



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΛΥΣΕΙΣ

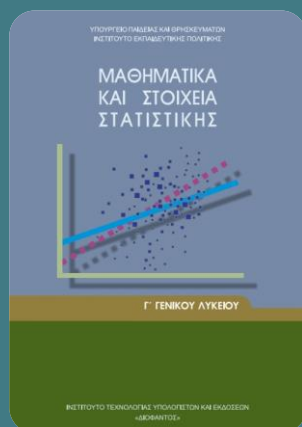
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι ΕΠΑ.Λ

ΣΑΒΒΑΤΟ 3 Ιουνίου 2022

Σήφης Βοσκάκης

Μανώλης Ανδρέας

Χασάπης Γιώργος



Συντονισμός

Χατζόπουλος Μάκης

Οι απαντήσεις - λύσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των μελών της **lisari team**

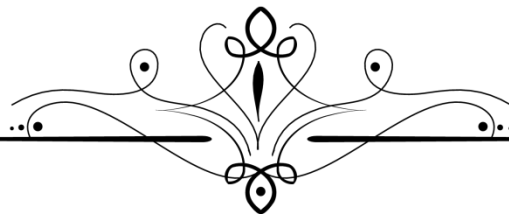
1η έκδοση: 3 – 6 – 2023 (συνεχής ανανέωση)



Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**
από το μαθηματικό **ιστότοπο**

lisari.blogspot.com





Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2023 στο μάθημα **Μαθηματικά για τα ΕΠΑΛ**. Η παρουσίαση των απαντήσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team**. Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari^{team}

3 Ιουνίου 2023

lisariteam

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3ο ΓΕΛ Άργους)
2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)
3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδειά Βοιωτίας)
4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)
5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)
7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμιάς" Γλυφάδας)
9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ωθηση" - Μαρούσι)
10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)
11. Κανάβης Χρήστος (6ο ΓΕΛ Αιγάλεω)
12. Κατζιώτη Χαρά (2ο Γυμνάσιο Πρέβεζας)
13. Κουλούρης Ανδρέας (3ο ΓΕΛ Γαλατσίου)
14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)
15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο και Ευρωπαϊκό Πρότυπο)
16. Κοσόγλου Ιορδάνης (ΓΕ.Λ Εξαπλάτανου)
17. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" και Φροντιστήριο 20' – Κοζάνη)
18. Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
19. Μπαδέμης Δημήτρης (Καθηγητής μαθηματικών στην Ιδιωτική Εκπαίδευση)
20. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
21. Νικολόπουλος Αθανάσιος (2ο ΓΕΛ, Ζάκυνθος)
22. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγρίνιο)
23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")
24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)
25. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)
26. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
27. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)
28. Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
29. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστής)
30. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
31. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας - ΓΕΛ Ζευγολατιού)
32. Τάσος Νίκος (Σύμβουλος Ι.Ε.Π.)
33. Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)
34. Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
35. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)
36. Χατζόπουλος Μάκης (ΓΕΛ Φιλοθέης)

lisari team / Σχολικό έτος 2022 – 23
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 30

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε,

$$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x)) \text{ και για } h \neq 0$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Επομένως,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x).$$

$$\text{Άρα } (cf(x))' = cf'(x).$$

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 22

Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι

η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

A3. α. Λ

β. Σ

γ. Σ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B2. Έχουμε $f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 1 - 12 = 2\alpha - 6$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον x' , άρα

$$2\alpha - 6 = 0 \Rightarrow 2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3.$$

B3. Είναι $f'(x) = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f'(x)	+			+
f(x)				

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 1]$.

Το $f(-2) = 30$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(1) = 3$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

B4. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 6(x+2) = 6 \cdot (1+2) = 6 \cdot 3 = 18.$$

Το ζητούμενο όριο υπάρχει και είναι ίσο με 18.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Κεντρική τιμή κλάσης $[16, 20)$:

$$\frac{16+20}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Κεντρική τιμή κλάσης $[20, 24)$:

$$\frac{20+24}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

Έστω v το πλήθος των μαθητών/τριών, τότε:

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{200 + 210 + 18v_3 + 110}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{520 + 18v_3}{v} = 14 \Leftrightarrow 520 + 18v_3 = 14v \quad (1).$$

Ακόμα

$$20 + 15 + v_3 + 5 = v \Leftrightarrow 40 + v_3 = v \quad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2):

$$\begin{aligned} \begin{cases} 520 + 18v_3 = 14v \\ 40 + v_3 = v \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 520 + 18v_3 = 14(40 + v_3) \\ 40 + v_3 = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \\ 40 + v_3 = v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4v_3 = 40 \\ 40 + v_3 = v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = 10 \\ 40 + 10 = v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = 10 \\ v = 50 \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως $v_3 = 10$

Γ2. Ο πίνακας γίνεται διαδοχικά:

Κλάσεις [,)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	10	180
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ3.

Κλάσεις [,)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i (x_i - \bar{x})^2$
[8,12)	10	20	200	16	320
[12,16)	14	15	210	0	0
[16,20)	18	10	180	16	160
[20,24)	22	5	110	64	320
	Σύνολο	50	700		800

Επομένως,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} = \frac{800}{50} = 16.$$

Γ4. Η τυπική απόκλιση είναι

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$$

Επομένως,

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \simeq 0,28 \text{ ή } 28\% \text{ ή } CV = \frac{2}{7} > \frac{2}{10} > \frac{1}{10} \text{ ή } 10\%$$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x \neq 0$ έχουμε

$$f'(x) = -\frac{(1)'x^2 - 1(x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{0 - 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4}.$$

Είναι

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} > 0 \stackrel{x^4 > 0}{\Leftrightarrow} 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} < 0 \stackrel{x^4 > 0}{\Leftrightarrow} 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η μονοτονία φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
f	$\searrow$		$\nearrow$

Δ2. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4, -1]$ όποτε έχουμε :

$$\begin{aligned}
 -4 \leq x \leq -1 &\Rightarrow f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Rightarrow -\frac{1}{(-4)^2} \geq f(x) \geq -\frac{1}{(-1)^2} \\
 &\Rightarrow -\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \\
 &\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

Δ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι

$$\lambda = f'(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^4} = 2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 2x + \beta$. Όμως το

$M(1, f(1)) \in (\varepsilon)$ όποτε

$$f(1) = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -\frac{1}{1^2} = 2 + \beta \Leftrightarrow -1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3.$$

Συνεπώς η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι

$$y = 2x - 3.$$

Δ4. Τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ ανήκουν στην εφαπτομένη οπότε για τις τεταγμένες τους ισχύει ότι

$$y_i = 2x_i - 3, \quad i = 1, 2, 3$$

Από εφαρμογή σχολικού έχουμε

$$\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 \quad \text{και} \quad S_y = |2|S_x = 2 \cdot 2 = 4$$

Οπότε ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων είναι

$$CV = \frac{S_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{5} = 0,8.$$