta m}{\Delta t}\upsilon_1$$

Λόγω δράσης – αντίδρασης η δύναμη που ασκεί η φλέβα στην πλάκα είναι:

$$F' = -F \quad \acute{\eta} \quad F' = 0{,}5\frac{\Delta m}{\Delta t}\upsilon_1 = 0{,}5\frac{\rho \cdot \Delta V}{\Delta t}\upsilon_1 \quad \acute{\eta} \quad F' = 0{,}5\rho \Pi \upsilon_1 \quad \textbf{(5)}$$

Η παροχή της φλέβας $\Pi = \Delta V/\Delta t$ υπολογίζεται από το γινόμενο:

$$\Pi = A(\upsilon_1 - \upsilon_2) = A(\upsilon_1 - 0{,}5\upsilon_1) \quad ή \quad \Pi = 0{,}5A\upsilon_1 \quad \textbf{(6)}$$

όπου $\upsilon_1 - \upsilon_2$ η ταχύτητα της φλέβας ως προς την πλάκα, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία «βλέπει» ένας παρατηρητής που βρίσκεται επάνω στην πλάκα τη φλέβα να προσπίπτει επάνω στην πλάκα.

Η σχέση (5), λόγω της σχέσης (6), γράφεται:

$$F' = 0{,}25\rho \cdot A \cdot \upsilon_1^2 = 0{,}25 \cdot \left(1 \cdot 10^3 \ \text{Kg/m}^3\right) \cdot \left(10 \cdot 10^{-4} \ \text{m}^3\right) \cdot \left(2 \ \text{m/s}\right)^2 \quad ή \quad F' = 1 \ \text{N}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης της πλάκας υπολογίζεται από την εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής. Έχουμε:

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{M} = \frac{F'}{M} = \frac{1 \ \text{N}}{0{,}5 \ \text{Kg}} \quad ή \quad \alpha = 2 \ \text{m/s}^2$$

ΘΕΜΑ 118ο

α. Θεωρούμε το οριζόντιο έδαφος ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Έστω Δm η μάζα μιας σταγόνας νερού και υ_0 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία αυτή εγκαταλείπει το έδαφος. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της σταγόνας από το έδαφος μέχρι το ανώτερο σημείο της τροχιάς της έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \quad ή \quad U_{(\alpha\rho\chi)} + K_{(\alpha\rho\chi)} = U_{(\tau\varepsilon\lambda)} + K_{(\tau\varepsilon\lambda)}$$

$$ή \quad 0 + \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_0^2 = \Delta m \cdot g \cdot H + 0 \quad ή$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot \left(10 \ \text{m/s}^2\right) \cdot \left(45 \ \text{m}\right)} \quad ή \quad \upsilon_0 = 30 \ \text{m/s}$$

β. Θεωρούμε ως στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών το οριζόντιο έδαφος. Η εξίσωση του Bernoulli μεταξύ της βάσης και της κορυφής του πίδακα γράφεται:

$$p_{\alpha\tau.} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2 + \rho g \cdot 0 = p_{\alpha\tau.} + \frac{1}{2}\rho \cdot 0^2 + \rho g H \quad ή \quad \upsilon_0 = \sqrt{2gH} \quad ή \quad \upsilon_0 = 30 \ \text{m/s}$$

γ. Έστω p η πίεση που επικρατεί στην επιφάνεια της κοιλότητας. Η εξίσωση του Bernoulli μεταξύ της επιφάνειας της κοιλότητας και της κορυφής του πίδακα γράφεται:

$$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 - \rho g h = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho \cdot 0^2 + \rho g H$$

Επειδή όμως η επιφάνεια της κοιλότητας είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν του ανοίγματος επάνω στο έδαφος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι $\upsilon = 0$.

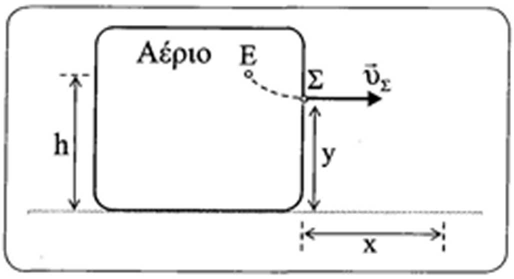
Έτσι, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$p-\rho g h = p_{\alpha\tau} + \rho g H \quad \acute{\eta} \quad p - p_{\alpha\tau} = \rho g (H+h) \quad \acute{\eta}$$

$$\Delta p = (1\cdot 10^3\ kg/m^3)\cdot(10\ m/s^2)\cdot(45\ m + 185\ m) \quad \acute{\eta} \quad \Delta p = 23\cdot 10^5\ Pa$$

ΘΕΜΑ 119ο

α. Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Ε και Σ της ρευματικής γραμμής που έχει σχεδιαστεί ποιοτικά και φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Ε ανήκει στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και το σημείο Σ βρίσκεται στο στόμιο εκροής της φλέβας του υγρού. Ως στάθμη αναφοράς για τη μέτρηση των υψών θεωρούμε το οριζόντιο έδαφος. Έχουμε:



$$p_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho g h = p_\Sigma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Sigma^2 + \rho g y \quad \textbf{(1)}$$

Η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού ισούται με την πίεση του αερίου, δηλαδή είναι $p_E = p_{\alpha\varepsilon\rho.}$. Επειδή η διατομή του δοχείου είναι μεγάλη σχετικά με το άνοιγμα της οπής, η ταχύτητα με την οποία κατέρχεται η στάθμη του νερού είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα με την οποία εξέρχεται το νερό από την οπή. Επομένως, ο όρος $(1/2)\rho\upsilon_E^2$ είναι αμελητέος σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης (1), οπότε μπορούμε να τον παραλείψουμε. Τέλος, επειδή η οπή βρίσκεται εκτεθειμένη στην ατμόσφαιρα είναι $p_\Sigma = p_{\alpha\tau}$.
Με βάση τα παραπάνω, η σχέση (1) γράφεται:

$$p_{\alpha\varepsilon\rho.} + \rho g h = p_{\alpha\tau.} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Sigma^2 + \rho g y \quad \acute{\eta} \quad p_{\alpha\varepsilon\rho.} - p_{\alpha\tau.} + \rho g (h-y) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Sigma^2$$

$$\acute{\eta} \quad \upsilon_\Sigma = \sqrt{\frac{2(p_{\alpha\varepsilon\rho.} - p_{\alpha\tau.})}{\rho} + 2g(h-y)} \quad \textbf{(2)}$$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση το υγρό εκτελεί ελεύθερη πτώση και φθάνει στο έδαφος σε χρόνο Δt. Ισχύει η σχέση:

$$y = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \quad \acute{\eta} \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \quad \textbf{(3)}$$

Στην οριζόντια διεύθυνση το υγρό εκτελεί ομαλή κίνηση και σε χρόνο Δt έχει μετατοπιστεί οριζόντια κατά:

$$x = \upsilon_\Sigma \cdot \Delta t \quad \acute{\eta}, \text{ λόγω των σχέσεων (2) και (3),}$$

$$x = \sqrt{\frac{2\left(p_{αερ.} - p_{ατ.}\right)}{ρ} + 2g\left(h - y\right)} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$ή \quad x = 2\sqrt{\frac{p_{αερ.} - p_{ατ.}}{ρg} y + \left(h - y\right) \cdot y} \quad \textbf{(4)}$$

β. Εφόσον το δοχείο είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα, η σχέση (4) για $p_{αερ.} = p_{ατ.}$ δίνει:

$$x = 2\sqrt{\left(h - y\right) \cdot y} \quad \textbf{(5)}$$

Προκειμένου το x να γίνει μέγιστο, θα πρέπει η υπόρριζος ποσότητα της εξίσωσης (5), δηλαδή το γινόμενο (h – y)·y να γίνει μέγιστο. Επειδή οι αριθμοί h – y και y έχουν σταθερό άθροισμα [(h – y) + y = h], το γινόμενο (h – y)·y γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί είναι μεταξύ τους ίσοι. Δηλαδή όταν:

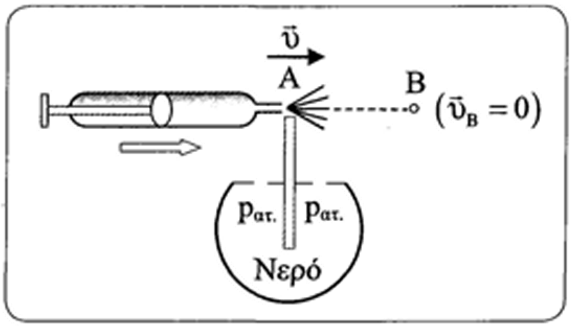
$$h - y = y \quad ή \quad y = \frac{h}{2} \quad \textbf{(6)}$$

γ. Η σχέση (5), λόγω της σχέσης (6), γίνεται:

$$x = 2\sqrt{\left(h - \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2}} \quad ή \quad x = h$$

ΘΕΜΑ 120ο

α. Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Benroulli για τα σημεία Α και Β της οριζόντιας ρευματικής γραμμής που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Α βρίσκεται στην κορυφή του κατακόρυφου σωλήνα όπου επικρατεί πίεση p και το σημείο Β βρίσκεται πολύ μακριά από το σημείο Α, έτσι ώστε η ρευματική ταχύτητα να ισούται με μηδέν ($υ_B = 0$) και η πίεση να ισούται με την ατμοσφαιρική ($p_B = p_{ατ.}$). Έχουμε:



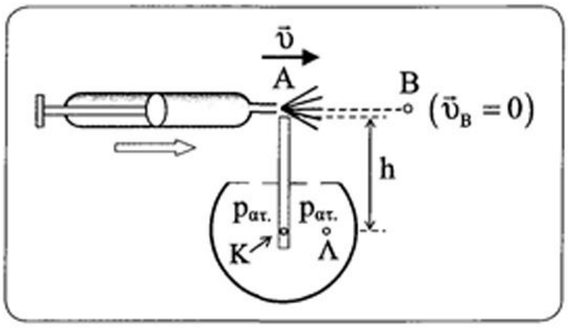
$$p_A + \frac{1}{2}ρ_α υ_A^2 = p_B + \frac{1}{2}ρ_α υ_B^2 \quad ή \quad p + \frac{1}{2}ρ_α υ^2 = p_{ατ.} \quad ή \quad p = p_{ατ.} - \frac{1}{2}ρ_α υ^2 \quad \textbf{(1)}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει:

$$p = \left(1 \cdot 10^5 \text{ Pa}\right) - \frac{1}{2}\left(1{,}3 \text{ kg/m}^3\right) \cdot \left(40 \text{ m/s}\right)^2 \quad ή \quad p = 98960 \text{ Pa}$$

β. Στην κορυφή του σωλήνα επικρατεί υποπίεση, δηλαδή πίεση μικρότερη από την ατμοσφαιρική που επικρατεί στο δοχείο, στον χώρο επάνω από το υγρό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το νερό να ανέρχεται στον σωλήνα και εφόσον η κορυφή του σωλήνα βρίσκεται σε κατάλληλο ύψος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού να παρασύρεται από το ρεύμα αέρα και να διασκορπίζεται με μορφή σταγονιδίων.

γ. Για να λειτουργεί ο ψεκαστήρας θα πρέπει το νερό να ανέρχεται έως το επάνω άκρο του κατακόρυφου σωλήνα, δηλαδή να σχηματίζει στήλη ύψους h. Τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο (βλ. διπλανό σχήμα).



Από τη στατική ισορροπία του νερού, συμπεραίνουμε ότι οι πιέσεις στα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Έχουμε:

$$p_K = p_\Lambda \quad ή \quad p + \rho g h = p_{ατ.} \quad ή, \text{ λόγω της σχέσης (1)}, \quad p_{ατ.} - \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_{min}^2 + \rho g h = p_{ατ.} \quad ή$$

$$\upsilon_{min} = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot(1\cdot 10^3\ kg/m^3)\cdot(10\ m/s^2)\cdot(5{,}85\cdot 10^{-2}\ m)}{1{,}3\ kg/m^3}} \quad ή \quad \upsilon_{min} = 30\ m/s$$

ΘΕΜΑ 121ο

α. Σε μεγάλη απόσταση από το αεροπλάνο, θεωρητικά στο άπειρο, ο αέρας έχει σε όλες τις ρευματικές γραμμές την ίδια πίεση p_∞ και την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\infty$. Για μία ρευματική γραμμή η οποία διέρχεται ακριβώς πάνω από την πτέρυγα, από την εξίσωση του Bernoulli έχουμε:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_\infty^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_1^2 \quad \textbf{(1)}$$

όπου p_1 η πίεση του αέρα ακριβώς επάνω από την πτέρυγα.
Για μία ρευματική γραμμή η οποία διέρχεται ακριβώς κάτω από την πτέρυγα, από την εξίσωση του Bernoulli έχουμε:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_\infty^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_2^2 \quad \textbf{(2)}$$

όπου p_2 η πίεση του αέρα ακριβώς κάτω από την πτέρυγα.
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_2^2 \quad ή \quad p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_2^2 \quad ή$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho_\alpha\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1{,}2\ \text{kg/m}^3\right)\cdot\left[\left(55\ \text{m/s}\right)^2 - \left(45\ \text{m/s}\right)^2\right] \quad ή \quad \Delta p = 600\ \text{Pa}$$

β. Το μέτρο της δυναμικής άνωσης που δέχεται το αεροπλάνο είναι:

$$F_\alpha = \Delta p\cdot(2A) = (600\ \text{N/m}^2)\cdot(30\ \text{m}^2) \quad ή \quad F_\alpha = 18000\ \text{N}$$

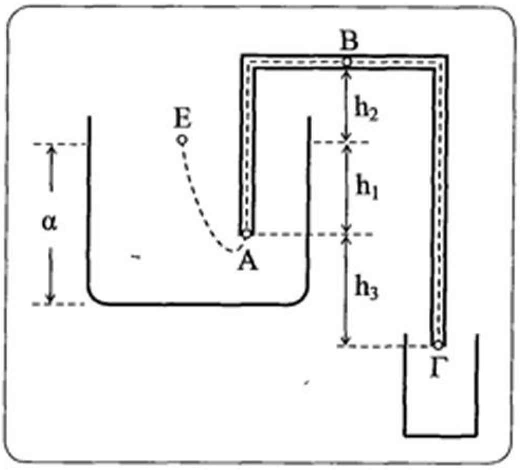
Επειδή το αεροπλάνο περά οριζόντια ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad ή \quad F_\alpha - W = 0 \quad ή \quad W = F_\alpha \quad ή \quad W = 18000\ \text{N}$$

ΘΕΜΑ 122ο

α. Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli για το σημείο Ε (βλ. ακόλουθο σχήμα) της ελεύθερης επιφάνειας του νερού και το σημείο Γ στο άκρο του σίφωνα από το οποίο εξέρχεται το νερό. Τα σημεία Ε και Γ ανήκουν στην ίδια ρευματική γραμμή. Θεωρούμε ως στάθμη αναφοράς μέτρησης των υψών τη στάθμη που διέρχεται από το σημείο Γ.

$$p_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho g\left(h_1 + h_3\right) = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + \rho g\cdot 0 \quad \textbf{(1)}$$



Η πίεση τόσο στο σημείο Ε όσο και στο σημείο Γ ισούται με την ατμοσφαιρική, επειδή τόσο η επιφάνεια του νερού όσο και το άκρο του σίφωνα είναι εκτεθειμένα στην ατμόσφαιρα. Δηλαδή ισχύει:

$$p_E = p_\Gamma = p_{\alpha\tau.}$$

Επίσης, επειδή η στάθμη του νερού κατέρχεται με αμελητέα ταχύτητα, ο όρος $(1/2)\rho\upsilon_E^2$ είναι πολύ μικρότερος από τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης (1), επομένως μπορεί να παραλειφθεί. Κατά συνέπεια, η σχέση (1) γράφεται:

$$p_{\alpha\tau.} + \rho g(h_1 + h_3) = p_{\alpha\tau.} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \quad ή$$

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{2g(h_1 + h_3)} = \sqrt{2(10\ m/s^2)\cdot(0{,}15\ m + 0{,}30\ m)} \quad ή \quad \upsilon_\Gamma = 3\ m/s$$

β. Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για το σημείο Ε της ελεύθερης επιφάνειας του νερού και το σημείο Β του σίφωνα έχουμε:

$$p_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho g(h_1 + h_3) = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + \rho g(h_2 + h_1 + h_3) \quad ή$$

$$p_{\alpha\tau.} = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + \rho g h_2 \quad ή \quad p_B = p_{\alpha\tau.} - \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 - \rho g h_2 \quad \mathbf{(2)}$$

Από την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Β και Γ του σίφωνα έχουμε:

$$A_B \cdot \upsilon_B = A_\Gamma \cdot \upsilon_\Gamma$$

όπου A_B και A_Γ τα εμβαδά διατομής του σίφωνα στα σημεία Β και Γ, αντίστοιχα. Επειδή όμως ο σίφωνας έχει σταθερή διατομή ($A_B = A_\Gamma$) από την προηγούμενη σχέση προκύπτει $\upsilon_B = \upsilon_\Gamma$. Επομένως, η σχέση (2) γράφεται:

$$p_B = p_{\alpha\tau.} - \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 - \rho g h_2 \quad ή \quad p_B = \left(1\cdot10^5 - \frac{1}{2}\cdot1\cdot10^3\cdot3^2 - 1\cdot10^3\cdot10\cdot0{,}25\right) Pa$$

$$ή \quad p_B = 93\ kPa$$

γ. Το θεωρητικά μέγιστο δυνατό ύψος για το οποίο υπάρχει ροή στον σίφωνα επιτυγχάνεται εφόσον:

i. Η πίεση στο ανώτερο σημείο του σίφωνα είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

ii. Το, εκτός δοχείου, άκρο του σίφωνα βρίσκεται χαμηλότερα από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Οριακά, εφόσον είναι:

i. $p_B = 0$.

ii. $h_1 + h_3 = 0$, δηλαδή $\upsilon_\Gamma = 0$ ή $\upsilon_B = 0$.

Κατά συνέπεια, η εξίσωση (2) για $p_B = 0$, $\upsilon_B = 0$ και $h_2 = h_{2.max}$ δίνει:

$$0 = p_{\alpha\tau.} - \rho g h_{2max} \quad ή \quad h_{2max} = \frac{p_{\alpha\tau.}}{\rho g} \quad ή \quad h_{2max} = 10\ m$$

ΘΕΜΑ 123ο

α. Από το δοθέν διάγραμμα έχουμε:

$$\frac{\Delta \upsilon}{\Delta y}=\frac{0,6\ \mathrm{m/s}-0}{3\ \mathrm{mm}-0} \quad ή \quad \frac{\Delta \upsilon}{\Delta y}=0,2\ \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{mm}}$$

β. Το πηλίκο $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta y}$ (βαθμίδα ταχύτητας) παραμένει σταθερό. Επομένως, έχουμε:

$$\frac{\Delta \upsilon}{\Delta y}=0,2\ \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{mm}} \quad ή \quad \frac{V-0}{L-0}=0,2\ \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{mm}} \quad ή \quad V=0,2\ \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{mm}}\cdot 5\ \mathrm{mm} \quad ή \quad V=1\ \mathrm{m/s}$$

γ. Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει ενέργεια στην πλάκα με ρυθμό:

$$\frac{dW_F}{dt}=FV=nA\frac{V}{L}V=\left(0,5\ \frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m^2}}\right)\cdot\left(10\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}\right)\cdot\frac{1\ \mathrm{m/s}}{5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}\cdot(1\ \mathrm{m/s})$$

$$ή \quad \frac{dW_F}{dt}=0,1\ \mathrm{J/s}$$

ΘΕΜΑ 124ο

α. Η υδροστατική πίεση σε βάθος h_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $p_{\upsilon 1}=\rho_\varepsilon g h_1$ ή $p_{\upsilon 1}=0{,}045\cdot 10^5$ Pa.

β. Η ολική πίεση στον πυθμένα του δοχείου είναι:

$$p=p_{ατ.}+\rho_\varepsilon g h_1+\rho_\nu g h_2 \quad ή \quad h_2=\frac{p-p_{ατ.}-\rho_\varepsilon g h_1}{\rho_\nu g} \quad ή \quad h_2=0{,}3\ \mathrm{m}.$$

γ. Έστω Α το εμβαδόν της βάσης του δοχείου. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στον πυθμένα δίνεται από τη σχέση: $F=pA$ ή $A=\frac{F}{p}$ ή $A=0{,}4\ \mathrm{m^2}$.

ΘΕΜΑ 125ο

α. Η υδροστατική πίεση σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού υπολογίζεται από τη σχέση: $p_\upsilon=\rho g h$ ή $p_\upsilon=2\cdot 10^3$ Pa.

Το εμβαδόν του δίσκου είναι: $A=\pi R^2$ ή $A=4\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^2}$.

Το ζητούμενο μέτρο είναι: $F_\upsilon=p_\upsilon A$ ή $F_\upsilon=80$ N.

β. Η ολική πίεση σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού υπολογίζεται από τη σχέση: $p = p_{ατ.} + p_υ$ ή $p = 1{,}02 \cdot 10^5$ Pa.
Επειδή ο δίσκος ηρεμεί, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται ισούται με μηδέν.
Δηλαδή: $\Sigma F = 0$ ή $F_{ελ.} - mg - pA = 0$ όπου $F_{ελ.}$ το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο δίσκος από το ελατήριο. Εάν με $\Delta\ell$ συμβολίσουμε την παραμόρφωση του ελατηρίου, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται: $K \cdot \Delta\ell - mg - pA = 0$ ή $\Delta\ell = \dfrac{pA + mg}{K}$ ή $\Delta\ell = 0{,}5$ m.

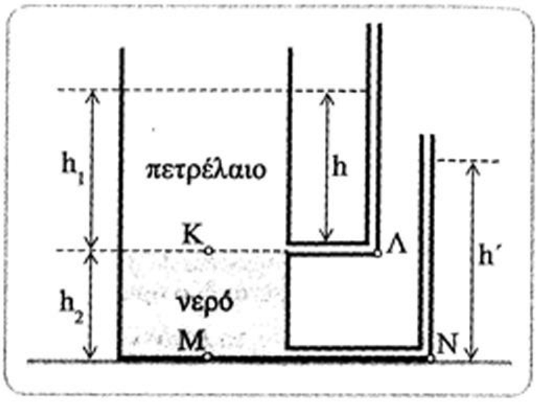
γ. Μετά την προσθήκη νερού, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι τετραπλάσια της αρχικής. Δηλαδή ισχύει: $U'_{ελ.} = 4U_{ελ.}$.
Εάν με $\Delta\ell'$ συμβολίσουμε τη νέα παραμόρφωση του ελατηρίου, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται: $\dfrac{1}{2}K \cdot \Delta\ell'^2 = 4 \cdot \dfrac{1}{2}K \cdot \Delta\ell^2$ ή $\Delta\ell' = 2\Delta\ell$ ή $\Delta\ell' = 1$ m.
Το μέτρο της νέας δύναμης που ασκεί το ελατήριο στον δίσκο είναι:
$F'_{ελ.} = K \cdot \Delta\ell'$ ή $F'_{ελ.} = 8200$ N.
Έστω M΄ η ποσότητα του νερού που προσθέσαμε. Από την ισορροπία του δίσκου έχουμε:
$\Sigma F = 0$ ή $F_{ατ.} + (M + M')g + mg - F'_{ελ.} = 0$ ή $F_{ατ.} + Mg + M'g + mg - F'_{ελ.} = 0$ ή

$p_{ατ.}A + F_υ + M'g + mg - F'_{ελ.} = 0$ ή $M' = \dfrac{F'_{ελ.} - mg - F_υ - p_{ατ.}A}{g}$ ή $M' = 410$ kg.

.

ΘΕΜΑ 126^ο

α. Επειδή το πετρέλαιο βρίσκεται σε στατική ισορροπία, οι ολικές πιέσεις στα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο είναι ίσες. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το διπλανό σχήμα ισχύει:
$p_K = p_Λ$ ή $p_{ατ.} + \rho_π g h_1 = p_{ατ.} + \rho_π g h$ ή $h_1 = h$.



β. Επειδή το νερό βρίσκεται σε στατική ισορροπία, οι ολικές πιέσεις στα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο είναι ίσες. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το διπλανό σχήμα ισχύει: $p_M = p_N$ ή $p_{ατ.} + \rho_π g h_1 + \rho_ν g h_2 = p_{ατ.} + \rho_ν g h'$ ή $\rho_π h_1 + \rho_ν h_2 = \rho_ν h'$ ή

$\rho_π h + \rho_ν h_2 = \rho_ν h'$ ή $h' = \dfrac{\rho_π}{\rho_ν} h + h_2$ ή $h' = 0{,}65$ m.

Η ζητούμενη διαφορά είναι: $\Delta h = h + h_2 - h'$ ή $\Delta h = 0{,}05$ m.

ΘΕΜΑ 127ο

α. Έστω A_2 το ζητούμενο εμβαδόν. Ισχύει η σχέση: $\Pi_\nu = A_2 \upsilon_2$ ή $A_2 = \dfrac{\Pi_\nu}{\upsilon_2}$ ή $A_2 = 6{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$.

β. Επειδή τα υγρά είναι ασυμπίεστα, ισχύει η σχέση: $\Pi_o + \Pi_\nu = \Pi$, όπου Π η παροχή του μείγματος από τη συσκευή. Με αντικατάσταση των τιμών στην προηγούμενη σχέση προκύπτει: $\Pi = 20\ \text{L/s}$.

γ. Από την αρχή διατήρησης της ύλης προκύπτει ότι η μάζα των υγρών ανά μονάδα χρόνου που εξέρχεται από τους αγωγούς (1) και (2) ισούται με τη μάζα του μείγματος ανά μονάδα χρόνου που εξέρχεται από τον αγωγό (3). Εάν με ρ_μ συμβολίσουμε την πυκνότητα του μείγματος, αλγεβρικά έχουμε: $\dfrac{\Delta m_o}{\Delta t} + \dfrac{\Delta m_\nu}{\Delta t} = \dfrac{\Delta m_\mu}{\Delta t}$ ή $\rho_o \dfrac{\Delta V_o}{\Delta t} + \rho_\nu \dfrac{\Delta V_\nu}{\Delta t} = \rho_\mu \dfrac{\Delta V_\mu}{\Delta t}$ ή

$\rho_o \Pi_o + \rho_\nu \Pi_\nu = \rho_\mu \Pi$ ή $\rho_\mu = \dfrac{\rho_o \Pi_o + \rho_\nu \Pi_\nu}{\Pi}$ ή $\rho_\mu = 0{,}85 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$.

ΘΕΜΑ 128ο

α. Ισχύει η σχέση: $\Pi = A_1 \cdot \upsilon_1$ ή $\upsilon_1 = \dfrac{\Pi}{A_1}$ ή $\upsilon_1 = 5\ \text{m/s}$.

β. Για τις πιέσεις p_1 και p_2 στα σημεία 1 και 2 αντίστοιχα ισχύει:

$p_1 = p_{\alpha\tau.} + \rho g h_1$ **(1)** $p_2 = p_{\alpha\tau.} + \rho g h_2$ **(2)**.

Αφαιρώντας τη σχέση (1) από τη σχέση (2) προκύπτει:

$p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1)$ ή $\Delta p = \rho g \Delta h$ **(3)**.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 προκύπτει:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g \cdot 0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g \cdot 0 .$$

Επειδή το σημείο 2 αποτελεί σημείο ανακοπής της ροής ($\upsilon_2 = 0$), η προηγούμενη σχέση γράφεται: $p_1 + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2$ ή $\Delta p = \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$ ή, μέσω της σχέσης (3), $\rho g \Delta h = \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$ ή

$\Delta h = \dfrac{\upsilon_1^2}{2g}$ ή $\Delta h = 1{,}25\ \text{m}$.

ΘΕΜΑ 129ο

α. Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Α και Β. Το σημείο Α βρίσκεται στο στόμιο εκροής του νερού και το σημείο Β αποτελεί το ανώτερο σημείο στο οποίο φθάνει ο πίδακας. Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας εκροής του νερού. Έχουμε:

$p_{\alpha\tau.} + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g \cdot 0 = p_{\alpha\tau.} + \dfrac{1}{2}\rho \cdot 0^2 + \rho g h$ ή $\upsilon = \sqrt{2gh}$ ή $\upsilon = 1{,}2\ \text{m/s}$.

β. Η ζητούμενη παροχή είναι: $\Pi = A\cdot\upsilon = \pi\cdot r^2\cdot\upsilon$ ή $\Pi = 1{,}2\cdot10^{-3}\ m^3/s$.

γ. Έστω υ' το μέτρο της ταχύτητας εκροής του νερού. Η παροχή του σωλήνα δίνεται από τη σχέση: $\Pi = A'\cdot\upsilon'$ όπου $A' = A - 50\%A = 0{,}5A$ το νέο εμβαδόν διατομής του κατακόρυφου τμήματος του σωλήνα.

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει: $\upsilon' = \dfrac{\Pi}{A'} = \dfrac{\Pi}{0{,}5A} = \dfrac{A\upsilon}{0{,}5A} = 2\upsilon$ ή $\upsilon' = 2{,}4\ m/s$.

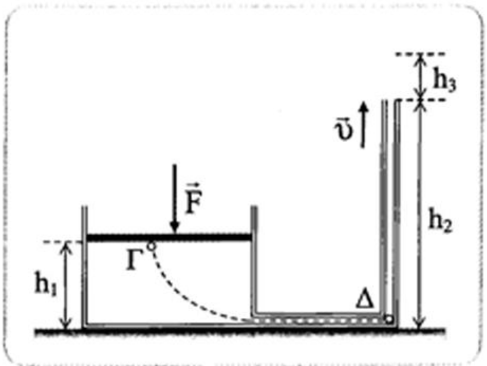
Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Α και Γ. Το σημείο Α βρίσκεται στο στόμιο εκροής του νερού και το σημείο Γ αποτελεί το ανώτερο σημείο στο οποίο φθάνει ο πίδακας. Έχουμε: $p_{\alpha\tau.} + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon'^2 + \rho g\cdot 0 = p_{\alpha\tau.} + \dfrac{1}{2}\rho\cdot 0^2 + \rho g h'$ ή $h' = \dfrac{\upsilon'^2}{2g}$ ή $h' = 28{,}8\ cm$.

ΘΕΜΑ 130ο

α. Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Α και Β. Το σημείο Α βρίσκεται στο στόμιο εκροής του νερού και το σημείο Β αποτελεί το ανώτερο σημείο στο οποίο φθάνει ο πίδακας. Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας εκροής του νερού. Έχουμε:

$$p_{\alpha\tau.} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g\cdot 0 = p_{\alpha\tau.} + \frac{1}{2}\rho\cdot 0^2 + \rho g h_3 \quad \text{ή} \quad \upsilon = \sqrt{2gh_3} \quad \text{ή} \quad \upsilon = 2\ m/s.$$

β. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το εμβαδόν διατομής του σωλήνα δεν μεταβάλλεται, από την εξίσωση της συνέχειας προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας ροής του νερού μέσα στον σωλήνα παραμένει σταθερό. Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Γ και Δ της ρευματικής γραμμής που έχει σχεδιαστεί ποιοτικά και απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + \rho g h_1 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 + \rho g\cdot 0 \quad \text{ή,}$$

εφόσον $\upsilon_\Gamma << \upsilon_\Delta = \upsilon$, $\quad p_{\alpha\tau.} + \dfrac{F}{A} + \rho g h_1 = p_{\alpha\tau.} + \rho g h_2 + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon^2$ ή

$$F = A\left[\rho g\left(h_2 - h_1\right) + \frac{\rho\upsilon^2}{2}\right] \quad \text{ή} \quad F = 30\ N.$$

γ. Η ζητούμενη πίεση είναι: $p_{o\rho.\tau\mu.} = p_\Delta = p_{\alpha\tau.} + \rho g h_2$ ή $p_{o\rho.\tau\mu} = 1{,}05\cdot10^5\ Pa$.

ΘΕΜΑ 131ο

α. Έστω $\vec{F}'$ η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια από την εξερχόμενη φλέβα νερού. Επειδή η επιφάνεια ηρεμεί, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται ισούται με μηδέν. Δηλαδή, ισχύει:

$\Sigma\vec{F} = 0$ ή $\vec{F} + \vec{F}' = 0$ ή $\vec{F}' = -\vec{F}$ ή, μετρικά, $F = F'$.

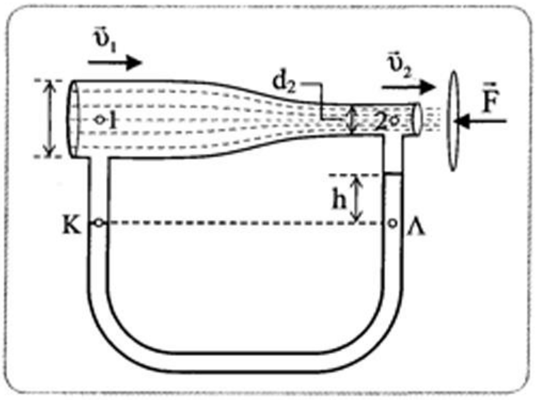
Έστω ότι σε χρόνο dt προσπίπτει στην επιφάνεια ποσότητα νερού ίση με dm. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής αυτής της ποσότητας ισούται με τη δύναμη $\vec{F}''$ που ασκείται στην εν λόγω ποσότητα νερού από την επιφάνεια και, κατ’ επέκταση, λόγω δράσης – αντίδρασης, η ποσότητα αυτή ασκεί ακριβώς την αντίθετη δύναμη στην επιφάνεια. Επομένως, αλγεβρικά έχουμε: $F' = -F''$ ή $F' = -\dfrac{dP_x}{dt} = -\dfrac{0 - dm \cdot \upsilon_2}{dt} = \dfrac{dm \cdot \upsilon_2}{dt} = \rho_\nu \dfrac{dV}{dt}\upsilon_2 = \rho_\nu A_2 \upsilon_2^2$ ή

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{F'}{\rho_\nu \cdot A_2}} = \sqrt{\frac{F'}{\rho_\nu \cdot \pi (d_2/2)^2}} = \frac{2}{d_2}\sqrt{\frac{F'}{\rho_\nu \cdot \pi}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_2 = 16 \text{ m/s}.$$

Από τον νόμο της συνέχειας προκύπτει:

$$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \quad \text{ή} \quad \pi\frac{d_1^2}{4}\upsilon_1 = \pi\frac{d_2^2}{4}\upsilon_2 \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \upsilon_2 \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = 2 \text{ m/s}.$$

β. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 (βλ. διπλανό σχήμα) έχουμε:



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1^2 + \rho_\nu g \cdot 0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_2^2 + \rho_\nu g \cdot 0 \quad \text{ή}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho_\nu \left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \quad \textbf{(1).}$$

Επειδή ο υδράργυρος βρίσκεται σε στατική ισορροπία, για τα σημεία Κ και Λ ισχύει:

$$p_K = p_\Lambda \quad \text{ή} \quad p_1 + \rho_\nu g h_1 = p_2 + \rho_\nu g h_2 + \rho_\upsilon g h$$

όπου h_1 και h_2 οι κατακόρυφες αποστάσεις των σημείων 1 και 2 από τις στάθμες του υδραργύρου στο αριστερό και δεξιό άκρο σκέλος της μανομετρικής συσκευής. Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$p_1 - p_2 = \rho_\nu g (h_2 - h_1) + \rho_\upsilon g h \quad \text{ή} \quad p_1 - p_2 = \rho_\nu g(-h) + \rho_\upsilon g h \quad \text{ή} \quad p_1 - p_2 = (\rho_\upsilon - \rho_\nu) g h \quad \textbf{(2).}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\rho_\nu \left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) = (\rho_\upsilon - \rho_\nu) g h \quad \text{ή} \quad h = \frac{\rho_\nu \left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)}{2(\rho_\upsilon - \rho_\nu) g} \quad \text{ή} \quad h = 1 \text{ m}.$$

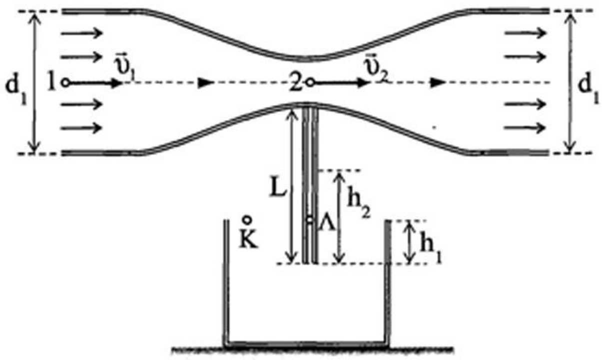
ΘΕΜΑ 132^o

Α. α. Από τη δοθείσα παροχή, για τα μέτρα υ_1 και υ_2 των ταχυτήτων ροής του αέρα στο ευρύ και το στενό τμήμα του σωλήνα αντίστοιχα έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{\Pi}{\pi (d_1/2)^2} \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = 20 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad \upsilon_2 = \frac{\Pi}{\pi (d_2/2)^2} \quad \text{ή} \quad \upsilon_2 = 80 \text{ m/s}.$$

β. Από την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 (βλ. ακόλουθο σχήμα) της οριζόντιας ρευματικής γραμμής του αέρα έχουμε:

$$p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_1^2 = p + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_2^2 \quad \text{ή} \quad p = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho_\alpha \left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right) \quad \text{ή} \quad p = 96{,}25 \cdot 10^3 \text{ Pa}.$$



γ. Επειδή το νερό βρίσκεται σε στατική ισορροπία ισχύει:

$$p_\Lambda = p_K \quad ή \quad p + \rho_\alpha g\left(\frac{d_2}{2} + L - h_2\right) + \rho_\nu g(h_2 - h_1) = p_{ατ.}$$

Η υδροστατική πίεση του αέρα θεωρείται αμελητέα, άρα ο όρος $\rho_\alpha g\left(\frac{d_2}{2} + L - h_2\right)$ είναι πολύ μικρότερος από τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης και επομένως μπορεί να αμεληθεί. Κατά συνέπεια, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$p + \rho_\nu g(h_2 - h_1) = p_{ατ.} \quad ή \quad h_2 = \frac{p_{ατ.} - p}{\rho_\nu g} + h_1 \quad ή \quad h_2 = 0{,}5\ m.$$

Β. Για να αρχίσει να εκρέει νερό από τον αγωγό στον σωλήνα πρέπει να ισχύει η σχέση: $h_2 \geq L$ **(1)**. Από τον νόμο της συνέχειας, για τα μέτρα V_1 και V_2 των ταχυτήτων ροής του αέρα στο ευρύ και το στενό τμήμα του σωλήνα αντίστοιχα, ισχύει:

$$A_1V_1 = A_2V_2 \quad ή \quad \pi\frac{d_1^2}{4}V_1 = \pi\frac{d_2^2}{4}V_2 \quad ή \quad V_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2}V_1 \quad \textbf{(2)}.$$

Από την εξίσωση του Bernoulli, για τα σημεία 1 και 2 έχουμε:

$$p_{ατ.} + \frac{1}{2}\rho_\alpha V_1^2 = p' + \frac{1}{2}\rho_\alpha V_2^2 \quad ή \quad p' = p_{ατ.} + \frac{1}{2}\rho_\alpha\left(V_1^2 - V_2^2\right)$$ ή, λόγω της σχέσης (2),

$$p' = p_{ατ} + \frac{1}{2}\rho_\alpha\left(V_1^2 - \frac{d_1^4}{d_2^4}V_1^2\right) \quad ή \quad p' = p_{ατ} + \frac{1}{2}\rho_\alpha\left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right)V_1^2 \quad \textbf{(3)}.$$

Επειδή το νερό βρίσκεται σε στατική ισορροπία ισχύει:

$$p_\Lambda = p_K \quad ή \quad p' + \rho_\alpha g\left(\frac{d_2}{2} + L - h_2\right) + \rho_\nu g(h_2 - h_1) = p_{ατ.}$$

Επειδή η υδροστατική πίεση του αέρα θεωρείται αμελητέα, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$p' + \rho_\nu g(h_2 - h_1) = p_{ατ.} \quad ή \quad h_2 = h_1 + \frac{p_{ατ} - p'}{\rho_\nu g}$$ ή, λόγω της σχέσης (3),

$$h_2 = h_1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_\alpha\left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right)V_1^2}{\rho_\nu g} \quad \textbf{(4)}.$$

Η σχέση (1), λόγω της σχέσης (4), γράφεται:

$$h_1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_\alpha\left(1-\frac{d_1^4}{d_2^4}\right)V_1^2}{\rho_v g} \geq L \quad \text{ή} \quad V_1 \geq \sqrt{\frac{2g\rho_v\left(L-h_1\right)}{\rho_\alpha\left(\frac{d_1^4}{d_2^4}-1\right)}} \quad \text{ή} \quad \frac{\Pi}{\pi\frac{d_1^2}{4}} \geq \sqrt{\frac{2g\rho_v\left(L-h_1\right)}{\rho_\alpha\left(\frac{d_1^4}{d_2^4}-1\right)}} \quad \text{ή}$$

$$\Pi \geq \pi\frac{d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2g\rho_v\left(L-h_1\right)}{\rho_\alpha\left(\frac{d_1^4}{d_2^4}-1\right)}} \quad \text{ή} \quad \Pi \geq 4\pi \text{ L/s} \quad \text{ή} \quad \Pi_{min} = 4\pi \text{ L/s}.$$